# Sitzungsberi...

Bayerische Akademie der Wissenschaften. ...

# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.



Band XXVIII. Jahrgang 1898.

**München.**
Verlag der k. Akademie.
1899.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Akademische Buchdruckerei von F. Straub in München.

# Uebersicht

## des Inhaltes der Sitzungsberichte Bd. XXVIII
## Jahrgang 1898.

**Die mit * bezeichneten Abhandlungen sind in den Sitzungsberichten nicht abgedruckt.**

*Oeffentliche Sitzung der kgl. Akademie der Wissenschaften zur Feier des 139. Stiftungstages am 15. März 1898.*



*Oeffentliche Sitzung zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königl. Hoheit des Prinzregenten am 12. November 1898.*



*Sitzung vom 15. Januar 1898.*

## *Sitzung vom 5. Februar 1898.*



## *Sitzung vom 5. März 1898.*



## *Sitzung vom 4. Mai 1898.*



## *Sitzung vom 11. Juni 1898.*

### *Sitzung vom 2. Juli 1898.*



### *Sitzung vom 5. November 1898.*



### *Sitzung vom 3. Dezember 1898.*

# Sitzungsberichte

der

# königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

## Mathematisch-physikalische Classe.

### Sitzung vom 15. Januar 1898.

1. Herr W. v. Gümbel legt durch den Classensecretär eine Abhandlung: „Ueber die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben" vor.

2. Herr Robert Hartig hält einen Vortrag: „Ueber den Einfluss der Ausästung und der Wurzelverminderung auf die Grösse, Form und anatomische Zusammensetzung des Holzzuwachses der Bäume." Derselbe wird anderweit veröffentlicht werden.

3. Herr Karl v. Orff überreicht einen Aufsatz des Herrn Steuerrathes Dr. J. H. Franke: „Ueber Coordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecken."

4. Herr Ferdinand Lindemann macht eine Mittheilung: „Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale."

5. Herr Paul Groth legt eine Arbeit des correspondirenden Mitgliedes Professor Eugraph v. Fedorow in Moskau: „Die Resultate der Feldspathstudien" vor.

6. Herr Alfred Pringsheim spricht: „Zur Theorie des Doppel-Integrals."

7. Herr Hugo Seeliger berichtet über eine der Akademie eingesandte Abhandlung des Herrn Direktors Sigmund v. Merz: „Das Fraunhofer-Objektiv."

8. Herr Eugen v. Lommel legt eine Arbeit seines Schülers Dr. J. Stark: „Ueber Ausbreitung von Flüssigkeiten" vor.

---

# Ueber die in den letzten Jahren in Bayern wahrgenommenen Erdbeben.

Von **C. W. v. Gümbel.**

*(Eingelaufen 15. Januar.)*

Die in der zweiten Hälfte des Monats October und während des ganzen Novembers 1897 am Südrande des Erzgebirges, im Vogtlande und im Fichtelgebirge wahrgenommenen Erdbeben geben mir zunächst Veranlassung, das von mir in den Sitzungsberichten unserer Akademie (Sitzungsber. d. math.-phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wiss. 1889. Bd. XIX. Heft 1) gegebene Verzeichniss der überhaupt in Bayern verspürten Erderschütterungen weiter fortzuführen, zu vervollständigen und frühere Angaben theilweise richtig zu stellen.

## I. Nachträge und Berichtigungen des oben erwähnten Verzeichnisses.

Es ist nicht zweifelhaft, dass aus der älteren Zeit nur über die bedeutendsten Erderschütterungen Nachrichten erhalten geblieben oder in alten Chroniken versteckt sind. Es ist Folgendes nachzutragen:

### 1117.

Ueber das angeblich vom Jahre 1116 am 3. Januar verzeichnete Erdbeben finden sich sichere Nachrichten in Ludwigs Scriptores rerum bambergensium (I. 100, 454). Darnach hat dasselbe am 3. Januar 1117 stattgefunden und grosse Zerstörungen verursacht. Die Domkirche in Bamberg z. B. wurde so stark beschädigt, dass sie neu aufgebaut werden musste.[1]) Wohl

[1]) Riehl, Beil. z. Allgem. Zeit. vom 6. Aug. 1886).

auf dasselbe Ereigniss bezieht sich auch die Nachricht, dass in Berchtesgaden ganze Felsen von den Bergen herabgestürzt seien.

**1348.**

Von dem Erdbeben des Jahres 1348 wird von Weihenstephan und Passau (Bayerland 1891 S. 37) gemeldet, dass die Häuser und Kirchen schwankten, und die Glocken anschlugen. Die Leute sollen von heftigem Kopfweh und Taumel befallen worden sein, so dass sie hin und her wankten.

**1690.**

Die schrecklich zerstörende Erderschütterung vom 4. Dezember 1690, welche besonders in Wien grossartige Verheerungen anrichtete, erstreckte sich auch nach Villach, wo fast alle Kirchen umgestürzt und 60 Personen getödtet wurden. Dieses Erdbeben dehnte sich bis Nürnberg, Regensburg, Augsburg und München aus, wo die Glocken anschlugen.

**1822.**

Aus dem Jahre 1822 wird berichtet, dass am 18. März, Abends von 9 bis 12 Uhr in Greding eine Erderschütterung verspürt wurde.

**1865.**

In den Angaben über das Erdbeben von Kundel im Innthal soll es statt Februar Januar heissen.

**1868.**

Am 22. Dezember dieses Jahres wurde eine Erderschütterung in Innsbruck beobachtet, die wohl auch bis in das Unterinnthal sich erstreckt hat.

**1870.**

Das Erdbeben vom 19. April 1870, welches im Unterinnthal wahrgenommen wurde, begann um $12\frac{1}{2}$ Uhr Nachts und wiederholte sich am 20. und 30. April (11 Uhr Nachts) sowie am 1. Mai dieses Jahres.

**1886.**

Aus diesem Jahre wird ein Erdbeben am 6. Juni, Abends $9\frac{3}{4}$ Uhr, in Lahr angezeigt, und am 9. Oktober, Abends h. $6\frac{1}{4}$

wurde eine ähnliche Erderschütterung zwischen Strassburg und Kappel wahrgenommen.

**1888.**

Das Erdbeben vom 26. Dezember dieses Jahres, welches hauptsächlich im Vogtlande auftrat, erstreckte sich in SW-Richtung bis in die Gegend von Hof, wie es auch im Dorfe Feilitzsch (NO. von Hof) wahrgenommen wurde. (Vgl. Credner in Bericht. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. math.-phys. Classe v. 11. Febr. 1889.)

**1889.**

Am 7. Januar dieses Jahres verspürte man in Württemberg eine Erderschütterung, welche auch in Ulm wahrgenommen wurde.

Das am 9. Februar erfolgte Neuburger Erdbeben machte sich auch in Möckenlohe, 10 km NNW. von Neuburg, 5 Minuten später als in der Stadt und nach der Angabe des Herrn Pfarrers Bayer in Ochsenfeld, 12 km N. von Neuburg, durch Fensterklirren bemerkbar.

**1890.**

In der Nacht vom 23. auf 24. Januar soll ein Erdbeben in Schierling in Niederbayern durch Erschütterung der Gebäude angedeutet worden sein. Bestimmteres und Näheres war hierüber nicht zu ermitteln.

Am 26. März desselben Jahres ereignete sich in einem grossen Theil von Tirol um 9 Uhr 15 Minuten Abends ein deutlich fühlbarer, 4—5 Secunden andauernder Erdstoss in der Richtung von SO. nach NW. Nach 5 Minuten folgte ein zweiter, jedoch schwächerer Stoss. (Münchener Stadtzeitung vom 19. April 1890; zahlreiche Tiroler Zeitungen.) Nach Herrn Oberst a. D. Forster wurde dieselbe Erschütterung auch in Partenkirchen um 9 Uhr 15 Minuten wahrgenommen.

Herr Rektor Schremmel in Kissingen glaubt am 30. September um 1 Uhr 21 Minuten Mittags eine zitternde Erdbewegung in der Richtung von SO. nach NW. mit einer Dauer von 1 ½ Minuten beobachtet zu haben.

Herr Apotheker Hintermaier in Wegscheid bei Passau

berichtet, dass am 24. November d. Js. bei einem orkanartigen SW.-Sturm um h. $1^{0}$, $1^{6}$, $1^{7}$, $1^{8}$ und $1^{10}$ p. erdbebenartige Stösse und um $1^{45}$ p. ein heftiger, etliche Sekunden anhaltender Erdstoss stattgefunden habe. Diese Angaben, sowie die nächstfolgenden Berichte verdanke ich der sehr gefälligen Mittheilung des Herrn Direktor der hiesigen meteorologischen Centralstation Dr. Erk (M. C. S.), für die ich hier meinen verbindlichsten Dank ausspreche.

**1891.**

Aus diesem Jahre liegt eine Mittheilung des Herrn Apothekers Mielbach in Obernzell bei Passau vor, worin berichtet wird, dass am 23. Juli um h. $1^{10}$ A. ein Erdbeben in der Richtung von NO. nach SW. wahrgenommen wurde. Dabei liess sich ein donnerähnliches Rollen unter der Erde hören und in einigen kleineren (?) Häusern gewaltige Erschütterungen wahrnehmen (M.C.S.).

**1893.**

Nach der Angabe des Herrn Grenzoberaufsehers Grünthaler in Breitenberg an der Landesgrenze bei Passau soll daselbst am 17. März um h. $9^{45}$ und $10^{25}$ A. die Wirkung von Erdstössen bemerkt worden sein (M.C.S.).

**1894.**

Herr P. Franz Seraph Adelhard in Volkersburg machte die Mittheilung, dass am 11. Juli h. $1^{34}$ p. zwei rasch aufeinander folgende Erdstösse in senkrechter Richtung gespürt worden seien, die auch von anderen Hausbewohnern wahrgenommen wurden (M.C.S.).

**1895.**

Von Partenkirchen ging von dem Herrn Lehrer E. Peter der Bericht ein, dass er, als er am 1. Januar h. $3^{13}$ p. lesend in seinem Zimmer sass, durch eine eigenthümliche Bewegung des Bodens erschreckt wurde. Sämmtliche Gegenstände im Zimmer schienen ihm eine Bewegung gegen W. und eine kleine Senkung zu machen, wobei ein leises Knirschen an der Zimmerdecke hörbar wurde und ein feiner Kalkstaub in geringer Menge zu

Boden fiel. Ein an die Wand gelehnter Stock fiel um. Etwa eine Sekunde nach dieser Erschütterung machte sich ein dumpfes dem Geräusch eines schnell vorüberfahrenden beladenen Wagens vergleichbares Rollen hörbar. Das Ereigniss mag 2 $^1/_2$ Sekunden angedauert haben.

Herr A. Kiendl, der Vorstand der Distriktsschnitzerschule gab an, dass diese Bewegung des Hauses mit der Erschütterung bei einem heftigen Sturme sich hätte vergleichen lassen. Zugleich hörte auch er ein Klirren der im Zimmer aufgestellten Nippsachen. Ueber das gleiche Ereigniss berichtete Herr Dr. Erdt telegraphisch, dass an gleichem Tage um h. $3^{15}$ p. in vier verschiedenen Wohnungen eine leichte Erderschütterung beobachtet worden sei.

**1896.**

Von Reichenhall wird gemeldet, dass am 15. September Früh 7 Uhr einige, 3—4 Sekunden andauernde, senkrecht gerichtete Erdstösse von solcher Stärke gespürt wurden, dass die Schläfer aufgeweckt wurden.

## II. Erdbeben im Jahre 1897.

Im Jahre 1897 ereigneten sich in zwei Landstrichen Bayerns Erdbeben; im Anfang des Jahres im Bayerischen Walde und gegen Ende des Jahres im Fichtelgebirgsgebiete.

Ueber das erstgenannte Erdbeben am 5. Januar liegen sehr zahlreiche Einzelberichte vor, welche mir der Herr Vorstand der b. meteorologischen Centralstation in München Dr. Erk mitzutheilen die Güte hatte. Es sind folgende:

Von Herrn Fabrikbesitzer Menzel in Elsenthal bei Grafenau (Bayer. Wald) wird berichtet, dass am Morgen des 5. Januars etwa um h. 7 $^1/_2$ ein Brausen ähnlich dem Geräusche einer Dreschmaschine gehört wurde, welchem am Ende ein kräftiger Erdstoss folgte. Bei letzterem klirrten die Fenster und zitterten die Lampen. In der Fabrik hielt man die Erschütterung zuerst für die Folge einer Explosion eines Kochgefässes. Die Witterung war trübe; doch hellte sich sofort nach dem Ereigniss der Himmel auf.

Von Finsterau kam die telegraphische Meldung vom Herrn Förster Lautenschlager, dass an gleichem Tage Morgens 8 Uhr ein Erdbeben stattgefunden habe.

Aus Grafenau wird von Herrn Dr. Späth, k. Bezirksarzt, gemeldet, dass an gleichem Tage Morgens 7 Uhr 50 Minuten ein 10 Sekunden andauernder, von N. nach S. gerichteter Erdstoss verspürt wurde, wobei Fensterklirren, Bodenschwankungen und starkes Rollengeräusch sich wahrnehmen liess. Der Barometer zeigte nachher steigende Tendenz. Schon in der vorausgehenden Nacht machte sich vorübergehend ein leises, donnerähnliches Geräusch bemerkbar.

In Wolfstein (bei Freyung i. W.) trat nach einer Mittheilung des Herrn Forstmeisters Seidenschwanz an gleichem Tage Morgens 7 Uhr 58 Minuten eine erdbebenartige, 5—6 Sekunden andauernde Erschütterung nach einem vorausgegangenen 2—3 Sekunden langen Sausen ein.

In Grammertshof bei Untergriesbach ereignete sich an diesem Tage Morgens 7 Uhr 45 Minuten ein von SO. nach NW. gerichtetes Erdbeben, das mit donnerähnlichem $^1/_2$ Minute andauerndem Geräusch verbunden war (Richtsfeld).

In Untergrainet und Umgegend wurde von dem Herrn Lehrer Bothschafter am genannten Tage Früh h. $7^{45}$ eine 5 Sekunden andauernde Erderschütterung mit heftigem unterirdischen Donnern beobachtet. Thüren sprangen auf, einzelne schadhafte Kamine stürzten z. Th. ein, Fenster klirrten, gezimmerte Häuser krachten in ihren Fugen, einzelne Brunnen versiechten auf kurze Zeit und lieferten hernach trübes Wasser. Dabei herrschte ein helles, windstilles Wetter. Bemerkenswerth war, dass oft in ein und derselben Ortschaft das Erdbeben theils sehr stark, theils sehr schwach verspürt wurde.

Aus Schönbrunn wird von Herrn Förster Hermann gemeldet, dass daselbst und in der Umgegend unter donnerähnlichem Getöse ein 4 Sekunden andauernder starker Erdstoss in der Richtung von NW. nach SO. verspürt wurde.

In Spiegelau machte sich nach dem von Herrn Forstmeister Blum mitgetheilten Bericht am gleichen Tage Morgens

$7\frac{3}{4}$ Uhr ein auch in der Umgegend wahrgenommener ziemlich heftiger Erdstoss in Begleitung eines unterirdischen Rollens von 5—8 Sekunden Dauer in solcher Heftigkeit bemerkbar, dass die Erschütterung auch in aus Steinen massiv gebauten Gebäuden wahrgenommen wurde. Im Walde wollen Holzhauer mehrere aufeinander folgende Stösse in NW.-Richtung gespürt haben.

Aus Klingenbrunn (830 m Höhenlage) berichtet der Herr Forstmeister Hundertpfund, dass am genannten Tage kurz vor 8 Uhr eine Erderschütterung wahrgenommen wurde. Bei einer um diese Zeit gelesenen Messe wurde plötzlich der Raum der kleinen Kapelle erschüttert, sodass die Fenster klirrten und die Andächtigen beängstigt wurden. Waldarbeitern fiel diese Erschütterung gleichfalls auf. Ihre Richtung konnte nicht genau festgestellt werden, doch scheint sie von SO. nach NW. verlaufen zu sein. Das Barometer war ein klein wenig gefallen, sonst aber das Wetter kalt bei fast völliger Windstille. Der erste Eindruck des Ereignisses war der, dass eine mächtige Schneemasse schwerfällig polternd und das Haus erschütternd sich vom Dache abgelöst hätte.

Aus Buchenau bei Zwiesel theilt Herr von Poschinger mit, dass der Erdstoss vom 5. Januar Morgens etwa um 7 Uhr 50 Minuten daselbst nur schwach verspürt wurde.

Nach diesen Einzelangaben scheint das an sich schwache Erdbeben vom 5. Januar 1897 auf einen relativ kleinen schmalen Strich des Bayerischen Waldes längs der Landesgrenze gegen Böhmen, südöstlich von Zwiesel — Buchenau ausgenommen — sich beschränkt zu haben. Weder von Zwiesel selbst, noch von Regen, Bodenmais oder Passau liegen Erdbebenmeldungen vor. Auch aus Böhmen sind mir nähere Angaben hierüber nicht bekannt geworden. Im Allgemeinen stimmten die Angaben der Zeit des Eintrittes der Erschütterung, welche zwischen $7\frac{3}{4}$ bis kurz vor 8 Uhr Morgens sich ereignete, überein. Bei dem ungleichen und ungenauen Gang der verschiedenen Uhren ist jedoch eine sehr genaue Zeitbestimmung ausgeschlossen. Dies gilt auch von der Dauer des Ereignisses. Nähere Bestimmungen

des Epi- und Hypocentrums, sowie über die Tiefe des Erschütterungsherdes lassen sich desshalb nicht machen. Bezüglich der Stossrichtung herrscht ziemliche Uebereinstimmung von SO. nach NW., was auch mit dem geotektonischen Aufbau des hauptsächlich aus Gneiss bestehenden Gebirgs übereinstimmt. Die Ursache des Erdbebens scheint auf einer ziemlich räumlich beschränkten Auslösung von Spannungen zu beruhen, welche in der Tiefe zwischen verschiedenen Gesteinen sich vorfanden. Das Erdbeben gehört demnach zu den sogen. geotektonischen.

## Das erzgebirgisch-vogtländisch-fichtelgebirgische Erdbeben in den Monaten Oktober und November des Jahres 1897.

Ueber das durch seine lange Dauer ausgezeichnete Erdbeben gegen das Ende des Jahres 1897 liegen zahlreiche, meist Zeitungsberichte vor. Die z. Th. sehr starken Erschütterungen ereigneten sich in den Landstrichen am Südrande des Erzgebirges, im Vogtland und im Fichtelgebirge, welche schon vielfach von Erdbeben heimgesucht worden sind. Sie scheinen der Hauptsache nach den grossen Störungsrichtungen und Gebirgszerklüftungen zu folgen, welche einerseits das Erzgebirge begleiten, andererseits dem Zug des Thüringerwaldsystems entsprechen.

Der Hauptstoss des Erdbebens wurde nach der in der Beilage der Zeitung Bohemia vom 12. November gegebenen Nachricht zum erstenmal am 24. Oktober, namentlich in der Gegend von Graslitz, 30 km NO. von Eger, nahe der sächsischen Grenze am Südrande des Erzgebirges, Nachmittags kurz vor 5 Uhr nach einigen schwachen Stössen in den Morgenstunden beobachtet, wo Herr Dr. Bäuml den in den folgenden Tagen sich wiederholenden seismischen Erscheinungen sachgemässe Aufmerksamkeit widmete. Herr Prof. Dr. Beckl in Prag, Mitglied der österr. Erdbeben-Commission, berichtete hierüber in einer öffentlichen Versammlung in Prag, dass die Erdbeben in Graslitz nicht auf vulkanische Ursachen zurückzuführen seien, in der Nähe gebe es keine Vulkane. Sie gehörten vielmehr den sogen. tektonischen oder Gebirgsbeben an. Solche seien zwar nicht häufig in Böhmen bekannt, jedoch z. B. in den 80er Jahren in

der Gegend von Trautena sehr heftig, dann vor etwa einem Jahre in Katharinaberg und Brüx und im Januar 1897 in Luschmanda und Winterberg verspürt worden. Seit den 70er Jahren seien bei der Erdbeben-Commission in Böhmen über 20 Fälle der Erderschütterungen angemeldet worden; sie seien jedoch alle bisher gefahrlos verlaufen. Auch die Graslitzer Erdbeben hätten keine wahrnehmbaren Spuren der Zerstörung an festen Gegenständen zurückgelassen, seien jedoch von starkem unterirdischen Rollen begleitet gewesen. Von Hof im Fichtelgebirge schreibt man, dass die von Böhmen herüberziehenden Erschütterungen vom 25. und 29. Oktober Abends in Jäger und Göttengrün, nicht aber in Hirschberg und Gefell bemerkt worden seien. Dabei wurde ein Rollen, wie das Geräusch von einem auf der Landstrasse fahrenden Wagen gehört. Auch in diesem Bericht wird die Ursache des Ereignisses auf tektonische Verhältnisse zurückgeführt, welche sich auf Nachstürze im böhmischen Einbruchskessel und Schrumpfung der Erdrinde bezögen.

Aus der Saalegegend wird vom 28. Oktober berichtet, dass an verschiedenen Orten des Fichtelgebirgs die an der deutschböhmischen Grenze bekannt gewordenen Erdstösse auch hier mehr oder weniger verspürt worden seien, während von Plauen die Nachricht kommt, dass im ganzen sächsischen Vogtlande die Erschütterungen, deren Mittelpunkt bei Untersachsenberg liege, fortdauerten. In Asch wiederholten sich die schon am 25. und 26. Oktober aufgetretenen seismischen Erscheinungen in der Frühe am 30. Oktober unter Begleitung eines starken Dröhnens. In Graslitz erneuerten sich am 29. Oktober die Erdstösse mit detonationsartigem Getöse. Besonders acht Stösse waren heftig, sodass die Bevölkerung sehr beunruhigt wurde und einzelne Familien die Stadt verliessen.

Nähere Angaben aus Graslitz verdanken wir den Beobachtungen des Herrn Dr. Bäuml. Darnach wiederholten sich merkliche Stösse am 26. Oktober Abends um h. $6^{26}$, $6^{55}$, $7^{9}$, $9^{11}$. Es folgten dann am 27. Oktober Stösse um h. 5 Nachmittags, $8^{47}$, $8^{49}$, $10^{45}$ Abends, ferner am 28. Oktober Morgens h. $3^{50}$ und $10^{20}$ Abends, ferner am 29. Oktober h. $1^{40}$, $1^{45}$ Nachts,

$4^{20}$ Morgens und währten seit h. $6^{25}$ stärker werdend die ganze Nacht vom 29. auf den 30. Oktober. Ein heftiger Stoss erfolgte Abends h. $7^{45}$, der auch in Bleistadt wahrgenommen wurde. Die Stösse beschränken sich auf den Südrand des Erzgebirges, wo sie in Eibenberg-Grünberg unfern Graslitz ihren Mittelpunkt zu haben scheinen. Weder in Neudeck im Erzgebirge, noch in Karlsberg merkte man von diesen Erscheinungen etwas: während sie auf 15—20 km im Umkreis von Graslitz z. Th. so heftig sich zeigten, dass die Häuser zitterten, die Thüren und Fenster sich bewegten und klirrten, Mörtel von den Wänden fiel, an den Wänden hängende Gegenstände wankten, z. Th. zu Boden stürzten. Meist waren die Stösse, deren man mehr als 14 in dieser Nacht zählte, 4—5 Sekunden dauernd, und von NO. nach SW. gerichtet von dumpfem donnerähnlichen Rollen begleitet.

Während man in dem benachbarten Klingenthal (Sachsen) die früheren Erschütterungen nicht verspürte, machten sie sich an den zuletzt genannten Tagen deutlich bemerkbar.

Von Liebenstein, einem Ort NW. von Eger zwischen dieser Stadt und Asch kam die Nachricht, dass daselbst schon am 25. und 26. Oktober mehrere Erschütterungen sich ereigneten, am 29. Oktober Abends h. $7^{45}$ aber ein besonders starkes Erzittern des Bodens mit einem nach und nach sich verlierenden Rollen und einem leichten Klirren der Fenster bemerkt wurde.

Auch Karlsbad blieb am 29. Oktober nicht verschont, wurde jedoch stärker von dem Erdbeben des 7. November (Morgens vor 5 Uhr) betroffen. Seine Wirkungen erstreckten sich bis gegen Engelhaus hin mit unterirdischem dumpfen Rollen und Bewegungen von NW. nach SO. und Trossau, war jedoch im Ganzen so schwach, dass an keiner der Mineralquellen irgend eine Einwirkung sich weder in der Ergiebigkeit noch in der Temperatur bemerkbar machte. Karlsbad scheint mithin schon an der äussersten Grenze des Erschütterungsgebiets zu liegen.

Diese Erschütterungen vom 7. November sind nun durch ihre Verbreitung und theilweise starke Wirkungen besonders bemerkenswerth. Von Graslitz schreibt man hierüber, dass nach der sehr unruhigen Nacht vom 29. auf den 30. Oktober eine

ziemliche Ruheperiode eingetreten sei, mit nur ganz einzelnen schwachen Aeusserungen am 30. und 31. Oktober; am 4. November jedoch aufs neue stärkere Stösse während des ganzen Tages bemerkt wurden und am 5. Nachts h. $1^{20}$ zwei starke Erschütterungen erfolgten, die auch im benachbarten Sachsen, in Klingenthal, Brambach (hier auch schon am 4.), Schönberg und anderen Orten gespürt wurden. Insbesondere war es die Nacht vom 6. auf den 7. November, in der neben zahlreichen schwächeren Erschütterungen um h. $8^{43}$ ein sehr starker Stoss erfolgte, wobei die Erde zitterte und bebte; dann stellten sich schwächere Erschütterungen ein, bis Morgens h. $5^{10}$ einer der stärksten Stösse, begleitet von langem donnerähnlichen Rollen, sich ereignete. Neben den gewöhnlichen Aeusserungen kam noch hinzu, dass an alten Bauten Sprünge und Risse sich zeigten. Auch Morgens h. $6^{16}$ wiederholte sich der Stoss in ziemlicher Stärke. Man will beobachtet haben, dass die Magnetnadel ziemlich starke Deklinationen zeigte.

An dem gleichen Tage (7. Nov.) wurde Früh Morgens gegen 5 Uhr in Neudeck ein 15 Sekunden anhaltender, von NW. nach SO. gerichteter wellenförmiger Erdstoss unter donnerähnlichem Rollen verspürt. Die Fenster klirrten, die Thüren bewegten sich und viele Gegenstände fielen zu Boden.

In Eger erbebte um h. $4^{55}$ an diesem Tage der Boden 7 Sekunden lang in Begleitung von unterirdischem donnerähnlichen Rollen in der Richtung von O. nach W. Die Schläfer wurden dadurch aufgeweckt. Ein zweiter folgender Stoss war viel schwächer, während der erste als der stärkste bisher in *Eger* wahrgenommen angesehen wurde.

Nachdem in Wildstein schon am 5. November Nachmittags und am 6. Abends h. $8^{40}$ Erdstösse verspürt worden waren, erfolgte am 7. November Früh h. 5 nach vorausgegangenen schwächeren Bewegungen ein heftiger Erdstoss unter donnerähnlichem Rollen, wobei die Bettstätten einige Minuten lang schwankten. Aehnliches wird auch von Neudorf bei Detschau um die gleiche Zeit gemeldet.

Auch in Falkenstein im Vogtlande wurde dieses Ereigniss

Früh h. 5 in zwei aufeinander folgenden heftigen, innerhalb 6 Sekunden stattgefundenen Stössen verspürt.

Sehr bemerkenswerth ist, dass dieses wie es scheint stärkste Erdbeben vom 7. November auch weiter im Westen, innerhalb des Fichtelgebirges, bemerkt wurde. Nachrichten hierüber sind von Konnersreuth bei Waldsassen unfern Eger, dann vom Markt Redwitz, Kirchenlamitz und mehreren anderen Orten des Fichtelgebirges bekannt geworden.

Schwächere Erschütterungen erfolgten am 9. November Nachmittags in Oelsnitz im Vogtlande. Auch Asch und Karlsbad (hier ohne Aenderungen in der Qellenbeschaffenheit) wurden von diesen Bodenbewegungen des 7. ergriffen, die am 10. sich leise wiederholten.

Falkenstein, das auch schon vom Erdbeben am 7. Nov. betroffen wurde, erlitt am 15. November (Nachm. h. $5^{40}$) heftige Erschütterungen. Am 16. wurden in einer grösseren Anzahl Orte im Vogtlande von Bodenbewegungen heimgesucht wie Brambach, Schönberg, Klingenthal, Untersachsenberg, Adorf, Längenfeld, Falkenstein, Reichenbach u. a. O. In Asch wurde an diesem Tage und am 17. und 18. November (früh h. 4) eine schaukelnde Bewegung des Erdreichs wahrgenommen. Dabei liess sich ein unterirdisches, donnerähnliches Getöse hören. Bemerkenswerther Weise wurde in den benachbarten Orten Selb und Rehau keine derartige Bodenbewegung verspürt, und selbst am Kammerbühl, dem basaltischen Kegelberg, zeigte sich keine Erschütterung, während solche in der ganz nahe liegenden Stadt Eger wiederholt beobachtet wurden. Ob damit die Erscheinung in Zusammenhang gebracht werden darf, dass jedesmal nach erfolgtem Stosse starker Nebel sich verbreitete und dass nach länger anhaltendem Frostwetter jetzt warme Witterung, wie im Frühjahr eintrat, ist mehr als zweifelhaft. Thatsache bleibt, dass die Erdstösse zumeist Abends zwischen 8 und 11 Uhr und Morgens früh sich ereigneten. Es dauerten die Erdbeben noch eine Zeit lang, doch seltener und weniger heftig fort. In Falkenstein, in dem früher mehrfach Erschütterungen vorkamen, fanden solche noch am 23. November

Nachmittags kurz vor 4 Uhr unter kurzem donnerähnlichen Getöse und am 24. November in der Saalegegend statt.

Die letzte mir bekannte Nachricht stammt aus Kulmbach und der Umgegend, wo am 29. November bei einem mit einem Schneesturm verbundenen Gewitter früh halb 4 Uhr eine heftige Erderschütterung stattgefunden haben soll. Doch ist dieses Ereigniss als Erdbebenerscheinung nicht ganz sichergestellt. Unzweifelhaft haben diese Bodenerschütterungen einen ganzen Monat, vom 25. Oktober bis 23. November angedauert.

Durch die gütige Vermittlung des Herrn Apothekers Alb. Schmidt in Wunsiedel erhalte ich einige wichtige Nachrichten, für deren Mittheilung ich an dieser Stelle verbindlichst danke. In Wunsiedel selbst hat Herr Schmidt keine Wahrnehmungen über seismische Erscheinungen machen können. Einige von Anderen angegebene Erschütterungen sind unzulässig und nicht wohl zu berücksichtigen. Von Hof erhielt derselbe von Herrn Reallehrer Dr. Angerer die Nachricht, dass daselbst keine Erdbebenerscheinung bemerkt wurde, während in dem nur 7 km von Hof entfernten Orte Feilitsch ein leichter Stoss wahrgenommen wurde.

Durch die gleiche Vermittlung erhielt ich einen Bericht von Dr. med. Castellieni in Frankesbad. Derselbe hat selbst keine Wahrnehmung gemacht, jedoch bemerkt, dass während der Erdbebenperiode weder die Mineralquellen eine Aenderung erlitten haben, noch ein Einfluss auf den Barometerstand sich zeigte. Zuverlässige Männer haben in Frankesbad am 29. Okt. kurz vor 8 Uhr Abends einen kurzen, mässig starken Stoss, dann am 7. November früh 3 Uhr schwache Erschütterungen, die stärksten am 17. November $6^{27}$ Uhr und $7^{55}$ Uhr früh, in Begleitung von unterirdischem Geräusch, Erzittern des Bodens u. s. w. und in der Richtung von N. nach S. oder von NO. nach SW. verspürt.

Schon am 5. November hat Herr Geh.-Rath Dr. Credner in Leipzig[1]) sich über dieses Naturereigniss ausgesprochen.

[1]) Beilage der Allgem. Zeit. vom 6. Nov. Nr. 251.

Nach eingehenden allgemeinen Betrachtungen über die Erdbebenerscheinungen überhaupt kommt er zu dem Schluss, dass das Erdbeben vom Oktober—November 1897 zu dem sog. tektonischen oder Gebirgsbeben gehöre, welche fast jedes Jahr, nur nicht immer in dem Maasse, wie dieses Mal im Vogtlande wiederkehrten und ihren Grund darin hätten, dass in der apodynamischen Tiefe der Erdrinde in Folge der Abkühlung Schrumpfungen der starren Gesteine, Faltungen und Verschiebungen, Stauungen und Verwerfungen nebst Spaltenbildungen stattfinden. Jede solche Verschiebungen seien im Stande einen Stoss oder eine Anzahl von Stössen zu erzeugen, die auf der Oberfläche als Erdbeben empfunden würden. Nun sei das Gebiet des Vogtlandes, das Faltengebirge des Thüringer Waldes zwischen Fichtelgebirge und Erzgebirge, so dicht von solchen Spalten und Verwerfungen, wie keine andere Gegend Deutschlands durchzogen und daher auch sehr häufig von Erdbeben heimgesucht, indem durch die sich unter dem gewaltigen Gebirgsdruck vollziehende Bildung neuer sowie durch die Erweiterung alter Klüfte, ferner durch unterirdische Berstungen und Rutschungen der losgetrennten Gebirgtheile sich solche Erschütterungen häufig ereigneten. Ich stimme mit der Annahme überein, dass das vorliegende Erdbeben in die Reihe der sog. tektonischen gehöre, kann aber nicht annehmen, dass hierbei jetzt die Abkühlung der inneren Wärme der Erde und ein dadurch bewirktes Zusammenziehen der tieferen Gesteinsmassen (Schrumpfungstheorie) eine Rolle spiele. Dagegen spricht schon einfach die Beschränkung des Ereignisses auf einen verhältnissmässig sehr kleinen Raum des Gebirgs. Bei apodynamischen Bewegungen oder Auslösungen von Gesteinsmassen in der Tiefe äussert sich die Erschütterungswirkung an der Erdoberfläche auf weit sich forterstreckenden sog. Stosslinien. Allerdings ist der Südrand des Erzgebirgs von grossen, der Hauptsache nach von NO. nach SW. verlaufenden Brüchen und Spalten vielfach durchzogen, an welchen sich in früherer geologischer Zeit grossartige Absenkungen in den böhmischen Kessel vollzogen haben. Diese Bruchspalten kreuzen sich fast rechtwinkelig mit jenen.

welche in der Richtung des Thüringer Waldes verlaufen und hauptsächlich auf das Vogtland treffen. Beide Bruchzonen, namentlich aber die erstere, wurde in späterer geologischer Zeit von Basalteruptionen benützt, welche auf solchen Spalten sich empordrängten. Dahin gehört namentlich der Basaltzug des böhmischen Mittelgebirgs. Ich halte dafür, dass durch diese Basaltaufbrüche in nicht sehr beträchtlicher Tiefe Zerbröckelungen des Gesteins veranlasst wurden, und nur schwach unterstützte Schollen entstanden von solcher Gleichgewichtslage, dass die geringste Beeinflussung eine Lagerungsänderung derselben bewirken konnte, wie es z. B. selbst durch meteorologische starke Schwankungen möglich ist. Solche hierdurch veranlasste Gesteinsniederbrüche innerhalb verhältnissmässig kleiner Strecken und geringer Tiefe am Südrande des Erzgebirgs und der Kreuzung mit den Fichtelgebirgsklüften scheinen mir diese Erderschütterungen im Monat Oktober und November bewirkt zu haben.

Die Längenerstreckung des Erschütterungsfeldes beträgt, wenn wir Karlsbad ungefähr als nahe an dessen Rande liegend annehmen, bis Wunsiedel im Fichtelgebirge beiläufig 60 km und die Breite von etwa von Eger bis Oelsnitz 45 km. Dabei ist es sehr bemerkenswerth, dass innerhalb dieses Gebiets grosse Striche ganz von diesen seismischen Vorgängen verschont blieben, wie z. B. Bad Elster und dass die innerhalb dieser Landschaft liegenden berühmten Mineralquellen von Karlsbad, Marienbad, Frankensbad während dieser langen Periode weder quantitativ noch qualitativ irgend eine merkliche Aenderung wahrnehmen liessen, wie überhaupt von sonst bei Erdbeben häufig beeinflussten gewöhnlichen Quellen oder Brunnen eine Einwirkung nicht erwähnt wird.

Trotz der häufigen Angaben von dem Eintritt eines Stosses an verschiedenen weiter auseinander liegenden Orten ist über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit kein sicherer Anhaltspunkt zu gewinnen, weil bei der Häufigkeit der aufeinander folgenden Stösse keiner derselben als derselben Erschütterung angehörig erkannt werden konnte. Der Eintritt des wie es scheint hef-

tigsten Stosses vom 7. November wird fast allerorts als gleichzeitig erfolgt angegeben. Im Anfang der Bewegung war der Mittelpunkt des Ereignisses im Osten bei Graslitz, später scheinen die Erschütterungen sich mehr gegen Westen gezogen zu haben und demnach das Erdbeben zu den sogen. fortlaufenden oder springenden zu zählen sein. Die Stösse der letzten Zeit wurden nämlich in Graslitz, Neudeck und Carlsbad viel weniger heftig gespürt als die der ersten Erschütterungsperiode, während sie der Reihe nach in Schönbach, Bleistadt, Haslau, Frankenhammer, Gossengrün, Rothau, Falkenau, Elbogen, Königsberg, Mariakulm und Eger stärker sich bemerkbar machten. Als die südlichsten Orte, aus welchen Nachrichten über dieses Erdbeben bis jetzt bekannt worden sind, können Königswart, Schlaggenwald und Petschau gelten.

Die von Falkenstein im Vogtlande gemeldeten Erdstösse am 25. November kurz vor h. 4 und von Oelsnitz am 25. November h. $2^{48}$ Früh sind nicht absolut sicher festgestellt.

Ebensowenig wie über die Geschwindigkeit der Fortbewegung der Erdbeben, sind aus den Angaben sichere Anhaltspunkte über die übrigen Elemente solcher Erderschütterungen zu gewinnen.

# Koordinaten-Transformationen in geodätischen Dreiecknetzen.

Von **J. H. Franke.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

Die an den Namen des Geodäten und Astronomen Soldner geknüpfte bayerische Landesvermessung war in den ersten Jahrzehnten dieses Jahrhunderts ein vorbildliches Muster und ist es in manchen Beziehungen lange geblieben. Die Einführung rechtwinklig-sphärischer Koordinaten, heute Soldner'sche Koordinaten genannt, bildete einen bedeutsamen wissenschaftlichen Fortschritt, während gleichzeitig die an die Koordinaten geknüpfte Systematik der Landesvermessungsblätter für die geodätische Technik von höchster Bedeutung war.

In der That ist die Soldner'sche Projektion, zu den Cylinderprojektionen gehörig, in vorzüglicher Weise zur bildlichen Darstellung eines Landes geeignet, welches links und rechts von der Vermessungsachse nur eine Ausdehnung von etwa 200 km, also eine Breite von 400 km hat. Sie lässt in dieser Ausdehnung die sphärische anstatt der sphäroidischen Rechnung noch als zulässig erscheinen und hat dabei den Vortheil der geringsten linearen und Flächen-Verzerrung, wenn für mässige Entfernungen von der Vermessungsachse die sphärischen Koordinaten als eben und rechtwinklig, bzw. kongruent angesehen werden. Hier bringen sie dann die wirklichen Längen und Flächen mit der möglichst kleinsten Linear- und Flächenverzerrung zur Darstellung.

Die bayerische Landesvermessung und auch die anderer Länder ist einheitlich, d. h. auf einen Nullpunkt und eine Vermessungsachse koordinirt. Dies bedingt wegen der Querausdehnung des Landes bis zu Ordinaten $\pm$ 180 km die stete Beibehaltung sphärischer Koordinaten, die auch in der Durchführung grundsätzlich erfolgt ist. So zulässig dies auch für die ältere Vermessung erscheint, da diese eine graphische war und mit dem Messtische erfolgte, so vielfach erschwerende Nachtheile hat jene Beibehaltung für die Praxis der modernen Landesvermessung. Diese ist nämlich von der graphischen Aufnahme allgemein zur Zahlenmethode, d. h. zur Theodolitwinkelmessung und zur direkten Längenmessung übergegangen und demnach zur ausgesprochenen trigonometrischen Methode geworden. Die so geänderte Technik in Verbindung mit den gesteigerten Genauigkeitsanforderungen, die sich im Verflusse nahezu eines Jahrhunderts in der Vermessung vollzogen haben, macht eine Weiterbildung des Bestehenden zur gebieterischen Notwendigkeit. Eine gänzliche Umbildung, wie sie in der Einführung der strengen konformen Abbildung (nach Gauss) liegen würde, kann wegen ihres tieferen Eingreifens erst in zweiter Linie in Betracht kommen. Es handelt sich demnach zunächst darum, unter Beibehaltung der Soldner'schen Projektion und der systematischen Vorzüge von dessen einheitlicher Koordinirung zu Koordinatensystemen zu gelangen, welche ihre Brauchbarkeit für die ältere Landesvermessung behalten und doch gleichzeitig den Anforderungen der heutigen trigonometrischen Messungsmethode angepasst sind. Weiter ist dann der etwaige Uebergang zu konformen Koordinaten zu erörtern.

Es dürfte den nachstehenden Entwickelungen zu statten kommen, wenn hier die Grundlagen und Formeln der Soldner'schen Koordinaten kurz vorangestellt werden.

A. Ein durch den Normalpunkt gelegter Vertikalschnitt (gewöhnlich, nicht notwendig, der Meridian jenes Punktes) bildet die Vermessungs- oder Abscissenachse, der auf dieser im Nullpunkte senkrecht stehende Grosskreis die Haupt- oder Direktionsachse (Ordinatenachse). Die Ordinate ($o$) eines Punktes

ist das von demselben auf die Vermessungsachse gefällte Perpendikel; Abscisse ($a$) des Punktes ist das von dem Fusspunkte des Perpendikels und vom Normalpunkte aus gezählte Stück der Vermessungsachse. Die orientirenden Richtungen (Direktionswinkel) der Vertikalschnitte zählen von der Ordinatenrichtung aus im rechtsläufigen Sinne. Die Messblatteintheilung steht mit dem sphärischen Koordinatensystem in genauester Verbindung.

Ist $l$ die normale Länge des (quadratischen) Blattes und $M$ die Massstabsgrösse, so ist die (verjüngte) Blattseite $l\,M$. Die Vermessungsachse sei nördlich und südlich vom Nullpunkte in gleiche Abstände $l\,M$ (Schichten $N$) geteilt; auf den von diesen Punkten ausgehenden Ordinatenkreisen seien von der Vermessungsachse aus die gleichen Abstände $l\,M$ (Reihen oder Nummern $n$) aufgetragen. Hierdurch entsteht ein Netz kleiner, nach Ost und West wegen der Konvergenz der Ordinatenkreise sich stetig in der Höhe verringender Vierecke, welche die Messblätter bilden.

Mit den Hilfsausdrücken

$$m = s \sin \varphi; \quad n = s \cos \varphi; \quad \omega = \frac{1}{\sin 1''}$$

sind die Soldner'schen Linearkoordinaten $a$ und $o$ gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 + m + \frac{m}{2R^2}\left(o_1^2 - \frac{n^2}{3}\right) \\ o_2 &= o_1 + n - \frac{m^2}{2R^2}\left(o_1 + \frac{n}{3}\right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega \cdot m}{R^2}\left(o_1 + \frac{n}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

in welchen die dritten Glieder die sphärischen Ergänzungen

$$(\delta a), \quad (\delta o), \quad (\delta \varphi)$$

darstellen. Für die Polarkoordinaten bestehen mit $(a_2 - a_1) = \Delta a$ und $(o_2 - o_1) = \Delta o$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\Delta a - \frac{\Delta a}{2 R^2}\left(o_1^2 - \frac{(\Delta o)^2}{3}\right)}{\Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2}\left(o_1 + \frac{\Delta o}{3}\right)} \\ s &= \frac{\Delta a - \frac{\Delta a}{2 R^2}\left(o_1^2 - \frac{(\Delta o)^2}{3}\right)}{\sin \varphi} = \frac{\Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2}\left(o_1 + \frac{\Delta o}{3}\right)}{\cos \varphi} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

als erste Näherung (wegen Gleichsetzung von $m$ und $n$ mit $\Delta a$, bzw. $\Delta o$), die indess für alle gewöhnlichen Landesvermessungszwecke ausreicht.

Für die Blatthöhenverkürzung $v_h$ kann die Richtung und Länge $l$ der Blattseite nordsüdlicher Richtung mit dem unter dem Direktionswinkel 90° durch eine Blattecke gelegten Vertikalschnitt identificirt werden. Man hat dann aus der ersten der Gl. (1), mit $o$ die Mittelordinate des Blattes bezeichnend,

$$v_h = \frac{l \cdot o^2}{2 R^2} \quad (3)$$

in natürlichem Masse. Hieraus folgt, da die Blattseiten westöstlicher Richtung definitionsgemäss unverkürzt bleiben, die Flächenverkürzung eines (quadratischen) Blattes

$$v_f = \frac{l^2 \cdot o^2}{2 R^2} \quad (4)$$

Entsprechend der bildlichen Darstellung in der Ebene sind auch die Abscissen der Koordinatenpunkte verkürzt aufzutragen.

Bezeichnet $a_n$ die Abscisse des der Direktionsachse zunächst liegenden Blattrandes, so ist der Abscissenrest $(a - a_n)$ ähnlich Gl. (3) um

$$v_a = \frac{(a - a_n)\, o^2}{2 R^2} \quad (5)$$

zu verkürzen.

Die trigonometrischen Arbeiten sind nach den Gl. (1) und (2) in der Regel durchaus sphärisch geführt worden, in den Planarbeiten der graphischen Aufnahme sind gleichfalls die sphärischen Beziehungen (3) und (5) zur Beachtung gelangt.

während lediglich das $v_f$ der Gl. (4) unbeachtet blieb. Die moderne Landesvermessung hat es mit durchaus anderen Verhältnissen zu thun. Anstatt der früheren 2 bis 3 Koordinatenpunkt-Ordnungen bestehen jetzt 7 bis 8 (5 trigonometrische, 2 polygonometrische und gegebenenfalls 1 geometrische); zugleich ist die Zahl der Koordinatenpunkte um das mehrhundertfache gewachsen. Die Gl. (1) ist in den Punktordnungen I—III, dann IV und V mindestens von $o = 0$ bis 20, bzw. 40 km, in den Ordnungen VI und VII von 60, bzw. 90 km an (hier beschränkt auf das erste Glied der sphärischen Ergänzung) zu beachten. Das Gleiche gilt von $o = 90$ km an für die Gl. (3) und (5), während Gl. (4) durchaus zur Anwendung gelangt. Alle diese technischen Massnahmen sind bedingt durch die gesteigerten Genauigkeitsanforderungen in Verbindung mit der heutigen Plandarstellung in grösserem Massstabe. Die wesentlichste Anforderung besteht nun darin, alle diese sphärischen Beziehungen Gl. (1)—(5) unmittelbar in die Koordinaten aufzunehmen, d. h. diese als eben betrachten zu dürfen, und so durch Vereinfachung und Fehlerquellenverschliessung, insbesondere auch der zahlenmässigen Behandlung geometrischer Minimalgrössen, den technischen Wert und die Genauigkeit der modernen Vermessung zu steigern. Die mathematische Erfüllung jener Anforderung ist an und für sich leicht, kann jedoch durch eine wesentliche Bedingung erschwert werden, die darin besteht, dass die neuen Koordinaten mit geometrisch hinreichender Genauigkeit in den allgemeinen Landesvermessungsblättern der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwendet werden können. (Dieser Fall ist, wie in Bayern, dann vorhanden, wenn keine vollständige Neuvermessung des ganzen Landesgebiets vorliegt.) Offenbar kann diese Bedingung nicht lediglich durch Verkleinerung der neuen Systeme, sondern nur durch eine derartige Lage der neuen Koordinatenachsen erreicht werden, dass der Abweichungswinkel gegen die ursprünglichen Achsen der minimalste wird. Hiermit ist zugleich ausgesprochen, dass die Meridiane der neuen Normalpunkte, wenn der Meridian des Nullpunktes der einheitlichen Koordinirung

Vermessungsachse war, nicht als neue Achsen dienen können, da in unseren Breiten bei 100 km Querabstand die Meridiankonvergenz $> 1^0$ ist.

B. Dementsprechend wird definirt: Die Haupt- oder Direktionsachse des lokalen Systems bildet der bisherige Ordinatenkreis des neuen Nullpunktes $N'$ im ursprünglichen System $U$, die neue Vermessungs- oder Abscissenachse der hiezu senkrechte Vertikalschnitt in $N'$. Abscissen und Ordinaten im neuen Systeme sind ähnlich wie im ursprünglichen Systeme, also als Abschnitte, bzw. Perpendikel der neuen Vermessungsachse definirt. Das System ist demnach wieder ein sphärisches nach Soldner. Es sind die allgemeinen Koordinaten $(a, o)$ eines Punktes $A$ in solche $(x, y)$ des neuen Systems mit dem Nullpunkte $N'$, $(a_0, o_0)$ zu transformiren.

Es bestehen die Grundgleichungen im Systeme $U$

$$\left.\begin{aligned} a - a_0 = \varDelta a = s \sin\varphi + (\delta a) \\ o - o_0 = \varDelta o = s \cos\varphi + (\delta o) \end{aligned}\right\} \qquad (U)$$

und im System $N$

$$\left.\begin{aligned} x = s \sin\varphi + (\delta x) \\ y = s \cos\varphi + (\delta y) \end{aligned}\right\} \qquad (N)$$

wo $s$ der Vertikalschnitt $N' A$.

Durch Einführung von $(U)$ in $(N)$ folgt

$$\left.\begin{aligned} x = \varDelta a + (\delta x) - (\delta a) \\ y = \varDelta o + (\delta y) - (\delta o) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

und da nach Gl. (1)

$$(\delta a) = \frac{m}{2R^2}\left(o^2 - \frac{n^2}{3}\right); \quad (\delta o) = -\frac{m^2}{2R^2}\left(o_0 + \frac{n}{3}\right)$$

$$(\delta x) = \frac{m}{2R^2}\left(y^2 - \frac{n^2}{3}\right); \quad (\delta y) = -\frac{m^2}{2R^2} \cdot \frac{n}{3}$$

ist (letzteres unter Beachtung, dass die Koordinaten des neuen Nullpunktes gleich Null sind), so erhält man

$$(\delta x) - (\delta a) = -\frac{m}{2R^2}(o^2 - y^2)$$

$$(\delta y) - (\delta o) = \frac{m^2}{2R^2} o_0$$

woraus durch Einsetzung in Gl. ($a$)

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{m}{2R^2}(o+y)(o-y) \\ y &= \Delta o + \frac{m^2}{2R^2} o_0 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Mit für weite Grenzen hinreichender Sicherheit gelten die Vereinfachungen $m = \Delta a$, $n = \Delta o$ und $y = (o - o_0)$, daher

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2}\left(o - \frac{o_0}{2}\right) o_0 = \Delta a + \delta \\ y &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2R^2} o_0 \qquad = \Delta o + \delta' \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Dies sind die für vereinfachte tabellarische Behandlung eingerichteten Transformationsformeln. Man leitet aus ihnen die Umkehrungen ab

$$\left.\begin{aligned} a &= (a_0 + x) + \frac{x}{R^2}\left(\frac{o_0}{2} + y\right) o_0 = (a_0 + x) + \delta_1 \\ o &= (o_0 + y) - \frac{x^2}{2R^2} \cdot o_0 \qquad = (o_0 + y) + \delta_1^1 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

die, weil in ihnen $x = \Delta a$ und $y = \Delta o$ gesetzt sind, als erste Näherung gelten. (Die Transformationen (6) sind von mir gelegentlich einer anderen Arbeit bereits 1890 in Nr. 3022 der A. N. abgeleitet worden.)

Es ist noch die Frage der geringsten Achsenkonvergenz[1]) zu erledigen, die hier lediglich hinsichtlich der Konvergenz der neuen Achsen mit den Messblattseiten der einheitlichen Koordi-

---

[1]) Diese Konvergenz erhält man auch ganz kurz durch die dritten der Gl. (1) und (15), nämlich $c'' = -\frac{\omega \cdot m o_0}{R^2} = -\frac{\omega \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}$, wie nachher Gl. (9).

nirung in Betracht kommt. In dieser letzteren Beziehung ist sie ausführlicher zu betrachten.

Die Koordinaten eines quadratförmigen Soldner'schen Blattes im einheitlichen System, hier der Kürze halber $a$ und $o$ positiv genommen, lassen sich ausdrücken durch

| Ecken. | SO. | SW. | NW. | NO. |
|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $a$ | $a+l\cdot M$ | $a+l\cdot M$ |
| | $o$ | $o+l\cdot M$ | $o+l\cdot M$ | $o.$ |

Im lokalen Systeme vermöge (7) durch

$$\left.\begin{array}{lll} & \text{SO.} & \text{SW.} \\ \delta: & -\frac{\Delta a}{R^2}\left(o-\frac{o_0}{2}\right)o_0 & -\frac{\Delta a}{R^2}\left((o+lM)-\frac{o_0}{2}\right)o_0 \\ \delta': & \frac{(\Delta a)^2}{2R^2}o_0 & \frac{(\Delta a)^2}{2R^2}o_0 \\ & \text{NW.} & \text{NO.} \\ \delta: & -\frac{(\Delta a+lM)}{R^2}\left((o+lM)-\frac{o_0}{2}\right)o_0 & -\frac{(\Delta a+lM)}{R^2}\left(o-\frac{o_0}{2}\right)o_0 \\ \delta': & \frac{(\Delta a+lM)^2}{2R^2}o_0 & \frac{(\Delta a+lM)^2}{2R^2}o_0 \end{array}\right\}\text{(b)}$$

Die Subtraktion gibt unter Abwerfung der zu vernachlässigenden Glieder $\frac{lM}{R^2}$ und $\frac{(lM)^2}{2R^2}$ sowie Uebergang zu natürlichem Masse durch Division mit der Massstabsgrösse $M$ die lineare Divergenz $c = \delta_{SO.} - \delta_{SW.} = \delta_{NO.} - \delta_{NW.}$, dann $\delta'_{NO.} - \delta'_{SO.} = \delta'_{NW.} - \delta'_{SW.}$ der älteren Blattseitenrichtungen mit den neuen Koordinatenachsen für die Blattlänge $l$

$$c = -\frac{\Delta a \cdot l \cdot o_0}{R^2} \tag{9}$$

Denkt man sich die Mitten der Seiten eines identischen Blattes, einmal mit lokalen, dann mit allgemeinen Koordinaten konstruirt, zur Deckung gebracht, so wird die ganze Konver-

genz zur Hälfte mit + und — auf die 4 Blattecken geworfen, so dass für diese der Ausdruck besteht

$$c_e = \pm \frac{\varDelta a \cdot l \cdot o_0}{2 R^2} \tag{10}$$

Der lineare Wert von $c_e$ kann nicht höher als 0,05 mm, die äusserste Anfangsgrenze der geometrischen Darstellbarkeit, angenommen werden; hiernach sind $\varDelta a$ und $o_0$ durch die Gleichung

$$0{,}0001\, R^2 = l \cdot \varDelta a \cdot o_0 \tag{11}$$

verbunden.

In ähnlicher Weise leiten sich die Blattabmessungen ab. Man findet aus den vorhin benützten Gl. (b) erst für die östlichen und westlichen, dann für die südlichen und nördlichen Blattseiten, wieder unter Abwerfung von $\frac{(l \cdot M)^2}{R^2}$, die Näherungsausdrücke

$$\left.\begin{aligned} v_l &= \delta_{\text{NO.}} - \delta_{\text{SO.}} = \delta_{\text{NW.}} - \delta_{\text{SW.}} = l \cdot \frac{(2\,o - o_0)}{2 R^2}\, o_0 \\ v_l' &= \delta'_{\text{SW.}} - \delta'_{\text{SO.}} = \delta'_{\text{NW.}} - \delta'_{\text{NO.}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Dasselbe Blatt hat in lokalen Koordinaten, die ja gleichfalls sphärische sind, wieder eine Verkürzung der Blattlängen in der Abscissenrichtung, die ähnlich wie (3), wenn wie hinreichend $y = (o - o_0)$ gesetzt wird,

$$v_t = \frac{l \cdot y^2}{2 R^2} = \frac{l \cdot (o - o_0)^2}{2 R^2} \tag{13}$$

beträgt, während definitionsgemäss und wie oben die Blattlängen in der Ordinatenrichtung ungeändert bleiben. Die Addition gibt

$$v_l + v_t = \frac{l}{2 R^2}\left((2\,o - o_0)\, o_0 + (o - o_0)^2\right) = \frac{l \cdot o^2}{2 R^2} \tag{14}$$

Das ist also die thatsächliche Blattverkürzung $v_h$ der Gl. (3). (Dass das hier gebrauchte $o$ gegen das dort benützte eigentlich $\left(o - \frac{l}{2}\right)$, ist für die Differentialformel (14) ohne Belang).

Der Zweck der transformirten Koordinaten $x, y$ besteht darin, sie innerhalb gewisser Ausdehnungsgrenzen als ebene Koordinaten betrachten zu können, demnach von den strengen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + m + \frac{m}{2R^2}\left(y_2^2 - \frac{n^2}{3}\right) \\ y_2 &= y_1 + n - \frac{m^2}{2R^2}\left(y_1 + \frac{n}{3}\right) \\ \varphi_2 &= 180 + \varphi_1 + \frac{\omega m}{R^2}\left(y_1 + \frac{n}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

zu den genäherten

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + m \\ y_2 &= y_1 + n \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

übergehen zu können. Hierfür ist das Maximum der Ordinate $y$ massgebend. Die Genauigkeitsanforderungen können verschiedene sein und bemessen sich nach der Grösse der linearen $(v)$ und der Richtungsverzerrung $(v')$ bei der Abbildung in der Ebene. Diese sind im Soldner'schen Systeme wie bekannt und auch leicht zu finden

$$\left.\begin{aligned} 1+v &= 1+\frac{(\delta a)\sin\varphi+(\delta o)\cos\varphi}{s} = 1+\frac{\sin^2\varphi}{6R^2}(o_1^2+o_1 o_2+o_2^2)^{1)} \\ v' &= \frac{(\delta a)\cos\varphi-(\delta o)\sin\varphi}{s} \\ &= \frac{a_2-a_1}{6R^2}(2\,o_1+o_2)+\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{6R^2}(o_1^2+o_1 o_2+o_2^2) \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Somit hat die lineare Verzerrung ihr Maximum in der Abscissenrichtung, die Richtungsverzerrung im Oktanten.

Die numerische Auswertung gibt hiefür bei $y = \pm 40$ km und bei $s = 7$ km.

$$\text{Max. } l_v = 1 : 50\,000; \ \text{Max. } r_v = 3'' \qquad (18)$$

Hiernach bestimmen sich die Querausdehnungen lokaler Systeme und damit auch deren Nullpunktsordinate $o_0$ durch das

---

[1]) Für $o_1 = o_2$ wird $1 + v = 1 + \frac{o^2}{2R^2}\sin^2\varphi$.

zulässige Max. von $y$. Die Ausdehnung in der Abscissenrichtung ($x$) könnte über 200 km steigen, wenn nicht gegebenenfalls die wichtigen Gleichungen (10), bzw. (11) beständen. Mit $l = 0{,}5$ m, dann $y = \pm 40$ km wird zunächst erhalten für $o_0 = \pm 80$ km, sodann für $o_0 = \pm 160$ km, nach Gl. (11)

$$\Delta a = 102 \text{ km, bzw. } 51 \text{ km.}$$

Das Ergebniss der vorstehenden Darlegung ist sonach:

Werden die sphärischen Koordinaten der einheitlich koordinirten Dreieckspunkte höherer Ordnung eines Soldner'schen Netzes mittels der Gl. (7) auf neue Koordinatenachsen derart, wie sie Seite 24 definirt sind, transformirt, so erhält man wieder ein System rechtwinklig-sphärischer Koordinaten. Man kann diese transformirten Koordinaten innerhalb gewisser, aus (17) abzuleitender Genauigkeitsgrenzen als ebene betrachten und sodann mit den einfachen Formeln (16) weiter rechnen. Nach den in (18) gegebenen numerischen Auswertungen ist dies vom Dreiecknetz III. Ordnung abwärts an bei $y = \pm 40$ km zulässig mit einer linearen Genauigkeit 1:50000 und einer maximalen Richtungsverzerrung von 3″. Zugleich geben bis zu dieser Grenze $y = \pm 40$ km die ebenen Koordinaten das Landesvermessungsblatt der einheitlichen Koordinirung wieder mit einer Abscissenverzerrung im Maximum von 1:50000, was gleicherweise für die aufzutragenden Abscissenreste gilt. Vermöge der Gl. (11) und der obigen numerischen Auswertung lassen sich die transformirten Koordinaten als ebene gleich den einheitlich sphärischen Koordinaten innerhalb der Werte $y = \pm 40$ km und $\Delta a = x = \pm 102$, bzw. 51 km bei $o_0 = \pm 80$, bzw. 160 km bis zu einer Maximaldifferenz von 0,05 mm für alle Planarbeiten im einheitlichen Blattsystem der Landesvermessung unmittelbar verwenden.

Hienach sind durch die transformirten (ebenen) Koordinaten die sämmtlichen (trigonometrische wie geometrische) sphärischen Beziehungen der Gl. (1)—(5) innerhalb technisch zulässiger Grenzen zahlenmässig in diese Koordinaten aufgenommen.

C. Die bisher behandelte Soldner'sche (kongruente) Projektion ist neuerer Zeit durch eine konforme Abbildung (nach Gauss), in welcher Original und Abbildung in den kleinsten Teilen ähnlich sind, hie und da ersetzt worden. Von Herrn General Schreiber wurde sie in modificirter Form als konforme Doppelprojektion der preussischen Landesaufnahme zu Grunde gelegt, und neuerdings durch Herrn Jordan in der Mecklenburgischen Landesvermessung theoretisch und praktisch weiter entwickelt. Ihr eignen gewisse principielle Vorzüge, besonders auch für die einheitliche Projektion eines sehr grossen Landesgebiets. Indessen hat schon 1876 Herr Helmert darauf hingewiesen, dass die konformen Koordinaten ihren grossen Wert auch in der allgemeinen Landesvermessung haben. Zwar ist ihre absolute Flächenverzerrung nahezu doppelt so gross als die Soldner'sche, dafür jedoch nach allen Richtungen gleichmässig und gleichzeitig werden die Richtungsverzerrungen so gering, dass in weit grösserer Ausdehnung die ebene Triangulirung zulässig erscheint.

Seien $\xi$, $\eta$ die rechtwinklig-konformen Koordinaten, so hat man die wichtigen, unseres Wissens zuerst von Herrn Helmert aufgestellten Vergleichungen zwischen kongruenten und konformen Koordinaten, die allen hier zu machenden Anwendungen zu Grunde liegen, nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi &= a \\ \eta &= o\left(1 + \frac{o^2}{6\,R^2} + \frac{o^4}{24\,R^4}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

wobei für eine sphärische Rechnung bis zu $o < 200$ km das Glied vierter Ordnung vernachlässigt werden kann. Innerhalb dieser Grenze sind dann die vorigen Verzerrungen (17) nunmehr

$$\left.\begin{aligned} 1+V &= 1+\frac{(\delta a)\sin\varphi+(\delta o)\cos\varphi}{s}+\frac{(o_2^3-o_1^3)}{6R^2 s}\cos\varphi = 1+\frac{(o_1^2+o_1 o_2+o_2^2)\text{[1]}}{6R^2} \\ \varphi''-\varphi = V' &= \frac{(\delta a)\cos\varphi-(\delta o)\sin\varphi}{s}-\frac{(o_2^3-o_1^3)}{6R^2 s}\sin\varphi = \frac{a_2-a_1}{6R^2}(2o_1+o_2) \end{aligned}\right\} (20)$$

Deren Vergleichung mit den (17) zeigt die principiell und technisch gleich wertvolle gleichmässige Linearverzerrung bei Gauss, während die Richtungsverzerrung nur aus dem ersten Soldner'schen Gliede besteht. Die erstere ist dem Maximum von Soldner gleich, die zweite dagegen erheblich niedriger. Diese ist für $y = 90$ km und $s = 7$ km in der Oktantenrichtung hier 1″, 2, für Soldner jedoch 12″, demnach bei der Konformität weit günstiger. Dagegen hat allerdings die Flächenverzerrung, die nach (4) und (17) bei Soldner vermöge der linearen Beziehung $s' = s\left(1+\frac{f(o)}{R^2}\sin^2\varphi\right)$ im durchschnittlichen Mittel $\frac{s^2\cdot o^2}{2R^2}$ beträgt, hier den konstanten Wert $\frac{s^2\cdot o^2}{R^2}$.

Es liegt nahe, dass die älteren graphischen Aufnahmen in den möglichst kleinsten linearen und damit Flächenverzerrungen das wesentlichste Moment erblicken mussten. Mit demselben Rechte kann aber die auf Winkelmessungen sich aufbauende moderne Vermessung, wie schon von Früheren hervorgehoben, das Hauptgewicht auf die geringere Richtungsverzerrung legen; das umsomehr, als die erhöhte mittlere Flächenverzerrung noch innerhalb technisch zulässiger Grenzen bleibt und die linearen Maxima in beiden Systemen die gleichen sind. Ueberdem könnte erstere auch einschliesslich der Reduktion vom Projektions-Horizont auf das thatsächliche Vermessungsniveau in einfachster Weise bei den Schlussflächen berücksichtigt werden.

Innerhalb der oben angegebenen Grenzen lassen sich demnach mittels der Gl. (19) kongruente in konforme Koordinaten überführen. Soll jedoch vom Netze III. Ordnung abwärts an die ebene Triangulirungsberechnung, bzw. die Gleichsetzung der geodätischen mit den ebenen Dimensionen möglich werden,

[1]) Für $o_1 = o_2$ wird $1+V = 1+\frac{o^2}{2R^2}$.

so kann dies bei grösserer Ausdehnung des einheitlichen Netzes zum Aufgeben der bisherigen einen Vermessungsachse, also zur Anlegung besonderer Kleinsysteme nötigen, in denen die Ordinaten höchstens bis 80 oder 90 km gehen, wobei das Maximum der linearen Verzerrung etwa 1 : 10 000 ist. Die Wahl der lokalen Vermessungsachsen unterliegt keiner mathematischen Beschränkung, selbst wenn die Beibehaltung der geometrischen Abschlussgrenzen der älteren Landesvermessungsblätter dabei Bedingung wäre. Nur würde es sich bei grösserer Konvergenz der lokalen Achsen mit der Richtung der ursprünglichen Vermessungsachse um umständlichere Transformationsarbeit sowie darum handeln, dass die neuen Achsenrichtungen mit den Blatträndern stärker und geometrisch merkbar divergirten. Das wären indess keine mathematischen, sondern lediglich technische Hemmnisse.

Einschneidender ist die bereits in Theil B erörterte, nicht bloss angenommene, sondern thatsächlich bestehende Bedingung, dass die neuen Koordinaten für die älteren Landesvermessungsblätter unmittelbar benützbar bleiben sollen. Das schränkt nicht nur die den neuen Systemen zu gebenden Abmessungen ein, sondern bedingt auch die Definition der neuen Achsen behufs Herbeiführung der geringst möglichsten Achsenkonvergenz. Die Erfüllung dieser Bedingung zwingt daher vermöge der Gl. (10) und (11) wieder dazu, den älteren Ordinatenkreis und dessen Perpendikel im neuen Nullpunkte zu Achsen zu nehmen. Vermittels der Transformationen (6) und (7) gelangt man zu neuen rechtwinklig-sphärischen Koordinaten, die nach den Gl. (19) in rechtwinklig konforme übergeführt werden. Diese beiden Transformationen würden dann zweckmässig in eine verbunden. Sind $\xi$, $\eta$ die konformen Koordinaten, $a_0$, $o_0$ die des neuen Nullpunktes, so ist nach (19)

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y\left(1 + \frac{y^2}{6R^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

sodann mit Berücksichtigung von (7) unter Weglassung der Glieder höherer Ordnung als der zweiten

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \Delta a - \frac{\Delta a}{R^2}\left(o - \frac{o_0}{2}\right) o_0 = \Delta a + (\delta) \\ \eta &= \Delta o + \frac{(\Delta a)^2}{2 R^2} o_0 + \frac{(\Delta o)^3}{6 R^2} = \Delta o + (\delta') \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

denen die Zurückführungsformeln entsprechen

$$\left.\begin{aligned} a &= (a_0 + \xi) + \frac{\xi}{R^2}\left(\frac{o_0}{2} + \eta\right) o_0 \\ o &= (o_0 + \eta) - \frac{\xi^2}{2 R^2} o_0 - \frac{(\Delta o)^3}{6 R^2} \end{aligned}\right\} \qquad (22\text{a})$$

Diese Transformationen sind demnach nur um Weniges umständlicher als die (7) und gleich diesen leicht tabellarisch einzurichten. Eine sofort anzustellende Untersuchung ergibt, dass die Blattrichtungsdivergenz hier nur um zu vernachlässigende Glieder vierter Ordnung von der bei (9) entwickelten abweicht und daher wieder die Gleichungen bestehen.

$$c = -\frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{R^2}; \qquad c_e = \pm \frac{l \cdot \Delta a \cdot o_0}{2 R^2} \qquad (22\text{b})$$

und für $c_e = 0{,}05$ mm

$$0{,}0001\, R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o_0 \qquad (22\text{c})$$

Die Blattseitenlängen in der Abscissenrichtung sind hier, wie sich aus der Diskussion der Gl. (14) in Verbindung mit dem Konformitätsprincip ergibt, gleich $l\left(1 - \frac{(2 o - o_0) o_0}{2 R^2} + \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2}\right)$, demnach in konformen Koordinaten ausgedrückt, um $\frac{l \cdot (\Delta o)^2}{2 R^2}$ vergrössert, während auch die im vorigen Systeme unverändert gebliebenen Blattseiten in der Ordinatenrichtung hier ebenfalls um

$$v_l = \frac{(\Delta o_2)^3 - (\Delta o_1)^3}{6 R^2} = l \cdot \frac{(\Delta o)^2}{2 R^2}$$

vergrössert erscheinen. Das Verhältniss $\frac{v_l}{l}$ ist für $o = \pm 90$ km noch 1 : 10 000 und gibt somit kein Hinderniss ab, die trigono-

metrischen und geometrischen Arbeiten der Landesvermessung vom Netze III. Ordnung abwärts an durchaus in der Ebene zu führen.

Die gewonnenen Ergebnisse lassen sich dahin aussprechen:

Wenn die Linear-Koordinaten (mit $a$ und $o < 200$ km) einer einheitlich sphärischen Koordinirung in konforme übergeführt werden sollen und dabei die Bedingungen bestehen, dass sodann: 1) die sämmtlichen trigonometrischen und geometrischen Arbeiten innerhalb entsprechenden Vernachlässigungsgrenzen in der Ebene zu führen sind, und 2) die neuen Koordinaten ohne technische Schwierigkeiten nicht nur die alten Landesvermessungsblätter wiedergeben, sondern auch für Planarbeiten in diesen unmittelbar als ebene Koordinaten benützbar seien, so führt der einfachste Weg hierzu nur über transformirte (lokale) Koordinaten. Das entsprechende Mittel zu diesem Zwecke liegt dann lediglich in der passenden Wahl der neuen Koordinatenachsen unter veranlasster Begrenzung der lokalen Systeme.

Der Hauptzweck aller dieser Transformationen bestand in dem Wegbringen der sphärischen Beziehungen, bzw. deren unmittelbare Aufnahme in die Koordinaten. Es wird dies gleichermassen erreicht durch transformirte Soldner'sche oder konforme Koordinaten. In theoretischer Beziehung bleiben nach diesen Ueberführungen die bekannten Mängel und Vorzüge beider Koordinatenarten bestehen: Die grössere Richtungsverzerrung und die ungleichmässige Linearverzerrung mit mittlerer geringerer Verzerrung der Flächen bei Soldner, während das Gegenteil für die Konformität gilt. Eine graphische Aufnahme wird sich für das erstere entscheiden können, während der Zahlenmethode der modernen Landesvermessung zumeist die geringere Richtungsverzerrung im Vereine mit der (differentiellen) Gleichmässigkeit der Linearverzerrung als wichtigste Bedingung gilt. Indess kann man sich in einem vorliegenden Kongruenzsystem principiell für die Beibehaltung kongruenter Koordinaten ent-

scheiden, wenn denselben wie hier eine Einrichtung gegeben wird, dass sie technisch als ebene Koordinaten betrachtet werden können und zugleich in den Plänen der einheitlichen Koordinirung unmittelbar verwertbar sind.

D. Es genügt wohl, nur kurz daran zu erinnern, dass durch die Transformationen (7) und (22) wieder sphärische Koordinaten $(x, y)$, bzw. konforme $(\xi, \eta)$ gewonnen werden. Zufolge dessen kommt diesen derselbe Anwendungskreis zu, als den ursprünglichen Koordinaten $a$, $o$; sie müssen demnach sämtlich gleichzeitig $< 200$ km bleiben. Die Bedingung $y < 40$ km oder $\eta < 90$ km gründet sich nur auf die Absicht, innerhalb zulässiger Grenzen mit durchaus ebenen Koordinaten arbeiten zu wollen, und ebenso bezieht sich die in der Gleichung $0{,}0001\, R^2 = l \cdot \Delta a \cdot o$ gegebene Einschränkung der zulässigen Ausdehnung von $\Delta a$ lediglich auf die unmittelbare Verwertung der neuen Koordinaten in den Messblättern der ursprünglichen (einheitlichen) Koordinirung. Könnte man hiervon absehen, so würde man mit den transformirten $(x\, y)$, bzw. $(\xi\, \eta)$ in den angegebenen Grenzen (200 km) die bekannte sphärische Koordinatenberechnung haben, wie sie im Soldner'schen Systeme durch die Gl. (1) und (15) ausgedrückt ist. Für die Konformität pflegt man allerdings bei der Neuanlage einer umfassenden Landesvermessung einen ganz anderen Weg einzuschlagen, gegründet auf sphäroidische Beziehungen, bzw. geographische Positionen, in Form von Uebertragungen zwischen Ellipsoid oder Kugel und Ebene. Wenn jedoch in einem sphärischen Netze unter Beibehaltung der bisherigen Hauptachse vermittels der Beziehung $\eta = o\left(1 + \frac{o^2}{6R^2}\right)$ von bereits bestehenden Soldner'schen Koordinaten zu konformen übergegangen worden wäre, so liegt es nahe, die Form der Soldner'schen Berechnungsweise im Wesentlichen beizubehalten, d. h. direkt auf der Kugel zu rechnen. Hierfür kann noch ein weiterer Grund sprechen, wenn nämlich die sphärischen Ergänzungen nicht logarithmisch gerechnet, sondern bezüglichen Diagrammen entnommen werden, wie es z. B. im bayerischen Dreiecksnetze zumeist geschieht.

Man kann daher die sphärischen Berechnungsformeln für die konformen Koordinaten den Gl. (1) und (15) anpassen, wobei man in leichter Ableitung erhält:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_2 &= \xi_1 + m + \frac{m}{2R^2}\left(\eta_1^2 - \frac{n^2}{3}\right) \\
\eta_2 &= \eta_1 + n + \frac{n}{2R^2}\left(\eta_1 + \frac{n}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{2R^2}\left(\eta_1 + \frac{n}{3}\right) + \frac{n^3}{24R^2} \\
(\varphi_2) &= (\varphi_1) + 180 + \frac{m}{R^2}\left(\eta_1 + \frac{n}{2}\right)
\end{aligned}\right\} \text{(y)}$$

In einem bereits bestehenden Landesnetze mit rechtwinklig konformen Koordinaten würden diese Ausdrücke nur für einzelne, neu einzuschaltende Punkte I. oder II. Ordnung zur Anwendung gelangen, soweit hierbei sphärische anstatt sphäroidische Rechnung und Einschränkung auf Glieder zweiter Ordnung zulässig ist. Hierfür reichen die Formeln aus und gestatten mit Hilfe jener Diagramme besonders bei den Netzpunkten II. Ordnung erleichterte Rechnung, da das dritte Glied $\frac{n^3}{24R^2}$ noch für $n = 17$ km $< 0{,}005$ m bleibt. Für die sämtlichen geodätischen Arbeiten vom Netze III. Ordnung abwärts an sind aber diese Formeln ebenso, wie vorher für die Soldner'schen Gl. (1) nachgewiesen, technisch unpraktikabel, weshalb hier gleichfalls zur Gewinnung ebener Koordinaten lokale Systeme und Transformationen entsprechend den Gl. (22) geboten sind.

# Ueber gewisse Umkehrprobleme aus der Theorie der elliptischen Integrale.

Von F. Lindemann.

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

Die folgenden Erörterungen sind veranlasst durch den Versuch, die Formeln für die Bewegung eines Planeten um die Sonne durch Grenzübergang aus denjenigen Gleichungen zu gewinnen, welche für einen von zwei festen Centren nach dem Newton'schen Gesetze angezogenen Punkt gültig sind. Es ergab sich, dass dieser Grenzübergang nicht so einfach auszuführen ist, wie man erwarten mochte; durch Anwendung der Formeln für die Additionstheoreme der elliptischen Functionen und Integrale liessen sich die gebräuchlichen Formeln herstellen. Für die Theorie dieser Integrale folgte hieraus das vielleicht bemerkenswerthe Resultat, dass ein gewisses Umkehrproblem sich auf die bekannte Kepler'sche Gleichung reduciren lässt. Für die Theorie der Kegelschnitte ist es von Interesse, dass sich die Gleichungen von Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkte durch Summen von elliptischen Integralen mit verschiedenen Modul darstellen lassen; und hieraus wieder findet man die geometrische Deutung und die Lösung für ein Umkehrproblem, bei dem zwei Summen von zwei elliptischen Integralen mit verschiedenem Modul (aber mit zwei gemeinsamen kritischen Punkten) gegeben sind und die beiden oberen Grenzen als Functionen der Summen zu bestimmen sind.

## § 1. Das erweiterte Umkehrproblem für elliptische Integrale in verallgemeinerter Form.

Wir bezeichnen mit $u$ und $v$ zwei elliptische Integrale erster Gattung:

$$(1)\qquad u=\int_0^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)}},\quad v=\int_0^\eta \frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-\varkappa^2\eta^2)}}$$

Ist dann die Summe

$$(2)\qquad u+v=w$$

gegeben, so sind die oberen Grenzen $\xi$, $\eta$ nach dem sogenannten erweiterten Umkehrproblem von Clebsch und Gordan bestimmt,[1]) falls ausserdem noch die Summe der entsprechenden Integrale dritter oder zweiter Gattung (genommen in Riemann's Sinne) gegeben vorliegt. Ist aber die entsprechende Summe von Legendre'schen Integralen dritter Gattung gegeben, so ist jenes erweiterte Umkehrproblem nicht anwendbar, da sich diese Integrale als Summen von Riemann'schen Integralen zweiter und dritter Gattung darstellen. Wir benutzen die Jacobi'sche Bezeichnungsweise (wie sie z. B. auch von Durège angewandt wird) und setzen

$$(3)\qquad \Pi(u,a)=\int_0^u \frac{\varkappa^2\cdot \operatorname{sn}a\cdot\operatorname{cn}a\cdot\operatorname{dn}a}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2a\cdot\operatorname{sn}^2u}\,du=u\,Z(a)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

$$(4)\qquad Z(a)=\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}=\frac{J}{K}u-\int_0^u \varkappa^2\operatorname{sn}^2u\cdot du,$$

wo mit $J$ und $K$ die bekannten ganzen elliptischen Integrale zweiter und erster Gattung bezeichnet sind.

---

[1]) Vgl. für elliptische Integrale, für welche Rosenhain schon den einfachsten Fall gelöst hatte, besonders Clebsch, Ueber diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen, Crelle's Journal Bd. 64.

Seien nun $A$ und $B$ Constante und sollen aus der Gleichung (2) und aus der Gleichung

$$(5) \qquad A\,\Pi(u, a) + B\,Z(u) + A\,\Pi(v, a) + B\,Z(v) = w'$$

die oberen Grenzen $\xi$, $\eta$ als Functionen von $w$ und $w'$ bestimmt werden, so kann die Aufgabe mit Hülfe der Additionstheoreme in folgender Weise umgeformt werden. Es ist

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\Pi(u, a) + \Pi(v, a) \\ &= \Pi(u+v, a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v-a)}{1 + \varkappa^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v+a)} \end{aligned}$$

$$(7) \qquad Z(u) + Z(v) = Z(u+v) + \varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn}(u+v).$$

In Folge dessen erhalten wir aus (5) und (1)

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\frac{A}{2}\log\frac{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn}(w-a)}{1 + \varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn}(w+a)} + B\varkappa^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{sn} v \cdot \operatorname{sn} w \\ &= w' - A\,\Pi(w, a) - B\,Z(w). \end{aligned}$$

Die rechte Seite enthält jetzt nur gegebene Grössen; zur Berechnung der Unbekannten $u$ und $v$ haben wir also eine transscendente Gleichung für das Product $\operatorname{sn} u$ $\operatorname{sn} v$ vor uns. Ist $A = 0$, so wird dieselbe algebraisch, und wir haben das erweiterte Umkehrproblem für die Integrale zweiter Gattung. Der Fall $B = 0$ gibt das entsprechende Problem für Integrale dritter Gattung.

## § 2. Transformation eines analogen Umkehrproblems auf die Normalform.

Auf eine transscendente Gleichung ähnlicher Art führt die folgende Aufgabe. Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{P}} + \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{Q}} = w \\ &\int_0^p \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} + \int_0^q \frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}} = w', \end{aligned}$$

wo
$$P = A(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta),$$
$$Q = A(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta);$$

es sollen $p$ und $q$ als Functionen von $w$ und $w'$ bestimmt werden. Wir nehmen an, dass die Constanten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ von einander verschieden seien.

Zunächst müssen die elliptischen Integrale der linken Seiten von (9) auf ihre Normalform gebracht werden. Zu dem Zwecke setzen wir

$$(10) \qquad p = \frac{\zeta^2 \alpha - \beta}{\zeta^2 - \tau^2}, \quad \tau = \sqrt{\frac{\gamma-\alpha}{\gamma-\beta}};$$

dann wird:

$$(11) \qquad \frac{dp}{\sqrt{P}} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-\varkappa^2\zeta^2)}}, \quad \text{wo}$$

$$(11\text{a}) \qquad \varepsilon = \tfrac{1}{2}\sqrt{A(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}, \quad \varkappa^2 = \sqrt{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}\,\frac{\delta-\alpha}{\delta-\beta}}.$$

Zur Umformung der Integrale aus der zweiten Gleichung (9) wenden wir die von Königsberger gegebene Weierstrass'sche Methode[1]) an; d. h. wir machen wieder die Substitution (10) und finden:

$$(12) \qquad \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} = \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{\tau\sqrt{R(\tau)}}{(\zeta^2-\tau^2)\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi + \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cdot l \cdot \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}}$$
$$- \tfrac{1}{2}\varkappa^2 \cdot k \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} + \tfrac{1}{2}\,d\left[\xi f(\xi^2)\sqrt{R(\xi)}\right],$$

wo $R(\xi) = (1-\xi^2)(1-\varkappa^2\xi^2)$, und wo mit $C_1$, $l$, $k$ Constante mit $f(\xi^2)$ eine rationale Function von $\xi^2$ bezeichnet sind, welche sich nach den allgemein gültigen Regeln berechnen lassen, und für die sich dann folgende Werthe ergeben:

---

[1]) Vergl. Königsberger: De motu puncti versus duo fixa centra attracti, Inaugural-Dissertation, Berlin 1860 und dessen Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen, Bd. I, p. 275, Leipzig 1874.

$$(13)\quad C_1 = \sqrt{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}\cdot\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4},\quad l = \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta),$$

$$k = \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta),\quad f(\xi^2) = -\tfrac{1}{2}\frac{(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)}{\xi^2-\tau^2}.$$

Statt $\tau$ führen wir eine Constante $\omega$, statt $\xi$ eine Variable $u$ ein mittelst der Substitutionen

$$(14)\qquad \tau = \operatorname{sn}(\omega + iK') = \frac{1}{\varkappa \operatorname{sn}\omega},\quad \xi = \operatorname{sn} u$$

dann wird auf der rechten Seite von (12):

$$\int_0^\xi \frac{\tau\sqrt{R(\tau)}}{(\xi^2-\tau^2)\sqrt{R(\xi)}}\,d\xi = -\frac{1}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\int_0^u \frac{\operatorname{cn}\omega\operatorname{dn}\omega}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\operatorname{sn}^2 u}\,du$$

$$(15)\qquad = -\frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\int_0^u du - \frac{1}{\varkappa}\int_0^u \frac{\varkappa^2\operatorname{sn}\omega\cdot\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u}\,du$$

$$= -\frac{1}{\varkappa}\Pi(u,\omega) - \frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\cdot u.$$

Analoge Umformungen nehmen wir mit dem zweiten Integrale vor, das sich auf die Variable $q$ bezieht, und finden

$$(16)\qquad \int_0^\eta \frac{\tau\sqrt{R(\tau)}}{(\eta^2-\tau^2)\sqrt{R(\eta)}}\,d\eta = -\frac{1}{\varkappa}\Pi(v,\omega) - \frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\varkappa\operatorname{sn}\omega}\cdot v,$$

wo

$$(17)\qquad q = \frac{\eta^2\alpha-\beta}{\eta^2-\tau^2},\quad \eta = \operatorname{sn} v.$$

Für das zweite Glied der rechten Seite von (12) erhalten wir nach (4):

$$(18)\qquad \varkappa^2\int_0^\xi \frac{\xi^2\,d\xi}{\sqrt{R(\xi)}} = \int_0^\xi \varkappa^2\operatorname{sn}^2\xi\,d\xi = -Z(u) + \frac{J}{K}u.$$

Sei endlich $p_0 = \frac{\beta}{\tau^2} = \beta\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}$, so ergibt sich aus (12), (15) und (18):

$$\int_{p_0}^{p} \frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} = -\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2\varkappa\sqrt{A}}\,\Pi(u,\omega) - \tfrac{1}{4}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\,Z(u)$$

$$-\left[\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2\varkappa\sqrt{A}}\,\frac{\operatorname{cn}\omega\cdot\operatorname{dn}\omega}{\operatorname{sn}\omega} - \tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\frac{J}{K} - \tfrac{1}{2}\varkappa^2(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\right]u$$

$$+\tfrac{1}{4}(\gamma-\alpha)(\delta-\beta)\,\frac{\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\operatorname{sn}^2 u}\,\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega$$

$$= B\,\Pi(u,\omega) + C u + D\left[\frac{\varkappa^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{sn}^2\omega}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\omega\cdot\operatorname{sn}^2 u} - Z(u)\right],$$

wo $B$, $C$, $D$ zur Abkürzung für die betreffenden Coëfficienten eingesetzt ist. Der Factor von $D$ kann mit Hülfe der Additionstheoreme für Integrale zweiter Gattung, d. h. mit Hülfe der Formel

$$Z(u) - \tfrac{1}{2}Z(u+\omega) - \tfrac{1}{2}Z(u-\omega) = \frac{\varkappa^2\operatorname{sn}u\cdot\operatorname{cn}u\cdot\operatorname{dn}u\cdot\operatorname{sn}^2\omega}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2\omega}$$

vereinfacht wurden; so erhalten wir:

$$(19)\qquad \int_{p_0}^{p}\frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} = B\,\Pi(u,\omega) + C u - \frac{D}{2}[Z(u+\omega)+Z(u-\omega)].$$

Ebenso ist:

$$(20)\qquad \int_{q_0}^{q}\frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}} = B\,\Pi(v,\omega) + C v - \frac{D}{2}[Z(v+\omega)+Z(v-\omega)].$$

Setzen wir also noch

$$w_0 = \varepsilon w - \int_0^{p_0}\frac{dp}{\sqrt{P}} - \int_0^{q_0}\frac{dq}{\sqrt{Q}}$$

$$(20\text{a})\qquad w_1 = w' - \int_0^{p_0}\frac{p^2\,dp}{\sqrt{P}} - \int_0^{q_0}\frac{q^2\,dq}{\sqrt{Q}} - C(u+v),$$

so gehen die Gleichungen (9) über in

$$(21)\qquad u + v = w_0$$

$$(21\text{a})\quad B[\Pi(u,\omega)+\Pi(v,\omega)]-\tfrac{1}{2}D[Z(u+\omega)+Z(v+\omega)$$
$$+Z(u-\omega)+Z(v-\omega)]=w_1.$$

Eine weitere Anwendung der Additionstheoreme (6) und (7) gibt endlich der Gleichung (21a) die Form:

$$(22)\qquad \frac{B}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{sn}\,v\cdot\mathrm{sn}\,(w_0-\omega)}{1+\varkappa^2\,\mathrm{sn}\,\omega\cdot\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{sn}\,v\cdot\mathrm{sn}\,(w_0+\omega)}$$
$$-\frac{\varkappa^2 D}{2}[\mathrm{sn}\,(u+\omega)\,\mathrm{sn}\,(v-\omega)+\mathrm{sn}\,(u-\omega)\,\mathrm{sn}\,(v+\omega)]\,\mathrm{sn}\,w_0$$
$$=w_1-A\,\Pi(w_0,\omega)+D\,Z(w_0).$$

Andererseits kann man in die Gleichung (21a) mittelst (3) und (4) die $\Theta$-Functionen einführen und findet dann:

$$(23)\qquad A\cdot\Omega+\frac{D}{2}\frac{\partial\,\Omega}{\partial\,\omega}=w_1-A\,w_0,$$

wo zur Abkürzung

$$(24)\qquad \Omega=\log\frac{\Theta(u-\omega)\,\Theta(v-\omega)}{\Theta(u+\omega)\,\Theta(v+\omega)}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass sich in (23) die Differentiation nach $\omega$ nur auf die Argumente der $\Theta$-Functionen bezieht, während ja thatsächlich auch der Modul $\varkappa^2$ dieser Functionen nach (11a) und (14) von $\omega$ abhängig ist. In (22), bez. (23) ist uns diejenige transscendente Gleichung gegeben, von welcher im vorliegenden Falle die Lösung des Umkehrproblems abhängt. Eine weitere Behandlung derselben in der vorliegenden Form würde Schwierigkeiten bieten; es dürfte deshalb von Interesse sein, dass sich durch Untersuchung der mechanischen Bedeutung der vorgelegten Gleichungen (9) die gefundene transscendente Gleichung auf die bei der Planetenbewegung auftretende Kepler'sche Gleichung reduciren lässt.

## § 3. Reduction des aufgestellten Umkehrproblems auf die Kepler'sche Gleichung.

Ein Punkt von der Masse 1 wurde von zwei festen Centren mit den Massen $m$ und $m'$ nach dem Newton'schen Gesetze angezogen; die Bewegung des Punktes ist schon von Euler und Lagrange bestimmt; Jacobi behandelt das Problem mittelst der Hamilton'schen partiellen Differentialgleichung. Die anziehenden Punkte mögen auf der $X$-Axe in der Entfernung $f$ zu beiden Seiten des Anfangspunktes liegen, und zwar in den gemeinschaftlichen Brennpunkten eines Systems confocaler Kegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{z^2}{b^2-\lambda}-1=0,\quad \frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{z^2}{b^2-\mu}-1=0, \tag{25}$$

wo $-\infty<\lambda<b^2$, $b^2<\mu<a^2$. Mittelst der Formeln

$$x^2=\frac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)}{a^2-b^2},\quad z^2=\frac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)}{b^2-a^2}, \tag{26}$$

wo $f^2=a^2-b^2$, werden elliptische Coordinaten eingeführt, und es werde

$$\sqrt{a^2-\lambda}=p,\qquad \sqrt{a^2-\mu}=q \tag{27}$$

gesetzt; dann ist die Hamilton'sche charakteristische Function

$$W=\int dp\sqrt{\frac{hp^2+(m-m')p+2k-hb^2}{p^2-f^2}}$$

$$+\int dq\sqrt{\frac{hq^2+(m+m')q+2k-hb^2}{q^2-f^2}},$$

und die Integralgleichungen des Problems werden

$$k'=\frac{\partial W}{\partial k},\quad t-t_0=\frac{\partial W}{\partial h}. \tag{28}$$

In jeder der beiden letzten Gleichungen kommen elliptische Integrale mit verschiedenem Modul vor; lassen wir aber die

Masse $m'$ gleich Null werden,[1]) so sind beide Modulen einander gleich, und die Gleichungen (28) werden mit den Gleichungen (9) des in § 2 behandelten Umkehrproblems identisch. Um die Identität herzustellen, hat man nur zu setzen:

$$(29)\quad \begin{aligned} A(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)(p-\delta) &= (hp^2+mp+2k-hb^2)(p^2-f^2), \\ A(q-\alpha)(q-\beta)(q-\gamma)(q-\delta) &= (hq^2+mq+2k-hb^2)(q^2-f^2), \end{aligned}$$

$$k' = w + k_0, \quad t - t_0 = \tfrac{1}{2}(w' + k_0') - b^2(w + k_0).$$

Dabei sind die Constanten $k_0$ und $k_0'$ so bestimmt zu denken, dass die Coordinaten eines beliebigen Anfangspunktes der Bewegung (für die Zeit $t = t_0$) in den unteren Grenzen der Integrale auftreten.

Die Bewegung unseres Punktes erfolgt jetzt bekanntlich nach den Kepler'schen Gesetzen; die Bestimmung des Ortes als Function der Zeit, d. h. der oberen Grenzen $p$, $q$ als Functionen von $w$ und $w'$ geschieht insbesondere durch die sogenannte Kepler'sche Gleichung

$$(30)\qquad t_1 = \sqrt{\frac{a_1^3}{m}}\,(\Phi - e\sin\Phi),$$

deren Lösung in bekannter Weise durch Anwendung der Lagrange'schen Formel oder durch Entwicklung von $\sin\Phi$ nach Bessel'schen Functionen von $e$ und in eine trigonometrische Reihe nach den Sinus der vielfachen von $t_1$ geschieht. In (30) bedeutet $t_1$ die Zeit, $e$ die Excentricität der elliptisch gedachten Bahn, $a_1$ ihre halbe grosse Axe, $\Phi$ die excentrische Anomalie, endlich $m$ die Masse der Sonne. Auf diese Keplersche Gleichung muss sich daher das in den Gleichungen (9), bez. (21) vorgelegte Umkehrproblem aus der

---

[1]) Mit dem Falle $m = 0$ beschäftigt sich zu wesentlich anderen Zwecken auch Scheibner (Notiz über das Problem der drei Körper, Bericht der kgl. sächsischen Gesellschaft d. Wissenschaften, math.-phys. Classe, 1866); insbesondere geht derselbe auf die Einführung elliptischer Functionen nicht ein.

Theorie der elliptischen Integrale und somit auch die transscendente Gleichung (22), bez. (23) reduciren lassen.

Aus dem ersten Kepler'schen Gesetze folgt ferner: Die erste Gleichung (9) bez. (21) stellt in elliptischen Coordinaten $\lambda$, $\mu$, die durch (26) und (27) einzuführen sind, einen Kegelschnitt dar, dessen einer Brennpunkt im Punkte $m$, d. h. im Punkte $x = -f = -\sqrt{a^2 - b^2}$, $z = 0$ sich befindet.

Von welcher Art dieser Kegelschnitt ist, lässt sich nach den allgemeinen Bemerkungen Königsberger's beurtheilen.[1]) Andererseits ist nach der Theorie der Planeten-Bewegung die Bahn eine Ellipse oder eine Hyperbel je nachdem

$$(31) \qquad 2h = v_0^2 - \frac{2m}{r_0} = v_0^2 - \frac{2m}{p_0 + q_0}$$

$< 0$ oder $> 0$ ist, wenn $v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit, $r_0$ die anfängliche Entfernung des Punktes vom anziehenden Centrum, $p_0$ und $q_0$ die Coordinaten der Anfangslage bezeichnen. Der Fall $h = 0$ gibt die Parabel.

## § 4. Durchführung der Transformation unserer transscendenten Gleichung.

Nachdem wir durch die mechanischen Ueberlegungen in § 3 erkannt haben, dass sich die transscendente Gleichung (22) bez. (23) auf die einfache Kepler'sche Form, die in (30) vorliegt, bringen lassen muss, erübrigt nur noch, diese Umformung wirklich durchzuführen.

---

[1]) Vgl. dessen oben citirte Dissertation, in welcher für den Fall $m' \gtrless 0$ die Integralgleichungen des fraglichen dynamischen Problems (für den Fall der Bewegung im Raume) durch Einführung elliptischer $\Theta$-Functionen umgeformt werden. Weitere Vereinfachungen können (wie aus unseren Formeln hervorgeht) durch Benutzung der Additionstheoreme für Integrale zweiter und dritter Gattung erzielt werden.

Zu dem Zwecke ziehen wir die in (21) vorkommenden Integrale zweiter Gattung in anderer Weise zusammen, als es bei Ableitung von (22) geschehen ist. Nach (7) haben wir

$$(32)\quad Z(u+\omega)+Z(v+\omega)+Z(u-\omega)+Z(v-\omega)$$
$$= Z(u+v+2\omega)+\varkappa^2 \operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(v+\omega)\operatorname{sn}(u+v+2\omega)$$
$$+ Z(u+v-2\omega)+\varkappa^2 \operatorname{sn}(u-\omega)\operatorname{sn}(v-\omega)\operatorname{sn}(u+v-2\omega).$$

Nach dem Additionstheoreme für sinam ist ferner:

$$(33)\quad \begin{aligned} \operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(v+\omega) &= \frac{\operatorname{sn}^2\vartheta-\operatorname{sn}^2\sigma}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta} \\ \operatorname{sn}(u-\omega)\operatorname{sn}(v-\omega) &= \frac{\operatorname{sn}^2\vartheta'-\operatorname{sn}^2\sigma}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^4\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta'}, \end{aligned}$$

wo $\sigma=\frac{u-v}{2},\quad \vartheta=\frac{u+v}{2}+\omega,\quad \vartheta'=\frac{u+v}{2}-\omega.$

Das Argument des in (22) auftretenden Logarithmus ist nach Jacobi[1]) gleich

$$(34)\quad \frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta'}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta}\cdot\frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}\operatorname{sn}^2\vartheta}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}\operatorname{sn}^2\vartheta'}.$$

Der Logarithmus des zweiten Factors gibt eine additive Constante, deren Werth durch $w_0=u+v$ bestimmt ist; es kommt also nur auf den ersten Factor an. Wir setzen

$$(35)\quad L\cdot\frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta'}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\sigma\operatorname{sn}^2\vartheta}=e^{\Phi i},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ und $L$ eine zu bestimmende Constante bedeutet. Die Auflösung von (35) ergibt

$$\operatorname{sn}^2\sigma=\frac{L-e^{\Phi i}}{L\sin^2\vartheta'-e^{\Phi i}\sin^2\vartheta}$$

---

[1]) Vgl. dessen Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum, § 54; Gesammelte Werke, Bd. 1, p. 211.

Diesen Werth führen wir mittelst (33) in die rechte Seite von (32) ein. Seien für den Augenblick die Buchstaben $M$, $N$, $R$, $R'$ durch die Gleichungen

$$M = \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \vartheta', \quad N = \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 \vartheta,$$

$$(36) \qquad R = \frac{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{cn} 2\omega \cdot \operatorname{dn} 2\omega}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 w_0 \operatorname{sn}^2 2\omega}, \quad R' = \frac{\operatorname{sn} 2\omega \cdot \operatorname{cn} w_0 \cdot \operatorname{dn} w_0}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 w_0 \operatorname{sn}^2 2\omega}$$

definirt, so wird auf dieser rechten Seite

$$(37) \quad \operatorname{sn}(u+\omega)\operatorname{sn}(v+\omega)\operatorname{sn} 2\vartheta + \operatorname{sn}(u-\omega)\operatorname{sn}(v-\omega)\operatorname{sn} 2\vartheta'$$

$$= \frac{R+R'}{\varkappa^2 L(M-N)}\left[2L(MN-\varkappa^2) - (N^2-\varkappa^2)e^{\Phi i} - L^2(M^2-\varkappa^2)e^{-\Phi i}\right]$$

$$+ \frac{R-R'}{\varkappa^2 L(M-N)}\left[\qquad - (N^2-\varkappa^2)e^{\Phi i} + L^2(M^2-\varkappa^2)e^{-\Phi i}\right].$$

Um nun die rechte Seite in eine Function von $\sin \Phi = \frac{1}{2i}(e^{\Phi i} - e^{-\Phi i})$ zu verwandeln, müssen wir die noch nicht bestimmte Grösse $L$ durch die Gleichung

$$(38) \quad L^2 = -\frac{R}{R'}\frac{N^2-\varkappa^2}{M^2-\varkappa^2} = -\frac{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{cn} 2\omega \cdot \operatorname{dn} 2\omega}{\operatorname{sn} 2\omega \cdot \operatorname{cn} w_0 \cdot \operatorname{dn} w_0}\left(\frac{\operatorname{cn}\vartheta}{\operatorname{cn}\vartheta'}\right)^2$$

bestimmen. Der Ausdruck (37) wird dann in Rücksicht auf die Relation

$$\frac{N-M}{\varkappa^2 - MN} = \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\operatorname{sn}^2\vartheta - \operatorname{sn}^2\vartheta'}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2\vartheta \operatorname{sn}^2\vartheta'},$$

$$= \frac{1}{\varkappa^2}\operatorname{sn}(\vartheta+\vartheta')\operatorname{sn}(\vartheta-\vartheta') = \frac{1}{\varkappa^2}\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{sn} 2\omega,$$

gleich

$$(39) \qquad \frac{\operatorname{sn}(w_0 + 2\omega)}{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{sn} 2\omega} + \frac{2 \operatorname{cn}\vartheta \cdot \operatorname{cn}\vartheta'}{\varkappa^2(\operatorname{sn}^2\vartheta' - \operatorname{sn}^2\vartheta)} \cdot \Omega_0 \cdot \sin\Phi,$$

wo $\quad \Omega_0 = \sqrt{\operatorname{sn} w_0 \cdot \operatorname{cn} w_0 \cdot \operatorname{dn} w_0 \cdot \operatorname{sn} 2\omega \cdot \operatorname{cn} 2\omega \cdot \operatorname{dn} 2\omega}.$

Setzt man den so umgeformten Ausdruck (37) in (32) ein und substituirt die betreffende Summe von Integralen zweiter Gattung wieder in die Gleichung (21) bez. (22), so geht die letztere, unter Berücksichtigung von (34), über in

$$\frac{B}{2}\Phi i - D\frac{\operatorname{cn}\vartheta\cdot\operatorname{cn}\vartheta'}{\operatorname{sn}^2\vartheta' - \operatorname{sn}^2\vartheta}\cdot\Omega_0\cdot\sin\Phi$$

$$(40)\qquad = w_1 - B\Pi(w_0,\omega) + \frac{B}{2}\log\frac{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\vartheta\ \operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}}{1-\varkappa^2\operatorname{sn}^2\vartheta'\ \operatorname{sn}^2\frac{w_0}{2}}$$

$$+\frac{D}{2}\left[Z(2\vartheta)+Z(2\vartheta')+\varkappa^2\frac{\operatorname{sn}(w_0+2\omega)}{\operatorname{sn}w_0\cdot\operatorname{sn}2\omega}\right].$$

Hierin sind die Werthe von $B$ und $D$ aus (19) einzuführen, während $\omega$ durch (14) bestimmt ist, und nach (29) ist $A = h$, d. h. gleich der Constanten aus dem Satze von der Erhaltung der lebendigen Kraft. Man findet

$$(41)\qquad B = -\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2\varkappa\sqrt{A}} = \frac{m f^2}{2\varkappa\sqrt{h^3}}.$$

Da bei der elliptischen Bewegung $h$ negativ ist, so wird in der That in (40) die Constante $iB$ reell.

Die Auflösung des in den Gleichungen (9) bis (21) vorliegenden Umkehrproblems geschieht jetzt in der Weise, dass man die Grösse $\Phi$ aus (41) bez. (30) berechnet, darauf $\operatorname{sinam}\frac{u-v}{2}$ und damit $u-v$ aus (35) bestimmt, wodurch dann die Integrale $u$ und $v$, deren Summe gleich $w_0$ gegeben ist, einzeln und folglich auch ihre oberen Grenzen bekannt sind.

## § 5. Einige geometrische Folgerungen.

Wie in § 3 bemerkt wurde, stellt die erste der Gleichungen (9) bez. (21) einen Kegelschnitt dar, dessen einer Brennpunkt an der Stelle $x = -f$, $z = 0$ liegt. Es entsteht also die Aufgabe, den Mittelpunkt und die grosse Axe dieses Kegelschnittes zu bestimmen; dieselbe ist durch die in § 4 ausgeführte Transformation bereits gelöst.

Die Gleichungen (30) und (41) müssen mit einander identisch sein. Nach (20a) unterscheidet sich $w'$ von $w_1$ nur um eine additive Constante, nach (28) und (29) ist daher

$$w_1 = 2\,t + \text{Constante.}$$

Durch Vergleichung von (30) und (41) findet man daher die halbe grosse Axe $a_1$ der Bahncurve bestimmt durch

$$\sqrt{\frac{a_1^3}{m}} = -\frac{Bi}{4} = \frac{m f^2}{\varkappa \sqrt{-h^3}}; \tag{42}$$

und für die numerische Excentricität $e$ ergibt sich die Gleichung:

$$e\sqrt{\frac{a_1^3}{m}} = -\tfrac{1}{2}\, D\, \Omega_0 \frac{\operatorname{cn}\vartheta \cdot \operatorname{cn}\vartheta'}{\operatorname{sn}^2\vartheta' - \operatorname{sn}^2\vartheta}, \tag{43}$$

wo $\vartheta = \frac{w_0}{2} + \omega$, $\vartheta' = \frac{w_0}{2} - \omega$. Es erübrigt noch, die Richtung der grossen Axe zu bestimmen.

Der durch (37) und (39) definirte Winkel $\Phi$ ist mit der excentrischen Anomalie identisch.[1]) Die Werthe $\Phi = 0$ und $\Phi = \pi$ geben also die Endpunkte der grossen Axe; die elliptischen Coordinaten der letzteren Punkte werden demnach aus der Gleichung (35) gewonnen. Für $\Phi = 0$ ergibt sich z. B., wenn $\sigma_0 = \left(\frac{u-v}{2}\right)_0$ gesetzt wird, die Relation

$$\operatorname{sn}^2 \sigma_0 = \frac{1}{\varkappa^2} \frac{L-1}{\operatorname{sn}^2\vartheta - \operatorname{sn}^2\vartheta'},$$

wo $L$ durch (38) gegeben ist. Für eine Parabel wird nach (31) $h = 0$, also nach (29) $\gamma = \infty$, also nach (10) $\tau = t$, also nach (14) $\omega = K + i K'$, also

---

[1]) Auch von Gylden ist die Planetenbewegung mittelst elliptischer Functionen behandelt worden, worauf mich Herr College Seeliger aufmerksam macht (Vierteljahresschrift der astronomischen Gesellschaft, Jahrg. X, 1875). Die Einführung dieser Functionen geschieht, indem die halbe excentrische Anomalie direct gleich der Amplitude eines elliptischen Integrals gesetzt wird.

$$\operatorname{sn}\vartheta = \operatorname{sn}\left(\frac{w_0}{2}+\omega\right) = \operatorname{sn}\left(\frac{w_0}{2}-\omega\right) = \operatorname{sn}\vartheta',$$

und somit nach (43) $e=\infty$, wie es sein muss; es wird zwar $\Omega_0 = 0$, aber $D = \frac{1}{4}(\gamma - \alpha)(\delta - \beta)$ wird auch unendlich gross.

Eine besondere Beachtung verdient der Fall, wo auch $m = 0$ wird. Dann muss nach dem Frägheitsgesetze die Bewegung in einer geraden Linie erfolgen. Die erste Gleichung (9) stellt also jetzt eine gerade Linie dar;[1]) in ihr ist nach (29):

$$P = (p^2 - f^2)(hp^2 + 2k - hb^2), \quad Q = (q^2 - f^2)(hq^2 + 2k - hb^2).$$

Aendert man die Constanten $h$, $k$, $m$ und setzt

$$P_1 = (p^2 - f^2)(h_1 p^2 + m_1 p + 2k_1 - h_1 b^2),$$
$$Q_1 = (q^2 - f^2)(h_1 q^2 + m_1 q + 2k_1 - h_1 b^2),$$

so stellen die beiden Gleichungen

$$(43)\qquad \begin{aligned}\int_0^p \frac{dp}{\sqrt{P}} + \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{Q}} &= c\\ \int_0^p \frac{dp}{\sqrt{P_1}} + \int_0^q \frac{dq}{\sqrt{Q_1}} &= c'\end{aligned}$$

zwei Kegelschnitte dar. Die beiden Curven haben einen gemeinsamen Brennpunkt an der Stelle $x = -f$, $z = 0$. Soll der andere Brennpunkt in gleicher Weise benutzt werden, so muss man in $W$ (§ 3) $m = 0$, $m' = 1$ setzen; es kommt dies darauf heraus, dass $p$ durch $-p$ ersetzt wird, was den Werth von $\lambda = a^2 - p^2$ nicht beeinflusst. Führt man dann $\pi = -p$ als neue Variable ein, so tritt in (43) an Stelle der Summe die Differenz der Integrale erster Gattung auf. Erscheint in (43) einmal die Summe und einmal die Differenz, so liegt der eine Brennpunkt des ersten Kegelschnittes an der Stelle $x = -f$,

[1]) Wie schon Jacobi bei anderer Gelegenheit bemerkt: Vorlesungen über Dynamik, 30. Vorlesung.

$z = 0$, der eine Brennpunkt des zweiten Kegelschnittes an der Stelle $x = f$, $z = 0$.

In den ersten beiden Fällen sind zwei gemeinsame Tangenten der beiden Kegelschnitte (43) bekannt, die Bestimmung ihrer Schnittpunkte geschieht also mittelst quadratischer Gleichungen; im andern Falle ist zu diesem Zwecke eine Gleichung vierten Grades nöthig. Die elliptischen Coordinaten der vier Schnittpunkte genügen den beiden Gleichungen (43). Durch unsere geometrische Interpretation ist also die Lösung des durch die Gleichungen (43) dargestellten Umkehrproblems gegeben; und zwar sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1) Es sind zwei Summen oder zwei Differenzen von Integralen erster Gattung gegeben; die Lösung wird auf quadratische Gleichungen zurückgeführt;

2) es ist eine Summe und eine Differenz von Integralen erster Gattung gegeben; die Lösung erfordert eine biquadratische Gleichung;

3) $m = 0$ oder $m_1 = 0$; es ist ein Kegelschnitt mit einer geraden Linie zu schneiden;

4) $m = 0$ und $m_1 = 0$; es sind zwei gerade Linien zum Schnitt zu bringen.

Während man sonst mit Hülfe des Additionstheorems bez. des Abel'schen Theorems nur solche transscendente Relationen mit algebraischen in Beziehung bringt, bei denen es sich um elliptische Integrale mit gleichem Modul handelt, liegt hier ein ähnliches Resultat für elliptische Integrale mit verschiedenem Modul vor;[1]) die betreffenden Differentiale haben **zwei** singuläre Stellen gemeinschaftlich.

Statt der elliptischen Coordinaten hätten wir uns bei vorstehenden Ueberlegungen auch der bipolaren Coordinaten bedienen können, d. h. der Entfernungen des bewegten Punktes

---

[1]) Es liegt nahe, solche Betrachtungen auf Abel'sche Integrale auszudehnen, worauf ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen hoffe.

von den beiden festen Centren;[1]) in der That wird dadurch unser Problem in der gleichen Weise auf elliptische Integrale zurückgeführt.

## § 6. Ein besonderer Fall.

Stillschweigend wurde im Vorstehenden vorausgesetzt, dass die Wurzeln der Gleichungen $P=0$ und $Q=0$ von einander verschieden seien. Da $f$ nothwendig von Null verschieden ist, so kann nach (29) entweder eine Wurzel der Gleichung

$$hp^2+mp+2k-hb^2=0$$

gleich $f$ werden, oder es können die beiden Wurzeln der letzteren Gleichung zusammenfallen. Je nach dem Intervalle, in welches diese Doppelwurzel dann fällt (nemlich $\lambda < b^2$ oder $b^2<\mu<a^2$, d. h. $p^2=a^2-\lambda>a^2-b^2$ oder $0<q^2=a^2-\mu<a^2-b^2$) wird das eine oder das andere der in den Gleichungen (9) vorkommenden Integrale unendlich gross; die Gleichungen können daher nur dadurch einen Sinn behalten, dass $dp=0$ (bez. $dq=0$) d. h. $p=\text{const.}$ (oder $q=\text{const.}$) wird; die Bewegung findet in einer Ellipse (bez. Hyperbel) des ursprünglich angenommenen und durch (25) dargestellten confocalen Systems statt. Ist insbesondere $f$ eine Doppelwurzel von $P=0$, so werden beide Integrale von (9) unendlich gross, und es muss zugleich $p=\text{const.}$ und $q=\text{const.}=f$, d. h. $\lambda=\mu=a^2-b^2$ werden; die Bewegung geschieht in der $X$-Axe.

Will man auch hier die weitere Behandlung in elliptischen Coordinaten durchführen, so ist nach dem Principe von der Erhaltung der lebendigen Kraft, wenn wir uns auf die elliptische Bahncurve beschränken und etwa $\lambda=0$, also $p=a$ wählen:

---

[1]) Vgl. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 1. Aufl. p. 197. Jacobi behandelt auch die Planetenbewegung mit diesem Coordinatensysteme, legt dabei aber den einen festen Punkt auf die Bahn des Planeten, während der andere mit der Sonne zusammenfällt.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{8}\frac{\lambda-\mu}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2$$

$$= U + h = \frac{m}{\mu-\lambda}\left[\sqrt{a^2-\mu}-\sqrt{a^2-\lambda}\right] + h,$$

wo nun $\lambda = 0$ zu nehmen ist, oder:

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{(q^2-a^2)\,dq}{\sqrt{f^2-q^2}\sqrt{h(a^2-q^2)+m(q-a)}} = dt$$

Bei der Planetenbewegung auf der Ellipse $\lambda = 0$ ist aber immer $h = \frac{m}{2a}$, wenn die Sonne im Brennpunkte $x = -f$, $y = 0$ steht; das zweite Radical im Nenner der linken Seite hat daher zwei einander gleiche Wurzeln (nemlich beide gleich $a$) und wir finden

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{m}}\frac{q+a}{\sqrt{f^2-q^2}}\,dq.$$

Von hier geht man leicht zu den bekannten Formeln über.

# Die Resultate der Feldspathstudien.

Von **Eugraph v. Fedorow.**

(*Eingelaufen 15. Januar.*)

In verschiedenen Wissenschaftszweigen kommt es nicht so selten vor, dass man in dem letzten Stadium einer immer intensiveren Erforschung zu den in dem primitiven Stadium vorherrschenden Auffassungen ganz analogen Schlüssen kommt.

So ist es z. B. mit der Theorie der Krystallstructur geschehen. Der berühmte Hauy hat in die Wissenschaft den Begriff der primitiven Form eingeführt, welcher aber infolge einer dürftigen Erfahrung und damit verbundener Willkür in der Deutung dieses Begriffes nicht fortbestehen konnte und infolge der intensiveren Erforschung von Delafosse und von Bravais und Frankenheim fallen musste.

In den letzten Jahrzehnten aber ist man endlich, auf Grund des von dem unvergesslichen L. Sohncke angebahnten und von dem Verfasser weiter verfolgtem Wege eines noch intensiveren Studiums, dazu gekommen, nach bestimmten, experimentell nachzuweisenden Merkmalen Schlüsse über die räumliche Lage der Punkte und über die jedem solchen zugehörenden Raumeinheiten ziehen zu können. Dementsprechend kam wieder der früher ganz verlassene Begriff der Hauptstructurrichtungen und Hauptstructurflächen zur Geltung. Die ersten sind nämlich die die Centralpunkte zweier nächster Raumeinheiten verbindenden Geraden. Die letzteren sind die je zweien solchen Richtungen parallelen Ebenen.

In der allerletzten Zeit gelang es dem Verfasser, auf äusserst einfache Weise die Hauptstructurflächen auf experimentellem Wege (wenigstens für Laboratoriums-Krystalle) bestimmen zu können. Dazu erwies sich als ganz genügend,

eine gesättigte Lösung der betreffenden Substanz zwischen Object- und Deckglas möglichst langsam krystallisiren zu lassen (zu welchem Zwecke in der Mitte des Deckglases ein kleines Loch angebohrt wird). In der sehr dünnen Schicht zwischen beiden Gläsern bilden sich dann von selbst ausgezeichnet schön auskrystallisirende Tafeln der Substanz, und die Endflächen dieser Tafeln stellen ganz genau die ihr zugehörenden Hauptstructurflächen dar. Diese Tafeln bilden zugleich ausgezeichnete Präparate für die optische Untersuchung nach der Universalmethode und lassen sich mit all' demjenigen Grad der Genauigkeit bestimmen, welche überhaupt durch diese Methode erreicht werden kann.

Es sei mir erlaubt, hier sogleich zu erwähnen, dass diese Präparate am geeignetesten dazu sind, die Syngonieart sofort und unzweifelhaft zu bestimmen.

Jedenfalls ist jetzt für uns der Begriff einer Hauptstructurfläche nicht mehr ein leeres Wort, und die Willkür bei dem Gebrauche dieses Wortes für gut untersuchte Krystalle besteht nicht mehr resp. ist auf die engsten Grenzen beschränkt.

Etwas ganz Analoges ist aber auch mit den Feldspathstudien geschehen.

Zuerst wurden verschiedene Typen der Feldspathe angenommen, wie Orthoklas resp. Adular, dann Albit, Oligoklas, Labradorit und Anorthit; später kam dazu noch der Bytownit; anfänglich waren dies ganz abgesonderte Mineralienspecies gewesen. Später aber, besonders durch die bahnbrechenden Arbeiten von Tschermak und Max Schuster, wurde ganz genau festgestellt, dass die Kalknatronfeldspathe — durch den Gattungsnamen Plagioklase in eine Gruppe vereinigt — eigentlich eine ununterbrochene Reihe bilden, wenigstens durch zahlreiche Mittelglieder in der Natur vertreten sind.

Viele Mühe ward darauf verwendet, eine möglichst grosse Anzahl verschiedener Glieder dieser Reihe aufzustellen und auf optischem Wege möglichst genau zu characterisieren. Diese Arbeit wurde gleichzeitig von einer Reihe namhafter Specialisten durchgeführt, bis endlich es sich als möglich erwies, die opti-

schen Eigenschaften dieser Reihe wirklich durch eine, wenn auch nur annähernd richtige, Curve darzustellen. Die nähere Betrachtung dieser Curve hat aber ganz bestimmt und unzweifelhaft zu dem Schlusse geführt, dass wir in dieser Reihe nicht eine einheitliche, sondern eine zusammengesetzte Curve vor uns haben. Man kann es sogar als constatirt gelten lassen, dass die Curve eigentlich aus vier Theilcurven besteht, und dass die gemeinschaftlichen Punkte dieser Curven ganz bestimmten Plagioklastypen entsprechen, und zwar gerade denjenigen, welche als solche in dem ersten Stadium der Feldspathstudien auftraten, d. h. Albit, Oligoklas, Labradorit, Bytownit und Anorthit, denen also resp. die Mischungsverhältnisse $1\,Ab + 0\,An$, $3\,Ab + 1\,An$, $1\,Ab + 1\,An$, $1\,Ab + 3\,An$, und $0\,Ab + 1\,An$ zukommen würden. Dieses Resultat ist aber nicht etwa auf einzelne, sondern auf hunderte einzelne Beobachtungen gegründet.

Als Grundlage dazu dienen die massenhaft ausgeführten neueren optischen Bestimmungen der Feldspathe des Bogoslowskschen Bergreviers durch den Verfasser. Auch wurden verschiedene frühere vollständige Bestimmungen herangezogen.

Die graphische Darstellung der Resultate geschah auf folgendem Wege: Für sämmtliche einzelne Beobachtungen wurden als Coordinatenaxen die Axen des optischen Ellipsoides des betreffenden Gliedes angenommen, und dann wurden die sphärischen Coordinaten des Poles der Fläche (010) und der Verticalaxe (früherer Aufstellungsart) ermittelt und auf dem stereographischen Netze angezeichnet. In Folge dessen traten die einzelnen Beobachtungen auf der Zeichnung als Punkte auf, und diese Punkte bestimmten eine mittlere Curve für jede dieser beiden krystallographischen Richtungen. Diese beiden Curven sind genügend, um die vollständige krystallographische Orientirung des betreffenden Gliedes zu erhalten. Ein einer dieser beiden Curven angehörender Punkt ist genau von dem entsprechenden Punkte der zweiten Curve um 90° entfernt.

Auf welche Weise können wir uns nun über die Einheitlichkeit resp. Zusammensetzung der Theilcurven ein Urtheil verschaffen? Ich bediente mich folgender Methode:

Gelingt es einmal auf der Sphäre einen Pol aufzufinden, welchem eine gleiche krystallographische und eine gleiche optische Bedeutung zugleich für zwei Endgliedern einer isomorphen Theilreihe zukommt, so muss dieser Pol (wenigstens sehr annähernd) diese zweifache Bedeutung für sämmtliche Mittelglieder dieser Reihe beibehalten. Diesem Pol gehören also zugleich dieselben optischen und dieselben krystallographischen Coordinaten für sämmtliche Glieder der Reihe an. Für diese Theilreihe ist also die entsprechende Richtung constant und kann als eine Drehungsaxe angenommen werden. Dementsprechend mussten dann die Theilcurven Kleinkreise sein, deren Centrum auf der Sphäre der betreffende Polpunkt der Drehaxe ist. Auf diesem Wege können wir also diese constanten Punkte für eine isomorphe Reihe auf graphischem Wege ermitteln. Ich habe dies ausgeführt, und für die Theilreihen 0—25, 25—50, 50—75 drei verschieden constante Punkte erhalten. Nur für die Theilcurve 75—100 erhalten wir auf der Sphäre eine so geringe Länge, dass es unpraktisch erscheint, den entsprechenden constanten Punkt zu ermitteln, wenn er natürlich auch ein bestimmter sein muss.

Sind einmal die constanten Punkte für die Theilcurven ermittelt, so kann man die Curven selbst auf graphischem Wege erhalten. Nun sieht man, dass die so construirten theoretischen Curven (also Kleinkreise) den unmittelbar aus den Beobachtungen ermittelten Curven so nahe stehen, dass wirklich die letzteren als einheitliche aufgefasst werden können. Wahrscheinlich nähern sich die theoretischen Curven noch mehr der Wahrheit, als die direct aufgezeichneten Mittelcurven.

Im Grossen und Ganzen nähern sich alle vier Theilcurven einem Kreise; natürlich müsste aber, wenn man diesen annehmen wollte, keine Rücksicht auf irgend einen Genauigkeitsgrad genommen werden. Man kann diesen Umstand in der Weise deuten, dass, wenn auch die Mittelglieder der Plagioklasreihe verschiedenen Theilreihen angehören, doch infolge unbedeutender chemischer Action zwischen den Molekeln, die ganze Reihe in erster Linie als eine annähernd isomorphe zu betrachten ist.

# Zur Theorie des Doppel-Integrals.

Von **Alfred Pringsheim.**

*(Eingelaufen 15. Januar)*

Nachdem Riemann, den Cauchy-Dirichlet'schen Integral-Begriff wesentlich erweiternd, die Grundlage für die moderne Theorie des einfachen bestimmten Integrales geschaffen hatte, lag es nahe, auch den Begriff des mehrfachen, insbesondere des Doppel-Integrales in analoger Weise zu vervollkommnen. Die Verallgemeinerung der betreffenden Definitionen und Existenzbeweise bot, zumal mit Benützung der seit Ausbildung der Cantor'schen Mengenlehre gewonnenen schärferen Begriffs-Bestimmungen, keine besonderen Schwierigkeiten. Dagegen ergaben sich solche bei der Formulirung und beim Beweise desjenigen Fundamental-Satzes, welcher von der Reduction eines Doppel-Integrales auf ein iterirtes Integral, d. h. von der Berechnung eines Doppel-Integrales mit Hülfe von zwei successive auszuführenden einfachen Integrationen handelt, da die Existenz des über eine gewisse Fläche erstreckten Doppel-Integrals $\int\int f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ keineswegs diejenige der einfachen Integrale $\int f(x, y) \cdot dx$, $\int f(x, y)\, dy$ bei constantem $y$ bezw. $x$ praejudicirt. Hiernach entsteht also vor allem die Frage, in wieweit überhaupt der für eine stetige Function $f(x, y)$ geltenden Formel:

$$\text{(I)}\qquad \int\limits_{x_0}^{X}\int\limits_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dx\cdot dy \begin{cases} = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy \\ = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx \end{cases}$$

eine wohl definirte Bedeutung auch dann noch beigelegt werden kann, wenn $f(x,y)$ nur denjenigen Beschränkungen unterliegt, welche die Existenz des betreffenden Doppel-Integrales nach sich ziehen, und sodann, ob diese letztere auch allemal für die Gültigkeit jener Formel ausreichend erscheint. Diese Fragen wurden wohl zum ersten Male von Du Bois Reymond[1]) in der Hauptsache richtig beantwortet, indem er die fragliche Formel als speciellen Fall eines von ihm aufgestellten allgemeineren Grenzwerth-Satzes auffasst. Allein seine ganze Darstellung ermangelt der nöthigen Präcision und Beweiskraft, da er gewissermaassen mit unendlich vieldeutigen Ausdrücken[2]) wie mit eindeutig definirten operirt.

Derselbe Mangel haftet auch dem directeren Beweise an, welchen Harnack in der deutschen Ausgabe des Serret'schen Lehrbuches der Differential- und Integral-Rechnung[3]) mitgetheilt hat.

Mit Hinzunahme einer gewissen beschränkenden Voraussetzung (nämlich der Existenz des Integrals $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ bezw. $\int\limits_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$ für jedes einzelne in Betracht kommende $x$ bezw. $y$ mit eventuellem Ausschlusse einer unausgedehnten Punktmenge) hat sodann Herr Stolz den Sinn und die Gültigkeit der Formel (I) in durchaus correcter Weise festgestellt.[4])

---

[1]) Ueber das Doppelintegral. Journ. f. Math. Bd. 44 (1883), S. 278. (Ich verdanke die folgenden literarischen Notizen zum Theil einer gelegentlichen Mittheilung des Herrn A. Voss.)

[2]) Als solche kann man doch allenfalls die Integrale von der Form $\int\limits_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int\limits_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ im Falle ihrer Nicht-Existenz auffassen.

[3]) Bd. II[1] (1885), Art. 582.

[4]) Math. Ann. Bd. 26 (1886), S. 43.

Eine vollständig befriedigende und allgemeine Lösung der angedeuteten Fragen hat jedoch erst Herr C. Jordan geliefert,[1]) indem er durchweg die auch im Falle der Nicht-Existenz von $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ völlig wohldefinirten und praecisen Begriffe des oberen und unteren Integrals in den Vordergrund stellt.

Bei der einigermaassen abstracten Fassung und ausserordentlich weit getriebenen Allgemeinheit[2]) der Jordan'schen Auseinandersetzungen dürfte vielleicht eine vereinfachte Darstellung der zu einer vollkommen strengen Auffassung und Begründung der Formel (I) dienlichen Betrachtungen nicht überflüssig erscheinen. Die von mir erzielten Vereinfachungen beruhen zum guten Theil auf der Anwendung einer gewissen neuen Bezeichnungsweise, welche mir nicht nur für den vorliegenden Fall, sondern für Fragen aller Art, in denen Unbestimmtheitsgrenzen eine Rolle spielen, äusserst zweckmässig erscheint. Nachdem dieselbe in Art. I erklärt ist, stelle ich zunächst in Art. II—IV diejenigen Definitionen und Sätze aus der Theorie der einfachen Integrale zusammen, welche für das folgende erforderlich sind. Hieran schliesst sich in Art. V die Definition des Doppel-Integrales und sodann in Art. VI die Erörterung der fraglichen Formel (I), zunächst unter der Annahme constanter Grenzen, also eines rechteckigen Integrations-Bereiches. Ich gebe den Beweis dafür unter zwei verschiedenen Formen, deren erste wie bei Du Bois Reymond auf der Heranziehung eines allgemeinen Grenzwerth-Satzes beruht, während die zweite als eine Complettirung des Harnack'schen Beweises gelten kann. Als Erläuterung für die Tragweite der bewiesenen Formel wende ich dieselbe auf eine Function an, bei welcher die Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ für unend-

[1]) Journ. de Math. 4ième série, T. 8 (1892) p. 84, Art. 17. — Cours d'Analyse, 2de éd., T. I p. 42, Art. 56—58.

[2]) Herr Jordan dehnt z. B. den Integral-Begriff auf ganz beliebig gedachte, insbesondere also auch auf unstetige Punkt-Mengen aus.

lich viele, überall dicht liegende Werthe von $x$ bezw. $y$ nicht existiren. — In Art. VII folgt schliesslich die Uebertragung der Formel (I) auf den Fall eines krummlinig begrenzten Integrations-Bereiches mit Hülfe einer sehr einfachen Methode, welche zwar sehr nahe zu liegen scheint, aber meines Wissens für den vorliegenden Zweck bisher noch nicht angewendet wurde.

---

I. Oberer und unterer Limes. Ich bezeichne den oberen Limes (die obere Unbestimmtheits-Grenze) einer Zahlenfolge $a_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) für $\lim \nu = \infty$, bezw. denjenigen einer Function $\varphi(x)$ für $\lim x = x_0$, durch das Symbol:

$$(1) \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \overline{\lim_{x=x_0}}\, \varphi(x),$$

den unteren Limes entsprechend durch das Symbol:

$$(2) \qquad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \underline{\lim}_{x=x_0}\, \varphi(x).$$ [1]

Die Anwendung der Bezeichnungen:

$$(3) \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\nu \quad \text{bezw.} \quad \overline{\underline{\lim}}_{x=x_0}\, \varphi(x)$$

soll dann bedeuten, dass in dem betreffenden Zusammenhange ganz nach Willkür der obere oder untere Limes gewählt werden darf. Hiernach sagt z. B. eine Beziehung von der Form:

$$(4) \qquad \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\nu = a$$

nichts anderes aus, als dass der obere und untere Limes von $a_\nu$ den gemeinsamen Werth $a$ besitzen d. h. dass in dem gewöhnlichen Sinne $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu = a$ wird.

---

[1] Ich habe bisher den oberen und unteren Limes einer Zahlenfolge $a_\nu$ mit

$$\lim_{\nu=\infty} \sup a_\nu, \quad \lim_{\nu=\infty} \inf a_\nu$$

bezeichnet. Wie ich nachträglich bemerkt habe und an dieser Stelle ausdrücklich erwähnen möchte, sind diese Bezeichnungen wohl zuerst von Herrn Pasch eingeführt worden: Math. Ann. Bd. **30** (**1887**), S. **134**.

Der Nutzen der obigen Bezeichnungsweise tritt besonders deutlich hervor, wenn es sich um mehrere nach einander zu vollziehende Grenz-Uebergänge handelt. Namentlich gestattet dieselbe, gewisse Sätze über den Zusammenhang der Grenzwerthe von Functionen mehrerer Variablen bei simultanen und successiven Grenz-Uebergängen äusserst einfach und praegnant darzustellen. Hierher gehört z. B. der von mir bei anderer Gelegenheit[1]) ausgesprochene und bewiesene, im folgenden zu benützende Satz:

Ist:

$$\lim_{\mu=\infty}\inf a_{\mu\nu} = l_\nu, \quad \lim_{\mu=\infty}\sup a_{\mu\nu} = L_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lim_{\nu=\infty}\inf a_{\mu\nu} = l_\mu, \quad \lim_{\nu=\infty}\sup a_{\mu\nu} = L'_\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, \ldots),$$

so hat man stets:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty} l_\nu = \lim\limits_{\nu=\infty} L_\nu \\ \lim\limits_{\mu=\infty} l'_\mu = \lim\limits_{\mu=\infty} L'_\mu \end{array}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_{\mu\nu},$$

sobald ein endlicher oder bestimmt unendlicher $\lim\limits_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_{\mu\nu}$ existirt.

Dieser Satz lautet jetzt einfach folgendermaassen:

Man hat:

$$(5)\qquad \left.\begin{array}{l} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\left(\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_{\mu\nu}\right) \\ \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\left(\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_{\mu\nu}\right) \end{array}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_{\mu\nu}$$

allemal, wenn der rechts stehende Grenzwerth existirt.[2])

---

[1]) Sitz.-Ber. 1897, S. 105.

[2]) Mit Berücksichtigung der an Gl. (4) geknüpften Bemerkung kann man natürlich statt Gl. (5) auch schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu=\infty}\left(\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_{\mu\nu}\right) \\ \lim\limits_{\mu=\infty}\left(\overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_{\mu\nu}\right) \end{array}\right\} = \lim_{\mu=\infty,\,\nu=\infty} a_{\mu\nu}.$$

II. Oberes und unteres Integral. Es sei $f(x)$ endlich und eindeutig definirt im Intervalle $x_0 < x < X$. Wird das letztere in $n$ beliebige Theil-Intervalle $\delta_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ zerlegt und bedeutet $G_\nu$ die obere, $g_\nu$ die untere Grenze von $f(x)$ im Intervalle $\delta_\nu$, so haben die Summen:

$$\sum_1^n {}^\nu G_\nu \delta_\nu = S_n \text{ eine bestimmte untere Grenze } S,$$

$$\sum_1^n {}^\nu g_\nu \delta_\nu = s_n \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{obere} \quad \text{„} \quad s.$$ [1]

Alsdann lässt sich zeigen,[2] dass:

$$\text{(6)} \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu G_\nu \delta_\nu = S, \quad \lim_{\delta_\nu = 1} \sum_1^n {}^\nu g_\nu \delta_\nu = s,$$

und zwar unabhängig von der Wahl der Theil-Intervalle $\delta_\nu$ und der besonderen Art des Grenz-Ueberganges. Speciell ist also auch:

$$\text{(7)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A}{n} \cdot \sum_1^n {}^\nu G_\nu = S, \quad \lim_{n=\infty} \frac{A}{n} \cdot \sum_1^n {}^\nu g_\nu = s,$$

wenn $X - x_0 = A$, $\delta_\nu = \dfrac{A}{n}$ gesetzt wird, und $G_\nu$ bezw. $g_\nu$ wiederum die obere bezw. untere Grenze von $f(x)$ im $\nu^{\text{ten}}$ Theil-Intervalle bezeichnet.

$S$ heisst sodann das obere, $s$ das untere Integral von $f(x)$ für das Intervall $(x_0, X)$ — in Zeichen (nach dem Vorgange des Herrn Peano):

---

[1]) Diese Art, die Zahlen $S$ und $s$ zu definiren (statt, wie gewöhnlich geschieht, ihre Definition an die Gleichungen (6) anzuknüpfen) rührt, wie ich einer Mittheilung des Herrn Stolz entnehme (Monatsh. f. Math. VIII, S. 95), von Herrn Peano her: Atti Torin. T. XVIII, p. 441 (1883). Dieselbe findet sich auch in der oben citirten Abhandlung des Herrn Pasch: a. a. O. S. 144.

[2]) S. z. B. Pasch, a. a. O. S. 143. — C. Jordan, Cours d'analyse, 2de éd., T. I, p. 33. —

$$(8) \qquad S = \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx, \quad s = \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x) \cdot dx.$$

Die von mir im folgenden anzuwendende Bezeichnung:

$$(9) \qquad \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} f(x)\, dx$$

soll dann wiederum ausdrücken, dass in der betreffenden Formel das obere oder untere Integral ganz nach Willkür gewählt werden kann.

III. Das obere und untere Integral als oberer und unterer Limes. Das obere bezw. untere Integral lässt sich auch noch in anderer Weise, nämlich als oberer bezw. unterer Limes der Summen von der Form $\sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu$ auffassen (wo $\xi_\nu$ dem Intervalle $\delta_\nu$ angehört). Es gilt nämlich der folgende Satz:

Bedeutet $\xi_\nu$ irgend eine und jede beliebige Stelle des Intervalles $\delta_\nu$, so gelten die Beziehungen:

$$(10) \qquad \overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = S, \quad \underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_{1}^{n}{}^{\nu} f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = s,$$

bei beliebiger Wahl der Theil-Intervalle $\delta_\nu$. Insbesondere wird also:

$$(11) \qquad \begin{aligned} \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{A}{n} \cdot \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\nu + \vartheta_\nu) A}{n}\right) &= S, \\ \underline{\lim_{n=\infty}} \frac{A}{n} \cdot \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\nu + \vartheta_\nu) A}{n}\right) &= s \end{aligned}$$

(wo: $0 < \vartheta_\nu \leq 1$).

Beweis. Man hat bei jeder Wahl der Theil-Intervalle $\delta_\nu$, laut Definition:

(a) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu \geqq S.$$

Andererseits lässt sich in Folge der Beziehung (6) $\delta_\nu$ so klein, $n$ so gross annehmen, dass:

(b) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu < S + \varepsilon \text{ etwa für: } \delta_\nu \leqq \delta,\ n \geqq N,$$

wenn $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben wird.

Da sodann für jede Wahl der Stelle $\xi_\nu$ innerhalb des Intervalles $\delta_\nu$ stets: $f(\xi_\nu) \leqq G_\nu$, so wird auch:

(c) $$\sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu < S + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \delta_\nu \leqq \delta, \quad n \geqq N.$$

In Folge der Definition von $G_\nu$ (als obere Grenze der Werthe $f(\xi_\nu)$ im Intervalle $\delta_\nu$) muss es aber in $\delta_\nu$ Stellen $\xi'_\nu$ geben, sodass:

$$G_\nu - f(\xi'_\nu) < \frac{\varepsilon}{A} \quad (\text{wo: } A = X - x_0 = \sum_1^n{}^{\nu}\, \delta_\nu),$$

und daher:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu - \sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi'_\nu) \cdot \delta_\nu < \varepsilon$$

d. h.

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi'_\nu) > \sum_1^n{}^{\nu}\, G_\nu\, \delta_\nu - \varepsilon$$

(d) $$> S - \varepsilon \qquad \text{(s. Ungl. (a)).}$$

Aus Ungl. (c) und (d) folgt dann schliesslich, dass in der That:

$$\overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = S, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog ergiebt sich:

$$\underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n{}^{\nu}\, f(\xi_\nu) \cdot \delta_\nu = s. -$$

IV. Das bestimmte Integral. Ist $S = s$, und nur in diesem Falle, so wird nach III:

$$(12)\qquad \overline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu)\cdot\delta_\nu = \underline{\lim_{\delta_\nu = 0}} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu)\cdot\delta_\nu,$$

d. h. dann existirt ein bestimmter $\lim\limits_{\delta_\nu = 0} \sum\limits_1^n {}^\nu f(\xi_\nu)\cdot\delta_\nu$, welcher als das bestimmte Integral von $f(x,y)$ in den Grenzen $x_0$ und $X$ bezeichnet wird, und man setzt, wie üblich:

$$(13)\qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu f(\xi_\nu)\cdot\delta_\nu = \int_{x_0}^X f(x)\cdot dx.$$

In diesem Falle besteht also die Beziehung:

$$(14)\qquad \overline{\int_{x_0}^{X}} f(x)\cdot dx = \int_{x_0}^X f(x)\cdot dx.$$

V. Das Doppel-Integral. Ist $f(x,y)$ endlich und eindeutig definirt im Innern und auf den Grenzen des continuirlichen und quadrirbaren[1]) Bereiches $T$, und bedeutet $\sum\limits_1^n {}^\nu t_\nu$ irgend eine Zerlegung von $T$ in $n$ quadrirbare Theilbereiche $t_\nu$, ferner $G_\nu$ die obere, $g_\nu$ die untere Grenze von $f(x,y)$ für den Theilbereich $t_\nu$, so besitzt von den beiden Summen:

$$(15)\qquad \sum_1^n {}^\nu G_\nu\cdot t_\nu = S_n,\quad \sum_1^n {}^\nu g_\nu\cdot t_\nu = s_n$$

die erstere eine untere Grenze $S$, die letztere eine obere Grenze $s$. Und es lässt sich wiederum zeigen,[2]) dass bei beliebiger Wahl der Theilbereiche $t_\nu$ und unabhängig von der

[1]) Mit anderen Worten: die Punkte von $T$ sollen ein stetiges System bilden, dem eine bestimmte Flächenzahl zukommt. Es erscheint mir pädagogisch zweckmässig, den Begriff der Flächenzahl, welche ja in Wahrheit nur einen speciellen Fall des Doppel-Integrals bildet, bei dessen allgemeiner Definition als bereits bekannt vorauszusetzen. —

[2]) S. z. B. Serret-Harnack, Bd. II, Art. 581. — C. Jordan, a. a. O. p. 33.

besonderen Art des Grenz-Ueberganges die Beziehungen bestehen:

$$(16)\qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu\, G_\nu \cdot t_\nu = S, \qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu\, g_\nu \cdot t_\nu = s,$$

wenn $\delta_\nu$ den grössten Durchmesser von $t_\nu$ bedeutet. $S$ heisst alsdann das obere, $s$ das untere Doppel-Integral[1]) von $f(x, y)$, erstreckt über den Bereich $T$.

Die Bedingung $S = s$ ist dann wiederum nothwendig und hinreichend für die Existenz eines bestimmten Grenzwerthes:

$$\lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu\, f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot t_\nu$$

(wo $(\xi_\nu, \eta_\nu)$ eine beliebige Stelle von $t_\nu$ bedeutet). Derselbe heisst das über $T$ erstreckte Doppel-Integral von $f(x, y)$, in Zeichen:

$$(17)\qquad \lim_{\delta_\nu = 0} \sum_1^n {}^\nu\, f(\xi_\nu, \eta_\nu) \cdot t_\nu = \iint_{(T)} f(x, y) \cdot dt.$$

VI. Das Doppel-Integral mit constanten Grenzen und seine Reduction auf ein iterirtes Integral. Ist der Bereich $T$ ein Rechteck mit den Eckpunkten $(x_0, y_0)$, $(X, y_0)$, $(X, Y)$, $(x_0, Y)$, so mag das entsprechende Doppel-Integral mit $\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy$ bezeichnet werden. Wählt man alsdann als Theil-Bereiche $m \cdot n$ Rechtecke mit den Grundlinien $\delta_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots m)$ und den Höhen $\varepsilon_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, so hat man laut Definitions-Gleichung (17):

$$(18)\qquad \int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \lim_{\delta_\mu = 0,\, \varepsilon_\nu = 0} \sum_1^m {}^\mu \sum_1^n {}^\nu\, f(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}) \cdot \delta_\mu \cdot \varepsilon_\nu,$$

[1]) Andere Definitionen und zugleich Verallgemeinerungen dieser Begriffe mit ausschliesslicher Benützung von geradlinig begrenzten Theilbereichen hat neuerdings Herr Stolz gegeben: „Zwei Grenzwerthe, von welchen das obere Integral ein besonderer Fall ist.“ Sitz.-Ber. d. Wiener Akad. 1897, S. 453 ff.

und, wenn man die $\delta_\mu (\mu = 1, 2, \ldots m)$, ebenso die $\varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, \ldots n)$ einander gleich macht:

$$(19) \quad \begin{aligned} &\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\!\!\int f(x,y) \cdot dx \cdot dy \\ &= \lim_{m=\infty, n=\infty} \frac{AB}{mn} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m},\ y_0 + \frac{(\nu + \vartheta'_\nu) B}{n}\right) \end{aligned}$$

wo: $X - x_0 = A, \quad Y - y_0 = B, \quad 0 \lesseqgtr \vartheta_\mu \lesseqgtr 1, \quad 0 \lesseqgtr \vartheta'_\nu \lesseqgtr 1.$

Dann soll gezeigt werden, dass:

$$(20) \quad \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\!\!\int f(x,y) \cdot dx \cdot dy \begin{cases} = \overline{\int\limits_{x_0}^{X}} dx \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} f(x,y) \cdot dy \\ = \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}} dy \overline{\int\limits_{x_0}^{X}} f(x,y) \cdot dx\ ^{1)} \end{cases}$$

allemal wenn das betreffende Doppel-Integral im Sinne der Def.-Gleichung (18) existirt.[2]) —

Beweis I. Nach dem am Schlusse von Art. I citirten Satze oder, genauer gesagt, mit Hülfe einer leicht vorzunehmenden Modification[3]) desselben, ergiebt sich, wenn das fragliche Doppel-Integral, also der Grenzwerth (19) existirt, unmittelbar:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)}\!\!\int f(x,y) \cdot dx \cdot dy \\ &= \lim_{m=\infty} \frac{A}{m} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \lim_{n=\infty} \frac{B}{n} \sum_0^{n-1}{}^{\nu} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m},\ y_0 + \frac{(\nu + \vartheta'_\nu) B}{n}\right) \end{aligned}$$

d. h. mit Berücksichtigung von Gl. (11) und (8):

---

1) Selbstverständlich kann man bei den äusseren Integralen auch einfach: $\overline{\int\limits_{x_0}^{X}},\ \overline{\int\limits_{y_0}^{Y}}$ schreiben — cf. Gl. (14).

2) Es handelt sich, mit anderen Worten, hier immer nur um „eigentliche" Doppel-Integrale.

3) Diese Modification ist erforderlich wegen der Unbestimmtheit der mit $\vartheta_\mu$, $\vartheta'_\nu$ bezeichneten Zahlen.

$$\int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \lim_{m=\infty} \frac{A}{m} \sum_0^{m-1}{}^{\mu} \int_{y_0}^{Y} f\left(x_0 + \frac{(\mu + \vartheta_\mu) A}{m}, y\right) \cdot dy$$

und schliesslich:

$$\int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{x_0}^{X} dx \int_{y_0}^{Y} f(x, y) \cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog erhält man:

$$\int\!\!\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x, y) \cdot dx \cdot dy = \int_{y_0}^{Y} dy \int_{x_0}^{X} f(x, y) \cdot dx.$$

Beweis II. Es sei $\delta_\mu = x_\mu - x_{\mu-1}$, $\varepsilon_\nu = y_\nu - y_{\nu-1}$, ferner $G_{\mu\nu}$ die obere, $g_{\mu\nu}$ die untere Grenze von $f(x, y)$ in dem betreffenden Rechtecke, sodass also:

$$g_{\mu\nu} \leqq f(\xi_\mu, \eta_\nu) \leqq G_{\mu\nu} \quad \text{für:} \begin{cases} x_{\mu-1} \leqq \xi_\mu \leqq x_\mu \\ y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu. \end{cases}$$

Dagegen soll mit $G_\nu(\xi_\mu)$, $g_\nu(\xi_\mu)$ die obere bezw. untere Grenze von $f(\xi_\mu, y)$ im Intervalle $(y_{\nu-1}, y_\nu)$ bei constantem $\xi_\mu$ bezeichnet werden, also:

$$g_\nu(\xi_\mu) \leqq f(\xi_\mu, \eta_\nu) \leqq G_\nu(\xi_\mu) \quad \text{für:} \; y_{\nu-1} \leqq \eta_\nu \leqq y_\nu.$$

Alsdann ist offenbar:

$$g_{\mu\nu} \leqq g_\nu(\xi_\mu) \leqq G_\nu(\xi_\mu) \leqq G_{\mu\nu}$$

und daher:

$$\sum_1^n{}^{\nu} g_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_1^n{}^{\nu} g_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu.$$

Andererseits hat man nach Art. II:

$$\sum_1^n{}^{\nu} g_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu \leqq \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu \cdot y) \cdot dy \leqq \overline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_\nu(\xi_\mu) \cdot \varepsilon_\nu$$

und daher a fortiori:

$$\sum_1^n{}^{\nu} g_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu \leqq \overline{\underline{\int_{y_0}^{Y}}} f(\xi_\mu, y) \cdot dy \leqq \sum_1^n{}^{\nu} G_{\mu\nu} \cdot \varepsilon_\nu.$$

Daraus folgt weiter:

$$\sum_1^m{}^{\mu}\sum_1^n{}^{\nu} g_{\mu\nu}\cdot\delta_\mu\cdot\varepsilon_\nu \leqq \sum_1^m{}^{\mu}\delta_\mu\cdot\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(\xi_\mu,y)\cdot dy \leqq \sum_1^m{}^{\mu}\sum_1^n{}^{\nu} G_{\mu\nu}\cdot\delta_\mu\cdot\varepsilon_\nu,$$

und somit für $\lim m=\infty$, $\lim n=\infty$, unter der einzigen Voraussetzung, dass das betreffende Doppel-Integral in dem angegebenen Sinne existirt:

$$\text{(20a)}\qquad \int\int_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy = \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} dx \overline{\underline{\int_{y_0}^{Y}}} f(x,y)\cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Analog ergiebt sich wiederum:

$$\text{(20b)}\qquad \int\int_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy = \overline{\underline{\int_{y_0}^{Y}}} dy \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} f(x,y)\cdot dx.$$

Zusatz. Man bemerke, dass die rechte Seite der Formeln (20) in jedem Falle durchaus wohldefinirte Operationen enthält, auch wenn keins der einfachen bestimmten Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)\cdot dx$ existirt: für die Gültigkeit jener Formeln ist eben nur die Existenz des betreffenden Doppel-Integrals erforderlich.

Beispiel. Denkt man sich jeden Werth einer Veränderlichen $x$ in der üblichen Weise[1]) durch einen endlichen oder unendlichen Decimalbruch dargestellt, so möge die Anzahl der jedesmal erforderlichen Decimalstellen durch $p_x$ bezeichnet werden (sodass also $p_x$ nur dann einen endlichen Werth besitzt, wenn $x$ von der Form $\frac{m}{10^n}$ ist, während in jedem anderen Fall $p_x=\infty$ wird). Alsdann ist offenbar (bei beliebiger Wahl von $x_0$ und $X$):

$$\text{(a)}\qquad \int_{x_0}^{X}\frac{1}{p_x+1}\,dx = 0,$$

---

[1]) D. h. mit Ausschluss solcher unendlicher Decimalbrüche, welche die Periode 9 besitzen.

da es in jedem endlichen Intervalle ($x_0$, $X$) immer nur eine endliche Anzahl von Stellen $x$ giebt, für welche $p_x$ unter einer beliebig gross anzunehmenden, also $\frac{1}{p_x+1}$ über einer beliebig klein anzunehmenden positiven Zahl liegt. Setzt man jetzt:

(b) $$f(x,y) = \frac{1}{p_x+1} + \frac{1}{p_y+1},$$

(sodass also $f(x,y) = 0$, ausser wenn mindestens eine der beiden Veränderlichen $x$, $y$ durch einen endlichen Decimalbruch darstellbar ist), so erkennt man analog, dass:

(c) $$\int\int_{(x_0, y_0)}^{(X, Y)} f(x,y)\cdot dx\cdot dy = 0.$$

Andererseits hat man (mit Benützung von Gl. (a[1])):

(d) $$\overline{\int_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = \frac{1}{p_x+1}(Y-y_0), \quad \underline{\int_{y_0}^{Y}} f(x,y)\cdot dy = 0,$$

(e) $$\overline{\int_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = \frac{1}{p_y+1}(X-x_0), \quad \underline{\int_{x_0}^{X}} f(x,y)\cdot dx = 0,$$

sodass also keins der beiden Integrale $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy$, $\int_{x_0}^{X} f(x,y)$ existirt. Nichtsdestoweniger findet man unmittelbar (wiederum mit eventueller Benützung von Gl. (a)):

(f) $$\int_{x_0}^{X} dx \overline{\underline{\int_{y_0}^{Y}}} f(x,y)\cdot dy = \int_{y_0}^{Y} dy \overline{\underline{\int_{x_0}^{X}}} f(x,y)\cdot dx = 0$$

d. h. die zweimalige Integration liefert den nämlichen Werth, wie das Doppel-Integral, und zwar gleichgültig, ob man für jedes der inneren Integrale in Gl. (*f*) das betreffende obere oder untere Integral in Rechnung zieht.[1])

[1]) Ein ähnliches Beispiel, bei welchem nur das eine Integral $\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\cdot dy$ ein analoges Verhalten zeigt, gab schon Du Bois Reymond (a. a. O. S. 278).

VII. Reduction des Doppel-Integrals auf ein iterirtes Integral für einen (im wesentlichen) beliebig begrenzten Bereich. Es sei $T$ ein quadrirbarer Bereich, dessen Begrenzung von jeder Parallelen zur $Y$-Axe nicht mehr als zweimal geschnitten wird. Sind dann $x_0$, $X$ die äussersten Abscissen, denen noch Punkte der Begrenzungs-Curve entsprechen, und wird diese letztere durch die zu $x_0$ und $X$ gehörigen Ordinaten in die beiden Curvenbögen zerlegt:

$$y = \varphi(x), \quad y = \Phi(x) \quad (\Phi(x) \geqq \varphi(x)),$$

so gilt die Beziehung:

$$(21) \qquad \iint_{(T)} f(x,y) \cdot dT = \int_{x_0}^{X} dx \int_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y) \cdot dy,$$

falls das Doppel-Integral in dem angegebenen Sinne existirt.

Beweis. Es bedeute $g(x,y)$ eine Function von der Beschaffenheit, dass:

$$g(x,y) = f(x,y) \text{ für alle } (x,y) \text{ des Bereiches } T$$
$$g(x,y) = 0 \quad " \quad " \quad " \text{ ausserhalb } T.$$

Ist dann $U$ irgend ein den Bereich $T$ einschliessender Bereich, so existirt das Doppel-Integral $\iint g(x,y) \cdot dU$ über den Bereich $U$ erstreckt, da die Integrabilität von $g(x,y)$ durch die Unstetigkeit längs der Grenz-Curve von $T$ offenbar nicht alterirt wird. Zugleich ergiebt sich, wenn $U = T + T'$ gesetzt wird:[1])

$$\iint_{(U)} g(x,y) \cdot dU = \iint_{(T)} f(x,y) \cdot dT \quad (\text{wegen: } \iint_{(T')} g(x,y) \cdot dT' = 0).$$

Bedeutet nun $y_0$ den kleinsten, $Y$ den grössten Ordinatenwerth für die Grenz-Curve von $T$, und wählt man für den Bereich $U$ dasjenige Rechteck, welches durch die vier Geraden: $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$ begrenzt wird, so nimmt die letzte Gleichung (bei Vertauschung ihrer beiden Seiten) die folgende Form an:

---

[1]) Diese Zerlegung $U = T + T'$ soll so aufgefasst werden, dass derjenige Theil der Begrenzung von $T$, welcher auch $T'$ begrenzt, zweimal gezählt, nämlich sowohl zu $T$ als zu $T'$ gerechnet wird.

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y)\cdot dT = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(X,Y)}\!\!\int g(x,y)\cdot dx\cdot dy,$$

und daher mit Anwendung von Gl. (20a):

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y)\cdot dT = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{y_0}^{Y} g(x,y)\cdot dy.$$

Da aber — in Folge der Definition von $g(x,y)$ — für jeden dem Intervalle $(x_0, X)$ angehörigen Werth $x$ offenbar die Beziehung besteht:

$$\int\limits_{y_0}^{Y} g(x,y)\cdot dy = \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\cdot dy,$$

so ergiebt sich schliesslich:

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y)\cdot dT = \int\limits_{x_0}^{X} dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\Phi(x)} f(x,y)\cdot dy, \quad \text{q. e. d.}$$

Zusatz. Wird die Begrenzungs-Curve von $T$ von jeder Parallelen zur $X$-Axe höchstens zweimal geschnitten, so findet man analog:

$$\iint\limits_{(T)} f(x,y)\cdot dT = \int\limits_{y_0}^{Y} dy \int\limits_{\psi(y)}^{\Psi(y)} f(x,y)\cdot dx, \tag{22}$$

wenn die Gleichungen:

$$x = \psi(y), \quad x = \Psi(y) \quad (\text{wo: } \Psi(y) \geqq \psi(y))$$

die beiden Curvenbögen darstellen, in welche die Grenz-Curve durch die beiden Geraden $x = x_0$, $x = X$ zerlegt wird.

Hierzu sei noch bemerkt, dass $T$ offenbar eo ipso quadrirbar ist, wenn die Grenz-Curve von jeder Parallelen sowohl zur $X$- als zur $Y$-Axe nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschnitten wird.

# Das Fraunhofer-Objectiv.

Von **Sigmund von Merz.**

*(Eingelaufen 15. Januar.)*

Im VII. und VIII. Jahrgang der Zeitschrift für Instrumenten-Kunde kommen C. Moser und Dr. Hugo Krüss wieder auf Fraunhofer's Heliometer-Objectiv der Königsberger Sternwarte, als den Typus der Fraunhofer-Objective zurück, mit dessen Constructions-Verhältnissen sich bereits früher schon Bessel[1]) und Hansen[2]) beschäftiget hatten. Es wandte sich Herr Dr. Krüss wohl auch einmal schriftlich an mich, ihm nähere Angaben über die Glasarten, aus welchen das fragliche Heliometer-Objectiv hergestellt sei, zukommen zu lassen. Leider konnte ich diesem Wunsche damals nicht entsprechen, da mir zuverlässige Daten nicht zu Handen schienen. Nun mir mehr Musse geworden, all das in meinem Besitze befindliche handschriftliche Material der älteren Periode des Fraunhofer'schen Institutes wiederholt zu stöbern und zu sichten, war ich endlich so glücklich, einen sogenannten Radius-Zettel, datirt vom 5. Oktober 1822 „für Flintglas No. 43 und Crownglas No. 32" mit den Werthen:

$$a = 72'' \quad f = 53''.500 \quad g = 21''.304 \quad F = -21''.736 \quad G = 74''.841$$

zu finden, welcher für $a = 94'' = 1127'''.991$ umgerechnet, die Radien:

[1]) Schuhmacher's astronomische Nachrichten 18. Band 1841.

[2]) Abhandlungen der math.-phys. Classe der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften X. Band 1871.

$$f = 69''.847 = 838^{L}.166 \qquad g = 27''.814 = 333^{L}.763$$
$$F = 28''.378 = 340^{L}.531 \qquad G = 97''.709 = 1172^{L}.51$$

ergiebt, wie sie eben Bessel als die ihm von Utzschneider mitgetheilten Werthe im 18. Bande der astronomischen Nachrichten Seite 415 unter folgender Bezeichnung:

$$r = 838^{L}.164 \quad \varrho = 333^{L}.768 \qquad r' = 340^{L}.536 \quad \varrho' = 1172^{L}.508$$

aufführt.

Diese Uebereinstimmung allein schon müsste die Annahme rechtfertigen, dass das Königsberger-Objectiv aus diesen bisher unbekannt gebliebenen Gläsern: Flint. No. 43 und Crown. No. 32 besteht. Es findet sich eine weitere Bestätigung dafür aber auch in dem Brechungs- und Zerstreuungs-Verhältnisse besagter Gläser, wie ich es den noch vorhandenen Brechungs-Bögen Fraunhofers entnehme und welchen wohl auch Utzschneider seine Daten entnommen haben dürfte.

Es verzeichnet Tabelle I dieser Brechungs-Bögen für:

| Flint. No. 43 | Crown. No. 32 |
|---|---|
| $Bn' = 1.628463$ | $Bn = 1.523746$ |
| $Cn' = 1.630307$ | $Cn = 1.524738$ |
| $Dn' = 1.635451$ | $Dn = 1.527357$ |
| $En' = 1.642271$ | $En = 1.530726$ |
| $Fn' = 1.648455$ | $Fn = 1.533699$ |
| $Gn' = 1.660623$ | $Gn = 1.539271$ |
| $Hn' = 1.671168$ | $Hn = 1.543985$ |

woraus die partiellen Zerstreuungen

$$Dn' - Cn' = 0.005144 \qquad Dn - Cn = 0.002619$$
$$En' - Dn' = 0.006820 \qquad En - Dn = 0.003369$$
$$Fn' - En' = 0.006184 \qquad Fn - En = 0.002973$$

$$Fn' - Cn' = 0.018148 = dn'$$
$$Fn - Cn = 0.008961 = dn$$

sich berechnen und schliesslich der Differential-Quotient

$$dn' : dn = 2.02522$$

sich ergiebt.

Fraunhofer bediente sich somit für den practischen Fall der Formel $\int\limits_{C}^{F}\frac{dn'}{dn}$ für den Zerstreungs-Quotienten und wie die vorerwähnten Bögen weiter zeigen der Formel

$$n = \frac{Cn + Dn + En + Fn}{4},$$

entsprechend einer Wellenlänge von 564.5, für das mittlere $n$, im gegebenen Falle also der Werthe

$$n' = 1.639121 \qquad n = 1.529130$$

wie dies völlig wieder mit Utzschneiders Angabe an Bessel übereinstimmt. Mit diesen Constanten und den Dicken $d = 6^{L}.000$ (Crownglaslinse) und $d_{,} = 4^{L}.000$ (Flintglaslinse), ferner 0.000 Linsenabstand wurde das Heliometer-Objectiv von Königsberg des öfteren rechnerisch geprüft.

Leider findet sich unter den hinterlassenen Papieren Fraunhofer's keine vollendete Rechnung für diese Gläser vor. Eine für Flint. No. 43 und Crown. No. 32 aufgefundene Rechnung endet mit $+ 0.29$ Correction der Randabweichung.

Ich sah mich deshalb veranlasst, das vorerwähnte Objectiv vom 5. October 1822 auf seine Abweichungen zu prüfen. Dabei fand ich die Vereinigungsweite der mittleren Strahlen ($n = 1.52913$ $n' = 1.639121$) nach Fraunhofers Bezeichnung $DH = 71''.968$ (Axe), die Vereinigungsweite der farbigen Strahlen ($n = 1.538091$ $n' = 1.657269$) $DH = 71''.9894$ (Axe), sohin eine Differenz von $+ 0.0214$ als Farbenabweichung. Die Vereinigungsweite der mittleren Randstrahlen ergab ein $DH = 71''.9641$ und die Differenz $DH_R - DH_A = 0.0039$ als Randabweichung gegen $+ 0.29$ von oben.

Als ich alsdann die factischen Werthe von Bessel in Pariser Zollen und mit Fraunhofer's Bezeichnung

$$f = 69''.847 \quad g = 27''.814 \quad F = - 28''.378 \quad G = 97''.709$$

Dicke der Crownglaslinse $AB = 0''.5$, Dicke der Flintglaslinse $CD = 0''.33333$ und halbe Objectiv-Oeffnung $X = 3''$ in Rech-

nung zog, fanden sich für die vorgenannten Strahlen die Werthe:

$DH = 93''.975944$ (mittlerer Axenstrahl)

$DH = 94''.0036$ (farbiger Axenstrahl)

Differenz = + 0.027656

$DH = 93''.971617$ (mittlerer Randstrahl)

Differenz = — 0.004327

oder die fast gleiche Correction des Objektives vom October 1822.

Würde die Rechnung für die von Hansen benützten Strahlen

| | | |
|---|---|---|
| (roth) | $n = 1.518700$ | $n' = 1.618000$ |
| (indigo) | $n = 1.539560$ | $n' = 1.660242$ |

weiter durchgeführt, ergäbe sich ein $DH = 93''.944164$ (rother Axenstrahl), $DH = 94''.007544$ (indigo Axenstrahl).

Diese Correction scheint Fraunhofer auch für genügend erachtet zu haben. Sprechen dafür, dass dieselbe thatsächlich genügt, einerseits schon die allgemeinen Erfolge der Fraunhofer-Objective und für das Königsberger Objectiv speciell Bessels Anerkennung und Auffindung[1]) der Parallaxe von 61 Cygni, so vermag diese Ansicht ins weitere der folgende Umstand zu stützen.

Es liegen mir für die Gläser „Flint. No. 43 und Crown. No. 32" noch fünf Radiuszettel vor und zwar:

1. für $a = 60''$ (vom gleichen Datum, wie oben, 5. October 1822)

$f = 44''.583$ $g = 17''.753$ $F = -18''.114$ $G = 62''.367$

2. für $a = 48''$ (vom 8. November 1822)

$f = 35''.666$ $g = 14''.203$ $F = -14''.491$ $G = 49''.894$

3. für $a = 42''.5$ (vom 28. November 1822)

$f = 31''.580$ $g = 12''.575$ $F = -12''.830$ $G = 44''.177$

4. für $a = 27''.8$ (vom 6. August 1823)

$f = 20''.65$ $g = 8''.22$ $F = -8''.39$ $G = 28''.89$

---

[1]) Humboldt, Kosmos III. Band. S. 273.

5. für $a = 17''.1$ vom 9. September 1823)

$$f = 12''.706 \quad g = 5''.060 \quad F = -5''.162 \quad G = 17''.774$$

woraus hervorgeht, dass von den Gläsern Flint. No. 43 und Crown. No. 32 vom Jahr 1822 bis zum Jahr 1823 astronomische Objective geschliffen wurden. Aus dem Prüfungs-Ergebniss musste Fraunhofer Raisonement und Calcul wiederholt für richtig und genügend befunden haben, denn von ihm darf doch nicht angenommen werden, dass er während der Zeit eines Jahres Fehler nicht entdeckt und entsprechend corrigirt haben würde, wenn sich dieselben von Einfluss gezeigt hätten, um so mehr als schon zwischen der Inangriffannahme des einen und anderen Objectives dieser diversen Brennweiten elf Monate (5. October 1822 — 9. September 1823) dazwischen lagen.

Sämmtliche fünf Radiuszettel stellen, wenn auf die Brennweite des Königsberger Heliometer-Objectives bezogen, dieses selbst wieder bis auf das Zehntausendtel eines Zolles dar.

Hätte Fraunhofer die Farben-Correction in gleichem Grade, wie bezüglich des Aplanatismus die Kugelabweichung berücksichtigen wollen, so hätte er es ja leicht gekonnt.

Dass das Fraunhofer'sche Objectiv, wie zuerst Arnold[1])

---

[1]) Arnold „die neueren Erfindungen und Verbesserungen in Betreff der optischen Instrumente." Quedlinburg 1833. Arnold's Untersuchungen verdienten eine classische Arbeit genannt zu werden. Es mag hier am Platze sein zu zeigen, wie genau Arnold's gemessene Werthe mit den factischen Werthen Fraunhofer's übereinstimmen. Ich wähle dafür Objectiv Nr. 3 (Arnold Seite 38) aus den Fraunhofer Gläsern Flint. Nr. 60 und Crown. Nr. 33 bestehend, dessen noch vorhandener Radius-Zettel Fraunhofer's vom 12. October 1825 für $a = 42''.5$ folgende Radien verzeichnet:

$$f = 28''.785 \quad g = 11''.463 \quad F = -11''.677 \quad G = 52''.229.$$

Dieselben in Wiener Zoll umgerechnet ergeben die Werthe

$$f = 29''.580 \quad g = 11''.780 \quad F = -12''.000 \quad G = 53''.671$$

im Vergleiche dagegen Arnold's gemessene Werthe dieses Objectives Nr. 3

$$f = 29''.581 \quad g = 11''.782 \quad F = -12''.032 \quad G = 53''.690$$

die wohl kaum nennenswerthen Differenzen

$$f = +0.001 \quad g = +0.002 \quad F = +0.032 \quad G = +0.019$$

darauf aufmerksam macht, auch für divergirende Strahlen die sphärische Abweichung hebt, erklärt sich aus dem Umstande, dass Fraunhofer bei Prüfung seiner Objective sich terrestrischer[1]) Objecte bediente.

Wie ein höher corrigirtes Objectiv sich ergeben würde, will ich in nachgehendem zu zeigen versuchen, um damit sowohl das historisch gewordene Objectiv in seinem Werden vorführen, als auch Fraunhofer's Rechnungsmethode zur näheren Anschauung bringen zu können.

Der Fraunhofer'sche Calcul bedient sich im allgemeinen der Klügel'schen Formeln[2]), insbesondere aller Bezeichnungen, die Klügel bei seinem in Gilbert's Annalen von 1810 beschriebenem verbessertem Objective gebraucht. Ich führe die Rechnung mit Fraunhofer für den Strahl der Wellenlänge 564.5, nehme $dn' = 0.018148$, $dn = 0.008961$, wie oben gezeigt, somit $n' = 1.639121$ $n = 1.529130$ (für den mittleren Strahl) und $n' = 1.657269$ $n = 1.538091$ (für den farbigen Strahl).

Vorbereitend für den Calcul ergeben die Gleichungen für die Hülfsgrössen[3]) $\mu$. $\nu$. $\varrho$. $\sigma$. $\tau$. und zwar für

Flintglas No. 43

| | | |
|---|---|---|
| $\mu' = 0.7658755$ | (log) | 9.8841583 |
| $\nu' = 0.2940533$ | | 9.4684261 |
| $\varrho' = 0.0571156$ | | 8.7567551 |
| $\sigma' = 1.5075327$ | | 0.1782667 |
| $\tau' = 0.8306180$ | | 9.9194041 |

---

zeigen. Die optischen Constanten von Flint. Nr. 60 und Crown. Nr. 33

| sind nach Arnold | nach Fraunhofer |
|---|---|
| $n = 1.530800$ | $n = 1.531394$ |
| $n' = 1.616420$ | $n' = 1.616506$ |
| $dn = 0.009010$ | $dn = 0.009010$ |
| $dn' = 0.016563$ | $dn' = 0.016509$. |

[1]) Lamont „Astronomie und Erdmagnetismus." Stuttgart 1851, S. 23, § 27.

[2]) Klügel „Analytische Dioptrik." Leipzig 1778.

[3]) Klügel „Analytische Dioptrik." Leipzig 1778, Seite 75 — und Euler dioptricae, pars prima, caput 1, pag. 39.

Crownglas No. 32.

| | | |
|---|---|---|
| $\mu$ | $= 0.9897750$ | (log) 9.9955365 |
| $\nu$ | $= 0.2188820$ | 9.3402100 |
| $\varrho$ | $= 0.2283035$ | 9.3585125 |
| $\sigma$ | $= 1.6615908$ | 0.2205240 |
| $\tau$ | $= 0.9261292$ | 9.9666716 |

Bei dem constanten Radien-Verhältnisse[1]) von $f:g = 2.511214$, wird, wenn wir mit Fraunhofer für die erste Crownglasseite $f$

[1]) Dasselbe ist wohl das Ergebniss practischer Versuche. Fraunhofer zeigt ja selbst schon pag. 2 und 24 seiner berühmten Abhandlung „Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glassorten in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernrohre“, von welch' hoher Bedeutung der practisch experimentelle Weg sein könne, und auch Gilbert, welcher diese Abhandlung im 56. Bande seiner Annalen der Physik zum Abdruck bringt, scheint diess durch ihre Eintheilung in besondere Abschnitte hervorheben zu wollen.

Als Euler (Euler pars I 1769 Cap. VII pag. 323) Dollond's Objectiv darzustellen bemüht war, glaubte er das Verhältniss 1 : 7 (genau 1 : 7.327) als das günstigste betrachten zu müssen, alsbald aber erkannte er die gleichseitige Crownglaslinse (Euler pars II Cap. V pag. 132) für die noch bessere Form. Nach ihm dachte Klügel (Gilbert's Annalen 1810 Seite 276) die Crownglaslinse ins Minimum der Ablenkung stellen zu sollen und empfahl das Verhältniss 11 : 36, während Bohneberger (Zeitschrift für Astronomie von Lindenau und Bohneberger 1816 Seite 277) die Aufmerksamkeit auf das Verhältniss 2 : 3 lenkt. Alle diese Objective kehren die kürzere convexe Fläche dem Objecte zu und erfordern eine biconcave Flintglaslinse. Nach solchen Vorgängen wählte Fraunhofer das Verhältniss 5 : 2 (genauer 2.511214 : 1), zweifellos in der bewussten Absicht, das ganze Objectiv dadurch dem Minimum der Ablenkung näher zu bringen und konnte ihm dasselbe genügen, da er den trigonometrischen Weg betretend durch eine entsprechende Radien-Correction, wie sie schon Klügel 1810 empfiehlt, Farben- und Kugelabweichung streng zu heben im Stande war. Sein Objectiv kehrt entgegen den bisher empfohlenen Objectiven die längere Seite des Crownglases dem Objecte zu, gestaltet das Flintglas zum Meniscus, dessen convexe Seite sich dem Bilde zuwendet. Die Summe der Brechungen, welche Klügel bei seinem verbesserten Objective als Wesenheit seiner Verbesserung betrachtet und auf ein Minimum gebracht annimmt, verringert Fraunhofer selbst noch um sieben Grade. Die Radien sind übrigens durch die Formeln

seinen willkürlichen Werth[1]) 1794.249 setzen, zunächst dann $g = 714.4986$ erhalten.

Ich entnehme nun Glasdicken und halbe Oeffnung gleichfalls der vorhin als begonnen erwähnten Rechnung für Flint. No. 43 und Crown. No. 32 worin $AB$ 13‴9 (Dicke der Crownglaslinse), $CD = 10‴8$ (Dicke der Flintglaslinse) und halbe Oeffnung $X = 82‴$ gesetzt sich finden. Damit berechnen sich aus den Formeln Seite 278 von Gilberts Annalen Jahrgang 1810 die Werthe $AE = 5185.191236$ und $BF = 965.007444$ (Axe).

Nun setzen wir mit Klügel

$$\zeta = \frac{dn}{n-1} \quad \eta = \frac{dn'}{n'-1} \quad \beta = \frac{\eta p}{\eta - \varsigma} \quad q = \frac{\zeta - \eta}{\varsigma}\beta$$

wo $p$ = Brennweite der Crownglaslinse, $q$ = Brennweite der Flintglaslinse und $\beta$ die Gesammtbrennweite des Objectives bedeuten, erhalten nun dafür die Werthe

---

$$f = \frac{(Md + n)(n-1)}{Mn} \qquad M = \frac{g - p(n-1)}{gp}$$

darstellbar, woraus durch Substitution noch die eleganteren Formeln

$$f = g\left(\frac{(Md+n)(1-Mp)}{Mnp}\right) \qquad g = f\left(\frac{Mnp}{(Md+n)(1-Mp)}\right)$$

resultiren. Die Hülfsgrösse $M$ steht zu $f \cdot p \cdot$ und $\beta$ im umgekehrten Verhältnisse. Dieselbe wächst bei Abnahme des Werthes von $f$.

Fraunhofer's experimentelles Vorgehen beweist des weiteren ein ebenfalls noch vorhandener Radius-Zettel aus der Zeit seiner früheren Geschäfts-Leitung für sein Flint. Nr. 3 und Crown. Nr. 3 mit den Werthen:

$$a = 110‴ \quad f = 91‴442 \quad g = 30‴480 \quad F = -30‴531 \quad G = +102‴455$$

wobei er Klügel's Verhältniss von 1 : 3 gerade in 3 : 1 verkehrt.

Georg Merz bediente sich später mit gutem Erfolge zuweilen auch dieses Verhältnisses.

[1]) Eine Erklärung der Wahl gerade dieser Zahl dürfte schwierig sein. Wir kommen jedoch auf diesen Zahlenwerth, wenn wir bei Flint. Nr. 43 und Crown. Nr. 32 unter Annahme von 13‴9 Crownglaslinsen-Dicke in den Gleichungen der vorhergehenden Anmerkung $M = 0.0002956955$ setzen. Annähernd kommt man wohl auf die Höhe dieser Zahl, wenn man allgemein 2400 als Objectiv-Brennweite setzt, was auch Fraunhofer je gethan.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\zeta =$ | 0.01693534 | (log) | 8.2287940 |
| $\eta =$ | 0.02839524 | | 8.4532456 |
| $\beta =$ | 2391.087166 | | 3.3785954 |
| $q =$ | 1618.013333 | | 3.2089821 |

und vermögen mit Fraunhofer die Formeln in Gilberts Annalen Seite 279 zu Hülfe nehmend nun auch $BF$ für die Randstrahlen zu berechnen.

Es ergeben sich folgende Werthe:

$ked = 2^0\,37'\,9''.91$ $KeE = 1^0\,42'\,45''.62$
$E = 0^0\,54'\,24''.29$ $KE = 3388.630777$ $LE = 5883.474377$
$lfE = 7^0\,29'\,15''.16$ $lfF = 11^0\,29'\,37''.68$ $F = 4^0\,54'\,46''.81$
$LF = 1662.383076$ $BF = 947.888476$ (Rand)

endlich die Differenz

$$BF_A - BF_R = db = 17.118968$$

womit Fraunhofer aus der Formel

$$\lambda' = \frac{(db)\,q^3}{\mu'\,p^2\,x^2} + \frac{\nu'\,q^3}{p\beta^2} \quad {}^{1)}$$

$\lambda'$ berechnet, wofür wir hier $\lambda' = 15.3466036$ finden und nun mittelst der Formeln

$$F = \frac{-q}{\sigma' - (q:p)(\sigma' - \varrho') + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$$

$$G = \frac{-q}{\varrho' + (q:p)(\sigma' - \varrho') - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$$

---

1) Sie ist gleichwerthig der Klügel'schen Formel für

$$\lambda' = -\frac{\mu\,\lambda\,q^3}{\mu'\,p^3} + \frac{\nu'\,q^2}{p\,\beta}$$

und entwickelt sich aus dieser, wenn

$$\lambda = \frac{\mu'\,\nu'\,p^2}{\mu\,q\,\beta} - \frac{\mu'\,\nu'\,p^2}{\mu\,\beta^2} - \frac{(d\,p)\,p}{\mu\,x^2}$$

in ihr gesetzt wird.

auch die Flintglas-Radien zu erhalten vermögen. Wir finden

$$F = 728.255166 \quad G = 2462.287968$$

und weiter entwickelnd für die Centralstrahlen die Werthe

$$CG = 10331.335714 \quad DH = 2390.141661$$

für die Randstrahlen

$$MF = 1676.143642 \quad mgF = 11^0\, 22'\, 5''.88$$

$$mgG = 6^0\, 54'\, 24''.86 \quad G = 0^0\, 27'\, 5''.79 \quad MG = 11111.151026$$

$$NG = 12834.383828 \quad NhG = 2^0\, 21'\, 16''.50 \quad NhH = 3^0\, 51'\, 40''.61$$

$$H = 1^0\, 57'\, 29''.90 \quad NH = 4852.27679$$

und nun, weil 4. Seite convex $DH = NH - G = 2389.988822$.

Die schliessliche Differenz dieser Vereinigungsweiten giebt alsdann der Kugelabweichung $DH_R - DH_A = -0.152839$

Als Vereinigungsweiten der Centralstrahlen für den farbigen Strahl $n' = 1.657269$ $n = 1.538091$ erhalten wir $AE = 5128.721111$ $BF = 948.929$ $CG = 10953.950253$ $DH = 2390.184444$, welch' letzterer Werth mit dem $DH_A = 2390.141661$ des mittleren Strahles verglichen in seiner Differenz $+ 0.042783$ die Grösse der Farbenabweichung nach Fraunhofer zur Anschauung bringt.

Für eine Brennweite gleich der Einheit stellt sich die Correction nun folgend dar:

| | |
|---|---|
| Achromasie | $+ 0.0000179$ |
| Aplanatismus | $- 0.0000639$ |

Um nun diese Abweichungen für längere Brennweiten ebenso verschwindend klein zu machen, corrigirt Fraunhofer die Randabweichung durch eine Aenderung von $\lambda'$, die Farbenabweichung durch eine Aenderung von $q$, wodurch nur mehr für $F$ und $G$ neue Werthe sich ergeben. Es muss $\lambda'$ kleiner genommen werden bei positiver Randabweichung oder einem längeren Randstrahl, grösser, wenn bei kürzerem Randstrahl die Abweichung sich negativ zeigt, $q$ dagegen muss grösser genommen werden, wenn die Farbenabweichung zu gross (positiv) und kleiner, wenn dieselbe zu klein (negativ) ist.

Nach einigen Versuchen, welche, wenn mehrfache Objectiv-Berechnungen schon vorliegen, keinen erheblichen Zeitaufwand beanspruchen, gelangt man bald zu geeigneten Werthen für $\lambda'$ und $q$.

Der Kürze halber von solchen Versuchen absehend will ich hier nur den Schluss der Rechnung folgen lassen.

Wir finden mit $q = 1618.6982$ und $\lambda' = 15.38795$ für den mittleren Randstrahl:

$$(q:p)(\sigma' - \varrho') = 2.4329206 \quad \tau' \sqrt{\lambda' - 1} = 3.1506544$$
$$F = 727.417333 \quad G = 2450.277906 \quad CG = 10397.574072$$
$$DH = 2388.661111 \text{ (Axe)},$$

$$MF = 1675.305809 \quad mgF = 11^0\,22'\,32''.89 \quad mgG = 6^0\,54'\,41''.13$$
$$G = 0^0\,26'\,55''.05 \quad MG = 11179.44618 \quad NG = 12891.506753$$
$$NhG = 2^0\,21'\,39''.45 \quad NhH = 3^0\,52'\,18''.29 \quad H = 1^0\,57'\,33''.89$$
$$NH = 4838.938888 \quad DH = 2388.660982 \text{ (Rand)},$$

daraus $DH_R - DH_A = -\,0.000129$ (Kugelabweichung)
und für den farbigen Strahl

$$CG = 11029.730253 \qquad DH = 2388.661661,$$

letzteres grösser als $DH$ (Axe) somit Differenz: $+\,0.000550$ (Farbenabweichung) oder auf die Einheit bezogen die Grössen

der sphärischen Aberration $= -\,0.00000005397$
der chromatischen Aberration $= +\,0.00000023011$

Damit schliessen Fraunhofer's Objectiv-Berechnungen überhaupt ab. Ich wollte die Rechnung aber noch für Hansen's rothen Strahl

$$n' = 1.620973 \qquad n = 1.520169$$

und für den farbigen Randstrahl (Fraunhofer's blauen Strahl) erweitern und fand für den Fall

$DH_A = 2388.65$ roth (Hansen)
$DH_R = 2388.110982$ roth (Hansen)
$DH_R = 2389.178760$ blau (Fraunhofer)

mithin eine grösste Abweichung der farbigen Strahlen

$$DH_{blau} - DH_{roth} = 1.067778$$

so dass für die Focal-Weite von Bessel's Heliometer-Objectiv nur mehr eine chrom. Aberration von circa 0ʺ42 oder 0ᴸ5 gegen 2ᴸ24, die Hansen am Königsberger-Objectiv constatirt, verbleiben würde.

Für dieses höher corrigirte Objectiv würden sich bei 94ʺ Focus allerdings die Radien-Werthe in die folgenden verändern:

$f = 847^L300 \quad g = 337^L40655 \quad F = 343^L509 \quad G = 1157^L097$

Dass Fraunhofer sich übrigens auch der Planfläche für die vierte Objectiv-Seite bediente, constatirt bereits Prechtl[1]) und zeigt dies an einem von Stampfer analysirten 12zölligen Reichenbach'schen Theodolit-Objectiv Fraunhofer's aus dem Jahr 1818. Diese Form benützte Fraunhofer auch für seine Zugfernrohr-Objective, deren Focal-Weiten inner die Grenzen von 12—20 Zoll fielen. Dass die Planfläche bei grösseren astronomischen Objectiven ausser Gebrauch blieb, dafür scheinen nur Fabrications-Erwägungen massgebend gewesen zu sein. Fraunhofer bearbeitete seine Objective bekanntlich auf der von ihm erfundenen Radius-Schleifmaschine[2]), eine höchst elegante Schleifweise, bis zuletzt die wachsenden Dimensionen von Brennweite und Oeffnung zum Schleifen der Gläser aus freier Hand zwangen. Die ersten Schwierigkeiten in Folge Durchbiegung der Radiusstange sollen sich beim Dorpater 9 Zoll-Objectiv gezeigt haben. Beim Schleifen aus freier Hand bediente sich Fraunhofer zur Controle der Radien seiner Sinus-versus-Lamellen, kleiner planparalleler Glasstreifen, deren Dicken er am grossen Schraubenmicrometer-Microscope mass, da sein Sphärometer noch nicht mit micrometrisch verstellbarer Sinus-versus-Spitze versehen war, wie die gegenwärtig gebräuchlichen so bequemen Sphärometer es sind. Um die Basis-Curve zu construiren, wurden die besagten Sinus-versus-Lamellen auf ein Planglas, welches der Oeffnung des herzustellenden Objectives

[1]) Prechtl, practische Dioptrik, Wien 1828.

[2]) Prechtl, practische Dioptrik, § 242—268.

entsprach, mit Speichel gekittet. Für eine convexe Fläche genügte eine Lamelle, für eine concave Fläche waren deren zwei nöthig.

Die Berechnung der Objective mit planconcavem Flint geschah ebenso auf trigonometrischem Wege, nachdem die optischen Constanten festgestellt waren. Die Reihenfolge der Radien war jedoch die folgende. Es wurde zuerst $F$ aus

$$F = \frac{-q}{\sigma' - (q:p)(\sigma' - \varrho') + \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$$

berechnet, da alsdann, $\beta$ [1]) als Gesammt-Objectiv-Brennweite als bekannt vorausgesetzt, die Einzelbrennweiten aus den Bedingungs-Gleichungen

$$p = \frac{\eta - \zeta}{\eta}\beta \quad \text{und} \quad q = \frac{\zeta - \eta}{\zeta}\beta$$

erhalten werden konnten und bei $G = \infty$ aus

$$G = \frac{-q}{\varrho' + (q:p)\,\sigma' - \varrho') - \tau'\sqrt{\lambda' - 1}}$$

für $\lambda'$ die Gleichung

$$\lambda' = \left(\left(\frac{\sigma'}{p} - \frac{\varrho'}{\beta}\right)\frac{q}{\tau'}\right)^2 + 1$$

resultirt.

Alsdann ergeben sich mittelst der Formel

$$\lambda = -\frac{\mu' p}{\mu q}\left(\lambda' \frac{p^2}{q^2} - \nu' \frac{p}{\beta}\right) \qquad ^{2)}$$

schliesslich die Radien der Crownglaslinse aus den Gleichungen

$$f = \frac{p}{\sigma - \tau\sqrt{\lambda - 1}} \qquad g = \frac{p}{\varrho + \tau\sqrt{\lambda - 1}} \qquad ^{3)}$$

Dennoch wurde unter Fraunhofer kein grösseres Objectiv der

---

[1]) Bei allen für Planflächen berechneten Objectiven setzt Fraunhofer $\beta = 1000$.

[2]) Klügel's Dioptrik, § 337.

[3]) Klügel, § 199.

Art ausgeführt. Selbst das 1835[1]) von Georg Merz gelieferte Bogenhauser-Objectiv von $10^1/_2$ Zoll Oeffnung hat noch die vierte Seite convex. Erst als die Pulkowaer Aufträge das Institut vermehrt beschäftigten, ging Georg Merz daran, auch einmal den Versuch eines grösseren Objectives mit planconcavem Flint und zwar gleich mit einem 14 Zöller zu wagen, welches Objectiv mit dem Pulkowaer 14 Zöller, dessen 4. Seite convex, verglichen, sich demselben auch gleichwerthig erwies und später nach Odessa kam.

Seit dem 14 Zöller für Lissabon 1858, bei dessen Herstellung ich persönlich schon thätig war, kamen nur mehr Objective mit planconcavem Flint für astronomische Refractoren zur Ausführung.

Bei zwei derselben documentiren ganz besondere Umstände die zweifellose Güte eines solchen Objectives. Das eine, der von mir 1880 für Bordeaux gefertigte 14 Zöller bestand die scrupulösesten Prüfungen[2]), denen er vor seinem Ankaufe durch die französische Regierung am Observatoire in Paris unterzogen ward. Das andere, der 1864 für Mailand gefertigte 8 Zöller hat seine Kraft auf Mars durch Schiaparelli's[3]) Beobachtungen ebenso genügend erprobt.

Dass das Fraunhofer'sche Institut bezüglich der Correction seiner Objective an der traditionellen Gepflogenheit des Altmeisters bei solchen Erfolgen festhielt, mag nun nicht Wunder nehmen. Die hier zum Schlusse noch folgenden geometrischen und optischen Constanten des in Folge der vorberührten Lei-

---

[1]) Zu der Zeit wurde mit günstigem Erfolge aber schon das mittlere $n$ von 564.5 auf 558 zu verrücken versucht oder $n = \frac{Dn + En}{2}$ gesetzt und bei constantem $dn = 0.009$ der Zerstreuungs-Coefficient aus

$$\frac{Dn' - Cn'}{Dn - Cn} + \frac{En' - Dn'}{En - Dn}$$

berechnet.

[2]) Rayet annales de l'Observatoire de Bordeaux, Tom. I, 1885, fol. 52.

[3]) Schiaparelli del Pianeta Marte, Reale Accademia del Lincei, Roma 1878, 1881. Osservasioni fatte coll' equatoriale di Merz.

stungen des Mailänder 8 Zöllers mir von Professor Schiaparelli weiter bestellten und 1881 der Königl. Sternwarte in Mailand gelieferten 18 Zöllers werden dies gleichfalls erhärten.

Der Fraunhofer'sche Calcul ergab für denselben unter Zugrundlage von

$$G = \infty \quad AB = 1''.44 \quad CD = 1''.03$$

bei den gegebenen optischen Constanten;

$$n = 1.521007 \quad n' = 1.622307 \quad dn' : dn = 1.859444$$

$$f = 107''.72 \quad g = 86''.69 \quad F = -89''.07$$

als Radien.

Auf die Einheit der Brennweite bezogen finden wir damit die Farbenabweichung $= -0.0000078$, Kugelabweichung $= +0.0000032$, so dass auch in diesem Falle die Aberrationen eine wohl zulässige Grösse in der That nicht überschreiten.

# Ueber Ausbreitung von Flüssigkeiten und damit zusammenhängende Erscheinungen.[1])

Von J. Stark.

(*Eingelaufen 15. Januar*)

In der vorliegenden Abhandlung wird zuerst eine Reihe von Versuchen über die verschiedenen Arten von Ausbreitung vorgeführt, sodann werden Bewegungserscheinungen beschrieben, die bei der Ausbreitung von Flüssigkeiten auftreten können.

Bezüglich der einschlägigen Literatur sei verwiesen auf eine Arbeit von G. Quincke[2]) und eine Abhandlung von O. Lehmann.[3])

Der Erklärung der im folgenden behandelten Erscheinungen ist die von Segner[4]) und Th. Young[5]) eingeführte, in neuerer Zeit fast allgemein adoptierte Annahme einer kontraktilen Kraft in einer Flüssigkeitsoberfläche zu Grunde gelegt. $a_{\iota 0}$ bezeichne die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit $\iota$ gegen Luft, $a_{\iota n}$ oder $a_{n\iota}$ sei die Oberflächenspannung in der Kontaktfläche einer Flüssigkeit $\iota$ und einer anderen $n$. $a$ ist die in Gewichtsmilligrammen gemessene Spannung, welche auf eine Strecke der flüssigen Grenzfläche von der Breite eines Millimeters ausgeübt wird. Es sei $a_{10} > a_{20} > a_{30}$.

---

[1]) Die vorliegende Untersuchung wurde im Laboratorium des Herrn Prof. von Lommel im phys. Institut der Münchener Universität angestellt.

[2]) G. Quincke. Pogg. Ann. 134. p. 356—357. 1868.

[3]) O. Lehmann. Wied. Ann. 56. p. 771—774. 1895.

[4]) Segner. Comment. societ. reg. sc. Gott. tom. I. 1851. p. 301—372.

[5]) Th. Young. Phil. trans. 1805. part I. p. 65—87.

Wie Quincke[1]) theoretisch und experimentell nachgewiesen hat, wird eine Flüssigkeit 2 an der Oberfläche einer Flüssigkeit 1 ausgebreitet, wenn $a_{10} > a_{20} + a_{21}$. Nach demselben Forscher wird eine Flüssigkeit 3 an der Kontaktfläche der Flüssigkeiten 1 und 2 ausgebreitet, wenn $a_{12} > a_{31} + a_{32}$.

## I. Die verschiedenen Arten von Ausbreitung.

Vorbemerkung. Bei den Versuchen, die im folgenden beschrieben werden, wurde zumeist, um Strömungen in den Flüssigkeiten sichtbar zu machen, in diesen Gasruss suspendiert. Um Russ in Wasser zu suspendieren, muss man ihn mehrmals in diesem unter Umrühren abkochen. Am besten geht er in Alkohol in feine Teilung. Bringt man einige Tropfen Alkohol, in dem Russ suspendiert sind, auf Wasser, so scheidet sich unter lebhafter Bewegung auf dessen Oberfläche ein feines, sehr leicht bewegliches Russhäutchen ab.

1. Einfluss der Temperatur auf die Oberflächenspannung. — Wie bereits experimentell und theoretisch nachgewiesen ist, wächst die Oberflächenspannung mit sinkender Temperatur und nimmt ab mit steigender. Eine Bestätigung dieser Thatsache enthält auch folgender Versuch.

Chloroform hat das spec. Gewicht 1,9, Russsubstanz nach einer vom Verfasser[2]) ausgeführten Bestimmung 2,1. Bringt man etwas Russ in Chloroform, das sich in einem Uhrglas befinden mag, und deckt dieses mit einer Glasplatte zu, damit kein Chloroform verdampfen kann, dann sinken die Russteilchen wegen ihres grösseren spec. Gewichtes im Chloroform allmählich unter und sammeln sich in kleinen Ballen auf dem Boden des Uhrglases. Das ist wenigstens der Fall, wenn man im Schatten gearbeitet hat. Rückt man dann das Uhrglas mit dem Chloroform in das Sonnenlicht, so beobachtet man folgendes. Die Russballen beginnen sich langsam vertikal nach auf-

[1]) G. Quincke. Pogg. Ann. 139. p. 1. 1870.

[2]) J. Stark. Wied. Ann. 62. p. 354. 1897.

wärts in Bewegung zu setzen; sind sie an der Oberfläche angelangt, so weichen ihre Teilchen mit einem Ruck in horizontaler Richtung auseinander, verteilen sich gleichmässig in der Oberfläche und behaupten sich solange in ihr, als nicht beschattet wird. Lässt man auf einen Teil der mit Russ bedeckten Chloroformoberfläche einen Schatten, etwa von einem Federmesser oder einem Bleistift, fallen, so zucken die Russteilchen im beschatteten Gebiet und an dessen Rande fast momentan zusammen und drängen sich im Schatten dichter als in dem besonnten Teil der Oberfläche, so dass sie in dieser Verteilung die Form des Schattens nachbilden und der „Russschatten“ den optischen begleitet, falls dieser langsam weiterwandert. Zieht man den schattenwerfenden Gegenstand zurück, so weichen die Russteilchen, die im Schatten lagen, wieder momentan auseinander.

Die drei beschriebenen Vorgänge, das Aufsteigen der Russteilchen, ihr Auseinanderweichen an der Oberfläche und ihre Koncentration im Schatten, sind nicht schwer zu erklären. Der Russ absorbiert von dem auffallenden Sonnenlicht mehr Wärme als das durchsichtige Chloroform. Er erwärmt daher sich und die ihn unmittelbar umgebende Flüssigkeit stärker, als es bei der übrigen Chloroformmenge der Fall ist. Das den Russ umgebende Chloroform wird daher leichter als das übrige und wird deshalb von diesem nach aufwärts gedrückt; und da der Russ spec. nicht viel schwerer als Chloroform ist, so wird er von der aufsteigenden Strömung an die Oberfläche geführt. Da wo in dieser ein Russballen liegt, tritt aus dem angegebenen Grunde eine stärkere Erwärmung und damit eine Erniedrigung der Oberflächenspannung ein; infolgedessen zieht sich an der betreffenden Stelle die stärker gespannte Oberfläche zurück und reisst die schwächer gespannte und mit dieser den Russballen auseinander. Auf diese Weise vollzieht sich die Verteilung des Russes in der Oberfläche. Wird ein Teil derselben beschattet, so geben die im Schatten liegenden Russteilchen durch Strahlung und Leitung ihren Wärmeüberschuss gegenüber der Umgebung ab, ohne dass ihnen durch die Sonnenstrahlen neue Wärme zugeführt wird, während das im besonnten Teil der

Oberfläche der Fall ist. Man hat also in dieser eine kältere Partie mit höherer und eine an sie angeheftete wärmere mit niedrigerer Spannung. Die erste kontrahiert sich, indem sie die zweite an sich zieht und die eingelagerten Russteilchen mit sich nimmt, und bringt so deren Koncentration hervor. Sowohl bei der beschriebenen Disgregation wie Koncentration der Russteilchen ist im gleichen Sinne wie die Oberflächenspannung die Schwere verschieden stark erwärmter Partien des Chloroforms als Bewegungsursache thätig. Das Momentane in den gedachten Vorgängen spricht jedoch dafür, dass die Wirkung der Oberflächenspannung überwiegt.

Auf Grund der Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Temperatur erklärt sich auch folgender Versuch. Wird auf eine feste, glatte Unterlage ein Tropfen einer Flüssigkeit gelegt und an einem Punkte des Tropfenrandes die Unterlage oder der Tropfen erwärmt, dann weicht dieser von der erwärmten Stelle zurück, wie wenn er sich der Wärme entziehen wollte. Zum Beispiel ein Tropfen Stearin auf einer warmen Messerspitze wandert von dieser, wenn sie in die Kerzenflamme gehalten wird, weg nach den nächst gelegenen kälteren Stellen des Messers, selbst wenn er dabei in die Höhe steigen muss.

Nach dem vorhergehenden ist ohne weiteres der Satz verständlich: Herrschen an der Grenzfläche einer Flüssigkeit Temperaturdifferenzen, so bewirkt die Oberflächenspannung durch Ausbreitung in kurzer Zeit einen Ausgleich derselben.

Wird an einem Teil der Oberfläche einer Flüssigkeit auf irgend eine Weise beständig Wärme zugeführt, so dass dauernd Temperaturdifferenzen in der Oberfläche vorhanden sind, dann entsteht an der Stelle mit höherer Temperatur eine stationäre centrifugale Störung oder, wenn man will, eine stationäre Ausbreitung von wärmerer Flüssigkeit durch kältere. Ein besonders interessantes Beispiel dieser Art, mit dem der Verfasser in einer eigenen Abhandlung näher bekannt machen wird, bietet der Leidenfrost'sche Tropfen. Ein anderes ist folgendes. Um den Docht einer brennenden Kerze bildet sich bekanntlich eine Vertiefung aus, die von einem ziemlich hohen Rande

ungeschmolzenen Stearins und in ihrer Mitte vom Docht begrenzt ist. Auf ihrem Boden liegt geschmolzenes Stearin. In der Nähe des Dochtes wird das flüssige Stearin wegen der Nachbarschaft der Flamme stärker erwärmt als an dem weiter abliegenden Rande. Infolge der daraus sich ergebenden Differenz der Oberflächenspannung wird dann das flüssige Stearin beständig vom Docht weg nach dem ungeschmolzenen erhöhten Kerzenrand und an diesem etwas emporgezogen und dann einwärts nach unten zusammengeschoben, um, dem Zug der Schwere und der saugenden Wirkung des Dochtes folgend, vom Boden der Vertiefung wieder nach dem Docht zurückzukehren. An der Oberfläche des flüssigen Stearins hat man demgemäss eine vom Docht weggerichtete, an seiner Grenzfläche gegen das noch feste Stearin eine auf ihn zugerichtete Strömung. Die beiden übereinander liegenden entgegengesetzt gerichteten Strömungen kann man dadurch sichtbar machen, dass man dem flüssigen Stearin feine Russteilchen beimischt, am besten, indem man ein Messer über der Kerzenflamme etwas berusst und dann die noch warme berusste Fläche rings am erhöhten Kerzenrande abstreift, so dass von diesem geschmolzenes mit Russ beschicktes Stearin in die erwähnte Vertiefung niederfliesst. Dadurch, dass stark erwärmtes Stearin vom Docht beständig nach dem kälteren Kerzenrande gezogen wird, wird fortwährend nach diesem Wärme transportiert und so ein Beitrag zur Schmelzung des dort gelegenen festen Stearins geliefert. Es spielt also die Oberflächenspannung, abgesehen von der kapillaren Saugwirkung des Dochtes, in dem Mechanismus der Kerze noch eine gewisse andere, nicht zu unterschätzende Rolle.

2. Die Ausbreitung von mischbaren Flüssigkeiten. — An einem Tropfen Olivenöl, der auf koncentrierte Schwefelsäure gesetzt wird, beobachtet man folgendes. Der Tropfen wird langsam auseinander gezogen bis zum Rande des Gefässes, wo er sich um die Schwefelsäure herumstülpt. Gleichzeitig mischt sich die Oelschicht an ihrer unteren Fläche unter chemischer Zersetzung mit der Säure. Die beschriebene Bewegung dauert solange als unzersetztes Oel vorhanden ist.

Der Vorgang erklärt sich leicht. Da an der Grenzfläche von Oel und Säure die Spannung von Null wohl nur wenig verschieden ist, so kommen für die Ausbreitung nur die Spannungen in der freien Oberfläche der Säure $a_{10}$ und des Oels $a_{20}$ in Betracht. In der Formel $a_{10} > a_{20} + a_{21}$ ist für den gegebenen Fall $a_{21} = 0$, so dass $a_{10} > a_{20}$ bleibt. Und da in der That die Spannung der Säure grösser ist als die des Oels, so wird dieses ausgebreitet.

Die gleiche Ueberlegung gilt von der Ausbreitung einer beliebigen Flüssigkeit auf der freien Oberfläche einer anderen höher gespannten mit ihr unbeschränkt mischbaren, z. B. von Alkohol auf Wasser. Ferner kann sie auf den im vorhergehenden Abschnitt behandelten Fall von Ausbreitung angewendet werden; man hat nur für die Spannung der kälteren Flüssigkeit die Bezeichnung $a_{10}$, für die der wärmeren $a'_{10}$ zu wählen und zu beachten, dass $a_{10} > a'_{10}$ ist.

Lässt man aus einem Röhrchen mit kapillarer Oeffnung ungefähr 5 mm unter der Oberfläche reinen Wassers Alkohol langsam ausströmen, so beobachtet man eine rings vom Röhrchen ausgehende stationäre Ausbreitung des Alkohols auf der Oberfläche des Wassers. Der ausströmende Alkohol steigt nämlich vermöge seines kleineren spec. Gewichtes beständig empor, wird an der Oberfläche ausgebreitet und mischt sich dann mit dem Wasser, so dass der nachströmende Alkohol ebenfalls ausgebreitet werden kann.

Eine stationäre Ausbreitung von Alkohol (oder Aether) auf Wasser erhält man auch auf folgende Weise. An der Oberfläche eines etwa 0,5 bis 2 cm tief unter Wasser liegenden Chloroformtropfens lasse man Alkohol austreten. Unter lebhaften Bewegungen wird dieser ausgebreitet (siehe S. 99 u. 104) und tritt zum Teil in das Wasser, zum Teil in den Chloroformtropfen, da er mit beiden Flüssigkeiten mischbar ist. Hat man nun durch Aufbringen eines Tropfens russhaltigen Alkohols auf der Wasserfläche ein Russhäutchen (siehe Vorbem.) zur Abscheidung gebracht, so beobachtet man nach der obigen Operation, dass die Russteilchen auf der Wasserfläche von der

Stelle, die über dem Chloroformtropfen liegt, sich zurückziehen und, von kleinen Schiebungen abgesehen, für längere Zeit, unter Umständen bis zu 10 Minuten, jene Stelle meiden. Es bildet sich also über dem Chloroformtropfen auf der Wasserfläche gleichsam eine staubfreie Ebene aus. Betrachtet man die Wasserfläche schief in der Weise, dass das Licht einer hellen Fläche etwa einer weissen Wolke an ihr in das Auge reflektiert wird und auch ein dunkler Streifen, etwa das dunkle Bild eines Fensterkreuzes auf ihr zu sehen ist, so beobachtet man, besonders wenn die Grenze von Dunkel und Hell entsprechend zu liegen kommt, auf der Wasserfläche über dem Chloroform eine kleine spitze Erhebung und rings um diese in gewisser Entfernung einen Ring, der in steilem Abfall einen höher gelegenen Teil der Wasserfläche von einem diesen umgebenden niedriger gelegenen trennt. Auf jenem Teil, dem hervorragenden Plateau mit der centralen Spitze, sind mehr oder minder lebhafte centrifugale Strömungen wahrzunehmen. Die Erscheinung erklärt sich so. Nach dem Aufbringen von Alkohol auf die Grenzfläche von Wasser und Chloroform ist sowohl im Wasser wie im Chloroform, aber in beiden in verschiedener Koncentration Alkohol enthalten. Durch Diffusion entzieht das Wasser dem Chloroform Alkohol. Die an der Oberfläche des Chloroformtropfens sich bildende Mischung aus Alkohol und Wasser steigt, weil sie spec. leichter ist als die umgebende Flüssigkeit, an der Fläche des Tropfens nach dessen Kuppe empor und wird von da nach der Oberfläche des Wassers getrieben. Hier angelangt, wird sie von der umgebenden stärker gespannten Wasserfläche sofort ausgebreitet. Die Bewegung dauert so lange, als sich zwischen dem Alkoholgehalt des Chloroforms und Wassers kein Gleichgewichtszustand hergestellt hat. Benützt man Schwefelkohlenstoff statt Chloroform, dann tritt früher Ruhe ein. Der beschriebene Vorgang bietet, was hier gelegentlich bemerkt werden mag, ein instruktives Beispiel zu folgendem Satze. Stehen zwei Flüssigkeiten, die mit einander nicht mischbar sind, in Berührung und ist in beiden die gleiche dritte Flüssigkeit, der gleiche feste Körper

oder das gleiche Gas in Mischung bzw. Lösung vorhanden, so findet durch die Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten solange eine Diffusion des gemeinsamen Bestandteils statt, bis sich ein Gleichgewichtszustand im Koncentrationsgehalt der beiden Flüssigkeiten hergestellt hat, der abhängig ist von ihrer molekularen Verwandtschaft zum gemeinsamen Bestandteil, und bei einem Gas wahrscheinlich dann erreicht ist, wenn sich die von der Volumeneinheit der beiden Flüssigkeiten absorbierten Gasmengen wie die bezüglichen Absorptionskoëfficienten verhalten.

Am Schlusse dieses Abschnitts mag noch der leicht verständliche Satz angeführt werden: Ist in der Oberfläche eines Flüssigkeitsgemisches oder einer Lösung an verschiedenen Stellen die Koncentration verschieden gross, so erfolgt unter der Wirkung der oberflächlichen Spannungsdifferenzen in kurzer Zeit ein Ausgleich in der Koncentration der Oberfläche.

3. Die Ausbreitung von beschränkt mischbaren Flüssigkeiten. — Bei beschränkt oder nicht mischbaren Flüssigkeiten ist, wie G. Quincke (l. c.) gezeigt hat, die Spannung in der gemeinsamen Grenzfläche von Null verschieden. In diesem Fall von Ausbreitung einer Flüssigkeit 2 auf einer anderen 1 gilt die Formel $a_{10} > a_{20} + a_{21}$. Ein bekanntes Beispiel hiefür ist die Ausbreitung von Oel auf Wasser. Ferner gehört hieher die von P. du Bois-Reymond[1]) besonders eingehend beschriebene unter Umständen stationäre Ausbreitung von Alkohol auf Oel. Wie leicht sich durch Ausbreitung zumeist unsichtbare Oel- oder Fetthäutchen auf Wasserflächen bilden, lässt sich bequem mittels des Russhäutchens zeigen, das man erhält, wenn man einen russhaltigen Alkoholtropfen auf eine Wasserfläche bringt. Ist diese rein, so wird das Häutchen von den niedersinkenden Dämpfen eines übergehaltenen Tropfens Alkohol leicht in Bewegung gesetzt. Berührt man aber nur mit dem Finger oder mit einem, nicht einmal künstlich eingefetteten Haar die Wasserfläche, so werden die

[1]) P. du Bois-Reymond. Pogg. Ann. 104. p. 193. 1858; 139. p. 262. 1870.

Russteilchen von der Berührungsstelle weggeschoben und bleiben dann fast ohne Empfindung für Alkoholdämpfe träg liegen.

4. Die Wirkung von Dämpfen auf die Oberflächenspannung. — Die Einwirkung von Dämpfen auf die Oberflächenspannung ist auf die Ausbreitung einer Flüssigkeit 2 auf einer anderen 1 zurückzuführen. Hält man einen Tropfen von einer flüchtigen Flüssigkeit 2 über die Oberfläche einer anderen 1 mit grösserer Oberflächenspannung und grösserer spec. Dichte, so beginnt 1 unter dem Tropfen in der Oberfläche centrifugal zu strömen; ein auf 1 liegendes Russhäutchen wird gesprengt, leichte schwimmende Körper weichen vor dem Tropfen zurück. Es sinken nämlich von diesem Dämpfe auf die Oberfläche nieder, werden hier teilweise zu kleinen Linsen kondensiert, und durch deren Ausbreitung wird dann die bezeichnete Bewegung hervorgebracht. Ein sehr empfindliches Reagens auf die Einwirkung von Dämpfen ist das bereits mehrmals erwähnte Russhäutchen auf einer Wasserfläche. Dämpfe von einem Aethertropfen treiben es schon aus einer Entfernung von 2 cm in eilige Flucht, die Dämpfe eines dicht über die Oberfläche gehaltenen Petroleumtropfens vermögen es noch in Bewegung zu setzen.

5. Die Ausbreitung an der Kontaktfläche zweier Flüssigkeiten. — Eine Flüssigkeit 3 in Tropfengrösse an die Kontaktfläche der oberflächlich höher gespannten Flüssigkeiten 1 und 2 gebracht, breitet sich aus, wenn $a_{12} > a_{31} + a_{32}$. Ein Beispiel hiefür gibt folgender Versuch.

Die Oberflächenspannung von Alkohol mit hohem Procentgehalt ist kleiner als die von Petroleum und Wasser. Schichtet man auf Wasser Oel ungefähr 1 cm hoch und bringt man mittels eines Röhrchens, dessen eines Ende kapillar ausgezogen ist, einen Tropfen Alkohol, in dem Russ suspendiert ist, an die Grenzfläche von Oel und Wasser, so wird der Alkoholtropfen mit grosser Heftigkeit ausgebreitet. Man erkennt das an den auftretenden Strömungen, noch besser an der Bewegung der Russteilchen und an der Thatsache, dass sämtliche Russ-

teilchen zu einem Häutchen angeordnet in der Kontaktfläche liegen bleiben. Es ist für diesen Fall in der Formel $a_{12} > a_{31} + a_{32}$ die Spannung $a_{31} = 0$. Ein Beispiel, in dem sowohl $a_{31}$ wie $a_{32}$ gleich Null ist, bietet die Ausbreitung von Alkohol oder Aether an der Grenzfläche von Chloroform und Wasser.

Tropfen von Petroleum, besonders von solchem, das längere Zeit an der Luft gestanden hat, sinken in spec. leichterem Alkohol unter. An Russteilchen, die im Oel suspendiert sind, erkennt man, dass bald an dieser bald an jener Stelle der Kontaktfläche centrifugale Strömungen auftreten. Diese erklären sich so. An der Kontaktfläche von Oel und Alkohol bildet sich eine Mischung aus beiden. An manchen Stellen enthält diese mehr Alkohol als in der Umgebung und wird daher von der umliegenden stärker gespannten Oberfläche ausgebreitet.

Chloroformtropfen in Wasser zeigen an ihrer Oberfläche keine Ausbreitbewegungen. Das kommt daher, dass sich beide Flüssigkeiten so gut wie gar nicht mit einander mischen. Setzt man aber dem Chloroform etwas Alkohol zu, dann treten aus leicht ersichtlichen Gründen jene Ausbreitbewegungen auf.

6. Drei Versuche über Oberflächenspannung. — Am Schlusse dieses Abschnittes, in dem die Ausbreitung von Flüssigkeiten als Wirkung der Verschiedenheit der Oberflächenspannung verschiedener Flüssigkeiten behandelt wurde, mögen drei Versuche mitgeteilt werden, welche die Wirkung der Oberflächenspannung in verwandter Art zeigen.

Eine Kugel, etwa von Messing, die so präpariert ist, dass die eine Hälfte ihrer Oberfläche von Quecksilber benetzt wird, die andere nicht, stellt sich in Quecksilber, selbst wenn dafür gesorgt ist, dass ihr Schwerpunkt etwas nach der unbenetzten Seite hin liegt, immer so ein, dass ihre benetzte Seite nach unten zu liegen kommt. Wird sie zwangsweise so in das Quecksilber getaucht, dass der Grenzkreis zwischen der benetzten und unbenetzten Halbfläche vertikal steht, und überlässt man sie dann sich selbst, so fällt sie immer nach der benetzten Seite. Wie leicht zu sehen ist, erklärt sich das Verhalten der Kugel

ohne Schwierigkeit aus der Annahme einer Oberflächenspannung, welche die Grenzfläche einer Flüssigkeit auf ein Minimum zu reducieren trachtet.

Die Verschiedenheit der Oberflächenspannung von Wasser und Alkohol kann auf folgende Art demonstriert werden. Eine Metallschale wird durch Einlötung einer in der Mitte erhöhten Scheidewand in zwei Hälften geteilt. Bringt man in die eine derselben Wasser, in die andere Alkohol, so steigen an der Kante von Gefäss und Scheidewand unter der Wirkung der kapillaren Krümmung die Flüssigkeiten empor; bei genügender Füllung steigen sie so hoch, dass sie an dem Rande der Scheidewand in Spitzen zusammenstossen. Dann wird der Alkohol von der Wasserzunge in das Wasserbassin hinübergezogen. Das Ueberströmen des Alkohols macht man am besten durch Beimischen von Russ ersichtlich. Der Alkohol strömt selbst dann über, wenn er ein tieferes Niveau als Wasser hat. An der Scheidewand, wo sich beide Flüssigkeiten treffen, ist die stärker gespannte Oberfläche des Wassers an die schwächer gespannte des Alkohols geheftet; darum reisst jene diese an sich.

Aus der Oberflächenspannung resultiert in jedem Punkt einer gekrümmten Oberfläche in der Richtung der nach dem Innern der Wölbung gezogenen Normalen ein Druck, dessen Grösse gleiche $a\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$ ist, wo $R$ und $R'$ die Hauptkrümmungsradien in dem betreffenden Punkt bezeichnen. Dieser Druck variiert demgemäss mit $a$. Das wird in folgendem Versuch gezeigt. In ein horizontal gelegtes Röhrchen mit entsprechendem Kaliber sei ein 0,5 bis 1 cm langer Cylinder einer Flüssigkeit gebracht, so dass dessen eine konkave Endfläche nahezu an dem einen Ende der Röhre liegt. Wird nun auf diese konkave Endfläche ein Tröpfchen einer Flüssigkeit mit niedrigerer Oberflächenspannung gebracht, so weicht der Flüssigkeitscylinder gegen das Innere der Röhre zurück, weil der Zug nach der nicht verunreinigten Endfläche stärker ist als nach der verunreinigten. Ein Cylinder aus Wasser weicht bereits vor Aetherdämpfen zurück; vor Petroleum zieht er sich erst schnell, dann mehrere Minuten lang sehr langsam zurück.

## II. Ueber Erscheinungen, welche die Ausbreitung begleiten können.

Die nachfolgenden Mitteilungen machen nicht den Anspruch, das vorgesetzte Thema erschöpfend zu behandeln. Wer die hieher gehörigen Erscheinungen, soweit es möglich ist, in vollständiger Zahl kennen lernen will, der sei verwiesen auf eine grosse wertvolle Arbeit von G. Quincke,[1]) welche ausführlich eine ganze Reihe von Erscheinungen der bezeichneten Art behandelt.

1. Strömungen in der Oberfläche. — Bei der Ausbreitung einer Flüssigkeit hat man im allgemeinen Fall zu unterscheiden zwischen einer ausbreitenden ($a_{12}$) und zwei ausgebreiteten ($a_{31}$ und $a_{32}$) Flächen. Die erste wird verkleinert, die zwei letzten werden vergrössert. Die ausbreitende Fläche wird dabei, ähnlich wie die Auszüge bei einem Fernrohr, zusammengeschoben, indem die Teile, die dem Ausbreitcentrum näher liegen, unter die entfernteren geschoben werden. Damit ist angedeutet, dass die ausbreitende Fläche nicht in ihrer Gesamtheit in allen ihren Punkten mit gleicher Geschwindigkeit von dem Ausbreitcentrum zurückweicht und erst am Gefässrand sich zusammenschiebt, sondern dass die Geschwindigkeit, mit welcher die das Ausbreitcentrum umgebenden Ringe unter die entfernteren geschoben werden, vom Centrum nach aussen schnell abnimmt.

Infolge des molekularen Zusammenhangs, der zwischen benachbarten Teilchen oder Schichten einer Flüssigkeit besteht, werden von der obersten bei der Ausbreitung zurückgezogenen Schicht die zunächst unter ihr liegenden mit fortgerissen. Ist daher die Masse der Flüssigkeit, an deren Oberfläche eine Ausbreitung erfolgt, verhältnismässig klein, so nimmt sie in allen ihren Teilen an der bezeichneten Bewegung teil. Bewirkt man z. B. an einem Tropfen eine Ausbreitung und sorgt dafür, dass diese nur in einer Richtung erfolgen kann, dann gerät der

[1]) G. Quincke, Wied. Ann. 35. p. 580—642. 1888.

Tropfen mit der obersten Schicht in dieser Richtung in Rotation. Das ist z. B. bei einem unter Wasser liegenden Chloroform- oder Schwefelkohlenstofftropfen der Fall, wenn man Aether oder Alkohol am Rande des Tropfens aus einem kapillar ausgezogenen Röhrchen treten lässt, indem man dieses mehr in der Richtung einer Tangente als einer Normale zur Tropfenfläche hält.

Die bei der Ausbreitung auftretenden Bewegungen fester Teilchen in der Oberfläche von Flüssigkeiten kommen dadurch zu stande, dass die festen Teilchen von der zurückweichenden stärker gespannten Oberfläche mit fortgeführt oder fortgezogen werden. Ist auf einer Seite eines in einer Oberfläche schwimmenden festen Körpers die Spannung grösser als auf der entgegengesetzten, so bewegt sich der Körper nach der Seite mit grösserer Spannung. Auf diese Weise erklären sich die bekannten translatorischen und rotatorischen Bewegungen fester Körper auf Flüssigkeiten. Diese treten aus leicht ersichtlichen Gründen mit Lebhaftigkeit auch an grösseren Russstückchen auf, die in etwas Alkohol auf Wasser gebracht werden.

Wie in der ausbreitenden Flüssigkeitsfläche, so tritt auch in den ausgebreiteten, indem diese auseinander gezogen werden, eine centrifugale Strömung auf.

2. Strömungen im Innern der Flüssigkeiten. — Indem die ausbreitende Flüssigkeitsfläche beim Zurückweichen zusammengeschoben wird, entsteht eine von ihr ausgehende schief nach dem Innern gerichtete Strömung. Mit dieser kombiniert sich eine zweite, die im gleichen Sinne wirkt. Indem die ausgebreiteten Grenzflächen 31 und 32, die sowohl der Flüssigkeit 3 wie 1 bzw. 2 angehören, ausgebreitet werden, nehmen ihre Teilchen in der Richtung der Ausbreitung Bewegung an, wie bereits erwähnt. Die ihnen gegen das Innere der Flüssigkeiten benachbarten Teilchen werden von ihnen mit fortgerissen. Es entsteht so längs der Ausbreitfläche erstens eine centrifugale Strömung. An die Stelle der centrifugal fortgeführten Teilchen rücken dann, mehr oder weniger senkrecht

gegen die Ausbreitfläche strömend, andere weiter im Innern gelegene Teilchen; dadurch kommt zweitens eine zur Ausbreitfläche orthogonale Strömung zu stande. Die Kombination der einzeln aufgeführten Strömungen ergibt in jeder Flüssigkeit, die an der Ausbreitung beteiligt ist, folgende Cirkulation oder Wirbelbewegung. Vom Innern der Flüssigkeiten strömen orthogonal gegen die Ausbreitfläche die unter oder über dieser liegenden Flüssigkeitsteilchen, an dieser oder in der Nähe derselben biegen sie um, laufen längs derselben fort und biegen in geringer Entfernung vom Rand der ausgebreiteten Fläche gegen das Innere zurück, um nach einer weiteren Wendung, horizontal laufend, zum Ausgangspunkt zurückzukehren.

Ist die Masse der Flüssigkeit, an deren Oberfläche eine Ausbreitung erfolgt, verhältnismässig klein, dann nimmt die ganze Masse an der beschriebenen Wirbelbewegung teil. Man kann diesen Fall in schöner Weise an einem unter Wasser liegenden Chloroformtropfen verwirklichen, wenn man auf seiner Kuppe aus einem Röhrchen etwas Alkohol austreten lässt. Um die Bewegungen im Tropfen wahrnehmen zu können, setzt man zweckmässig dem Chloroform oder Alkohol Russteilchen bei.

Durch die eben behandelte orthogonal gegen die Ausbreitfläche gerichtete Strömung einer an der Ausbreitung beteiligten Flüssigkeit wird diese, soweit sie der Ausbreitfläche gegenüber liegt, gegen diese gleichsam hingesaugt. Es ist diese Strömung die Ursache verschiedener interessanter Erscheinungen.

Feste Teilchen, die in der betreffenden Flüssigkeitspartie suspendiert sind, scheinen sich unter der Wirkung von anziehenden Kräften der Ausbreitfläche zu nähern; indes ist ihre Bewegung nur ein Transport, herbeigeführt von der bezeichneten orthogonalen Strömung der suspendierenden Flüssigkeit. Aus der gleichen Ursache erklärt sich die bereits von Quincke behandelte scheinbare gegenseitige Anziehung von Oelkugeln, die in spec. leichterem Alkohol schweben. Wie bereits dargelegt, finden an der Oberfläche der Oelkugeln infolge der allerdings beschränkten Löslichkeit beider Flüssigkeiten in einander beständig Ausbreitbewegungen statt. Vermöge der-

selben saugen die Oelkugeln alkoholische Flüssigkeit an sich heran und mit dieser gegenseitig sich selbst.

Endlich erklärt sich aus der in Rede stehenden Strömung wohl auch die allerdings nur sehr niedrige plateauartige Erhebung des Teiles einer Flüssigkeit, auf dem eine Ausbreitung von einer sehr kleinen Menge einer anderen Flüssigkeit erfolgt. Auf einer Wasserfläche zeigt sich diese Erhebung z. B. schon unter einem übergehaltenen Aethertropfen, und wird dieser entsprechend auf und nieder bewegt, so gerät die Wasserfläche in eine wellenartige Bewegung.

3. Erscheinungen hervorgerufen durch Aenderung des Oberflächendruckes. — Quincke[1]) hat gezeigt, dass die Erniedrigung der Oberflächenspannung, die an einem Punkte der Oberfläche eines Sphäroids einer Flüssigkeit 2 in einer anderen 1 bei Einführung einer Flüssigkeit 3 sich zeigt, eine Ausbauchung des Sphäroids an der betreffenden Stelle und eine Bewegung desselben nach der Seite der Ausbauchung hervorbringt. Da nämlich die Krümmung in einem Punkte eines Sphäroids abhängig ist von dem dort herrschenden hydrostatischen Druck und der dort herrschenden Oberflächenspannung, so stellt sie sich dieser entsprechend her, wird z. B. grösser, wenn diese vorübergehend oder für längere Zeit herabgesetzt wird. Bevor diese Aenderung, die Herstellung eines Gleichgewichts in der Krümmung des Sphäroids erfolgt, ist, allerdings nur für sehr kurze Zeit, der Oberflächendruck auf der Seite desselben grösser, welche entgegengesetzt ist zu der oberflächlich niedriger gespannten Partie. Dieser Druck gibt daher für einen Moment dem Sphäroid einen Bewegungsantrieb nach der Seite hin, wo die Oberflächenspannung herabgesetzt ist. Während dieser Antrieb schnell vorübergeht, hält die Aenderung der Krümmung, d. h. die Ausbauchung an der oberflächlich niedriger gespannten Stelle so lange an, als die entsprechende Differenz in der Oberflächenspannung existiert. Die charakte-

[1]) Quincke. Wied. Ann. 35. p. 608—614. 1888.

risierte Deformation der Oberfläche lässt sich z. B. an hängenden Tropfen beobachten, wenn ihnen Dämpfe von Substanzen mit kleinerer Oberflächenspannung von unten her genähert werden. Neu mag in dieser Beziehung folgender Versuch sein. Lässt man auf ziemlich, aber nicht allzu fein gepulverten Schwefel, der auf einer Glasplatte liegen mag, vorsichtig einen Tropfen Wasser fliessen, so bleibt dieser in schön ausgebildeter Form als Tropfen liegen. Nähert man ihm von der Seite her einen Aethertropfen, so baucht er sich gegen diesen aus und nimmt eine mehr eiförmige Gestalt an. Hat man dafür gesorgt, dass der Wassertropfen auf einen sanften Abhang der aufgestreuten Schwefelschicht zu liegen kommt, und an seiner unteren Fläche keine grösseren Schwefelstückchen bei einer Bewegung sich ihm entgegenstellen, dann rollt er bei einer raschen seitlichen Annäherung (bis auf 1 mm) eines Aethertröpfchens gegen dieses und hat sich in dasselbe gestürzt, ehe man es zurückziehen kann.

4. Die Ausscheidung fester Teilchen an der Grenzfläche von Flüssigkeiten. — Es wurde bereits mehrmals die Ausscheidung von Russteilchen an der Grenzfläche von Flüssigkeiten erwähnt, und das sich dabei bildende Russhäutchen dazu benützt, um Schiebungen der Flüssigkeiten in den Grenzflächen sichtbar zu machen. Dieser Vorgang soll nun näher beschrieben und erklärt werden.

Um eine Ausscheidung von Russteilchen aus Alkohol auf Wasser zu erhalten, hat man Sorge zu tragen, dass der Russ in Alkohol möglichst fein verteilt ist. Dies erreicht man dadurch, dass man den Russ längere Zeit in Alkohol liegen lässt und ihn dann heftig aufschüttelt. Die mit Russ getrübten Alkoholtropfen darf man nicht aus zu grosser Höhe in das Wasser einfallen lassen; dieses muss eine reine Oberfläche besitzen. Je grösser der Procentgehalt des Alkohols ist, desto lebhafter und bedeutender ist die Abscheidung der Russteilchen.

Suspendiert man Kaolin oder Quecksilberchlorür in Alkohol und giesst einige Tropfen davon auf Wasser, dann tritt eben-

falls eine Abscheidung eines Teiles der suspendierten Körperchen an der Wasseroberfläche unter Bildung eines feinen weissen Häutchens ein. Doch ist in diesem Fall der Vorgang wegen des grösseren Gewichtes der festen Teilchen und wegen ihrer Farbe nicht so lebhaft und auffallend.

Statt mit Alkohol und Wasser lässt sich die Abscheidung der suspendierten Teilchen auch mit einer einzigen Flüssigkeit erzielen. Lässt man nämlich einige Tropfen heissen Wassers, die suspendierte Russteilchen enthalten, auf kaltes fallen, so werden aus dem heissen ebenfalls Russteilchen abgeschieden.

Wenn man Wassertropfen mit suspendierten Russteilchen auf Alkohol fallen lässt, so beobachtet man keine nennenswerte Abscheidung der letzteren. Das ist auch nicht der Fall, wenn man kaltes durch Russ getrübtes Wasser auf warmes tropfen lässt.

Die beschriebene Ausscheidung fester Teilchen aus einer Flüssigkeit 2 auf einer anderen 1, die eine höhere Oberflächenspannung als 2 besitzt und mit dieser unbeschränkt mischbar ist, kommt offenbar durch die Wirkung der Oberflächenspannung zu stande, wie nun gezeigt werden soll. Bringt man eine sorgfältig gereinigte Kugel, etwa eine Messingkugel, so tief in Wasser mit reiner Oberfläche, dass von ihr eben noch eine Haube über dem Wasserspiegel liegt, aber bereits von einer Wasserhaut überzogen ist, lässt man dann auf den höchsten Punkt der Haube einen kleinen Tropfen Alkohol fliessen, so beobachtet man folgendes. Der Alkoholtropfen wird in heftiger centrifugaler Bewegung von der Kugelhaube herab und auseinander gerissen, so dass diese nach wenigen Sekunden von aller Flüssigkeit gesäubert ist und sie daher trocken erscheint. Das umgebende Wasser begrenzt sie dann für einige Zeit in konvexer Wölbung und steigt nur langsam wieder an ihr empor, um sie schliesslich wieder zu überziehen.

Bringt man nach der angegebenen Art die Kugel in Alkohol und setzt auf die hervorragende Haube, die nunmehr mit einer Alkoholhaut überzogen ist, einen Wassertropfen, so wird dieser nicht in centrifugaler Bewegung in die umgebende Flüssigkeit hinabgezogen, sondern bleibt nach einer anfäng-

lichen nach seinem Innern gerichteten Zuckung in Tropfenform auf der Kugelhaube liegen.

Die beschriebenen Erscheinungen erklären sich nach den weiter oben mitgeteilten Ansichten und Versuchen aus der Verschiedenheit der Oberflächenspannungen des Wassers und Alkohols. Da nämlich dieser eine kleinere Oberflächenspannung als jenes besitzt, so wird er von der Wasserhaut auseinandergezogen und solange ausgebreitet, bis überall an der freien Oberfläche die Spannung gleich gross ist.

Der Vorgang, der sich beim ersten Versuch mit der Messingkugel abspielt, stellt einen spec. Fall des allgemeinen Satzes dar: Einem festen Körper, der zum Teil in eine Flüssigkeit von gewisser Oberflächenspannung getaucht, im übrigen mit einer Schicht oder Haut einer anderen Flüssigkeit mit niedrigerer Oberflächenspannung bedeckt ist, wird diese Haut oder Schicht, sobald beide Flüssigkeiten zum Kontakt kommen, von der ersten Flüssigkeit abgezogen.

Nimmt man zu diesem Satz die Thatsache, dass leichte Körperchen in der Oberfläche einer Flüssigkeit festgehalten werden und, wenn sie einander nahe kommen, sich scheinbar anziehen, dann ist die beschriebene Abscheidung eines Russhäutchens genügend aufgeklärt.

Eine oberflächliche Abscheidung von Russteilchen erhält man auch, wenn man auf alkoholisches Wasser einen Chloroformtropfen legt. Man verfährt zu diesem Zweck am besten so. In Wasser lässt man aus einer Höhe von ungefähr 1 dm einige Alkoholtropfen fallen, die mit Russ stark getrübt sind. Es scheidet sich dann nur ein kleiner Teil der Russkörperchen aus; die grössere Zahl derselben verteilt sich infolge der Mischung des Alkohols mit dem Wasser in diesem. Legt man dann einen Chloroformtropfen auf das Wasser, dann werden unter den bekannten lebhaften Strömungen im Wasser und Chloroform Russteilchen in grosser Zahl an der Kontaktfläche beider Flüssigkeiten ausgeschieden, schiessen in dieser zum Rande der Chloroformlinse empor und werden hier auf der Wasserfläche centrifugal fortgeführt. Infolge der Strömungen im Wasser und der

damit verbundenen fortgesetzten Ausscheidung von Russ wird das Wasser allmählich in seiner obersten Schicht vom Russ gesäubert, während die unter dieser liegende ihre dunkle Russschattierung beibehält.

Die Beobachtung, dass Chloroform Russteilchen aus Wasser vor allem dann zur Abscheidung bringen kann, wenn das Wasser mit Alkohol versetzt ist, legt die Vermutung nahe, dass zwischen der Ausscheidung fester Teilchen aus Alkohol auf Wasser und dem eben behandelten Fall insoferne eine Verwandtschaft vorliegt, als hier wie dort eine Ausbreitung der Flüssigkeit, welche die Russteilchen suspendiert, und damit ein Abziehen jener von diesen erfolgt. Diese Vermutung wird durch folgende Versuche bestätigt.

Ein Chloroformtropfen unter Wasser, in dem Russteilchen suspendiert sind, zeigt an seiner Oberfläche keine Abscheidung von Russ. Dagegen tritt diese Erscheinung ein, wenn dem Wasser oder dem Chloroform Alkohol beigegeben wird. Nunmehr bilden sich nämlich an der Grenzfläche von Wasser und Chloroform russhaltige Gemische von Chloroform und Alkohol mit verschiedener Koncentration. Die an Alkohol reicheren und darum niedriger gespannten Mischungspartien werden ausgebreitet und von der Oberfläche ihrer Russteilchen herabgezogen; diese bleiben dann in Kontaktfläche von Chloroform und Wasser liegen. Durch die bei der Ausbreitung auftretende orthogonal zur Ausbreitfläche gerichtete Strömung werden neue Russteilchen in die Nähe der Kontaktfläche geführt und hier durch Ausbreitung ihrer sie führenden Flüssigkeit abgesetzt. Auf diese Weise klärt sich die durch Russ getrübte Flüssigkeit allmählich.

Besonders schön ist der beschriebene Vorgang an kleinen Oelkugeln zu beobachten, die mit Russteilchen versetzt sind und in spec. etwas leichterem Alkohol schweben. Unter lebhaften radialen und centrifugalen Strömungen an der Oberfläche der Oelkugeln werden nach kurzer Zeit fast alle Russteilchen aus ihnen in die Kontaktfläche von Oel und Alkohol ausgeschieden. Hier bilden sie eine ziemlich dicke Russhaut,

da wegen der Löslichkeit von Oel und Alkohol in einander die Grenzfläche dieser beiden Flüssigkeiten nicht scharf ausgebildet ist. Diese wird um so schärfer, je mehr Wasser man dem Alkohol zusetzt. Dann steigen die Oelkugeln, die sich mit der Zeit zu einer einzigen vereinigen, an die freie Oberfläche, und die ausgeschiedenen Russteilchen ordnen sich dann zu einem sehr feinen Häutchen an der Grenzfläche von Oel und dem Gemisch aus Wasser und Alkohol.

---

Sitzung vom 5. Februar 1898.

1. Herr Emil Selenka hielt einen Vortrag: „Ueber die Architektur des Orangutan-Schädels.“ Derselbe wird anderweit zur Veröffentlichung gelangen.

2. Herr Eugen v. Lommel macht eine Mittheilung: „Ueber aus Kalkspath und Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen.“

3. Herr Eugen v. Lommel legt eine Abhandlung des Herrn Professor Paul Glan in Berlin: „Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Elektrizität“ vor.

---

## Ueber aus Kalkspath und Glas zusammengesetzte Nicol'sche Prismen.

Von **E. v. Lommel.**

(*Eingelaufen 5. Februar.*)

In den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften zu Berlin hat Herr C. Leiss[1]) über ein neues, aus Kalkspath und Glas zusammengesetztes Nicolsches Prisma berichtet. Solche Prismen sind schon seit mehr als zwei Jahren in meinem Besitz; sie wurden Ende 1895 von der Firma Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. in bekannter vorzüglicher Ausführung nach meinen Angaben hergestellt. Schon etwa ein Jahr früher hatte Herr Strübin, Optiker in Basel, solche Prismen verfertigt, ebenfalls von der Absicht geleitet, die Hälfte des immer kostbarer werdenden Kalkspathmaterials zu ersparen.

---

[1]) Sitzung vom 21. Oktober 1897.

Ein so zusammengesetztes Prisma kommt begreiflicherweise einem echten Nicol an Vollkommenheit nicht gleich. Das Gesichtsfeld erscheint verzerrt, weil sich die aussergewöhnliche Brechung des Kalkspaths durch die gewöhnliche des Glases nicht für alle Strahlen des nutzbaren Strahlenkegels gleichzeitig aufheben lässt. Die Dimensionen des Gesichtsfeldes parallel zum Hauptschnitt erscheinen gegenüber jenen senkrecht zum Hauptschnitt verkürzt. Deshalb genügt auch das neue Prisma der von Nicol[1]) angegebenen Probe für die richtige Konstruktion seiner Prismen nicht. Betrachtet man nämlich durch ein echtes Nicol ein Fensterkreuz aus einer Entfernung von 1 bis 2 m, so bleibt es unbeweglich und rechtwinklig, wie man auch das Prisma um seine Achse drehen mag. Durch das neue Prisma dagegen erscheinen die Arme des Kreuzes nur rechtwinklig, wenn der Hauptschnitt des Kalkspaths mit einem derselben parallel ist; beim Drehen des Prismas aber werden die Quadranten, durch welche der Hauptschnitt des Kalkspaths geht, stumpfwinklig, die beiden andern spitzwinklig, und die Kreuzesarme erscheinen ein wenig gekrümmt. Zugleich ist das Gesichtsfeld nicht vollkommen achromatisch, ein Uebelstand, der übrigens bei Anwendung von homogenem Licht (z. B. Natriumlicht) wegfällt.

Wegen dieser Mängel, welche die Brauchbarkeit des künstlichen Nicols zu Messungszwecken in Frage stellen, unterliess ich damals die Veröffentlichung. Nachdem aber der Gegenstand nunmehr zur Sprache gekommen ist, sei es mir gestattet, die Gesichtspunkte, welche mich bei der Konstruktion dieser Prismen leiteten, in Kürze darzulegen.

Indem wir die Betrachtung auf den Hauptschnitt des Krystalles einschränken, wählen wir in diesem die Rotationsachse $2b$ der ellipsoidischen Wellenschale als $x$-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, mit welcher die Eintrittsfläche des Krystalls den Winkel $a$ bilde. Zu der aus der Luft unter dem Winkel $i$ einfallenden Welle ergibt sich die im Krystall aussergewöhn-

[1]) Nicol, Pogg. Ann. Bd. 49, p. 239. 1840.

lich gebrochene Welle als die vom Punkt $x_1 = \cos a / \sin i$, $y_1 = \sin a / \sin i$ der Eintrittsfläche an die Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$ gelegte Tangente. Die vom Mittelpunkt der Ellipse (Koordinatenanfang) auf diese Tangente gefällte Senkrechte $\varrho$ stellt alsdann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Welle dar. Wählen wir nun die Glassorte so, dass der Radius ihrer kugelförmigen Wellenfläche $= \varrho$, oder ihr Brechungsindex $n = 1 / \varrho$ ist, so geht jene ebene Welle aus dem Krystall ohne Richtungsänderung in das Glas über, und tritt aus der mit der Eintrittsfläche parallelen Endfläche unter demselben Winkel $i$ wieder in die Luft aus. Die Bedingung, dass ein an der vorderen (Spath-)Fläche unter beliebigem Einfallswinkel $i$ eintretender (senkrecht zum Hauptschnitt polarisierter) Strahl an der hinteren (Glas-)Fläche mit ungeänderter Richtung austrete, fordert also, dass der Brechungsindex des Glases

$$n = \sqrt{\frac{x'^2}{b^4} + \frac{y'^2}{a^4}}$$

sei, wo $x'$, $y'$ die Koordinaten des Berührungspunktes der Ellipse und jener Tangente sind, und sich daher aus den Gleichungen

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x'}{b^2} \cos a + \frac{y'}{a^2} \sin a = \sin i$$

ergeben. Man kann nach Einsetzung dieser Werte den Ausdruck für $n$ leicht wie folgt umformen:

$$n = \sqrt{\sin^2 i + P^2},$$

wo

$$PN = \sqrt{N - a^2 b^2 \sin^2 i} - (a^2 - b^2) \sin a \cos a \sin i$$

und

$$N = a^2 \cos^2 a + b^2 \sin^2 a$$

ist. Die Gleichungen gelten, unter welcher Neigung zur Krystallfläche die zum Hauptschnitt senkrechte Schnittfläche auch geführt sein mag.

Diese Bedingung kann, wie man sieht, durch einen einfach brechenden Körper mit konstantem $n$ jeweils nur für einen einzigen Einfallswinkel befriedigt werden. Die erwähnte Verzerrung des Gesichtsfeldes ist die notwendige Folge davon.

Man kann aber wenigstens dafür sorgen, dass der mit den Längskanten des Prismas parallel einfallende Strahl (der Achsenstrahl) beim Austritt seine Richtung beibehalte, so dass ein anvisierter ferner Punkt beim Drehen des Prismas in seiner Lage verharrt.

Ist die Kalkspathfläche eine natürliche, so ist der Einfallswinkel des Achsenstrahls $i = 19^0\,8'$ $(109^0\,8' - 90^0)$, der Winkel der optischen Achse mit jener Fläche $\alpha = 45^0\,23'$, ferner für Natriumlicht $a = 0{,}67270$, $b = 0{,}60297$. Danach berechnet sich $n = 1{,}5321$. Für die Linie $B$ ($a = 0{,}67381$, $b = 0{,}60547$) findet man $n = 1{,}5287$, und für die Linie $F$ ($a = 0{,}67077$, $b = 0{,}59954$) $n = 1{,}5377$.

Wählt man also ein Crownglas, dessen Brechungsverhältnisse sind:

$B$) 1,5287 $D$) 1,5321 $F$) 1,5377 [1])

so erleidet der Achsenstrahl nicht nur keine Richtungsänderung, sondern auch keine Farbenzerstreuung. Für ein mit dem Achsenstrahl paralleles Strahlenbündel ist sonach das neue Prisma ganz tadellos. Aber auch in anderen Fällen, so lange es sich nicht um Messungen handelt, z. B. zur subjektiven Beobachtung und zur objektiven Darstellung der Erscheinungen der chromatischen Polarisation, kann das Prisma, insbesondere als Polarisator, vorteilhaft verwendet werden.

Bisher wurde angenommen, dass die Kalkspathhälfte des Prismas der Lichtquelle zugewendet sei. Die gewöhnlich gebrochenen, im Hauptschnitt polarisirten Strahlen werden als-

---

[1]) Ein Crownglas von Guinand hat nach Messungen von Dutirou die Indices

$B$) 1,52805, $D$) 1,53173, $F$) 1,53825,

welche den obigen sehr nahe kommen.

dann wie bei dem echten Nicol durch totale Reflexion an der Kanadabalsamschicht beseitigt.

Man kann aber das Prisma ebensogut auch umgekehrt, die Glashälfte voran, gebrauchen. Die aussergewöhnlichen Strahlen gehen dann auf denselben nur umgekehrten Wegen durch das Prisma durch. Die im Hauptschnitt polarisierten Strahlen dagegen dringen durch die Kittschicht in die Kalkspathhälfte und werden an deren Hinterfläche zum Teil nach innen total reflektiert, zum Teil unter starker Ablenkung in die Luft hinaus gebrochen. Zwischen dem Einfallswinkel $i$ an der Glasfläche und dem Austrittswinkel $i'$ an der Spathfläche besteht, wenn die Schnittfläche senkrecht zu den Endflächen geführt ist, die Beziehung:

$$\sin^2 i' = \sin^2 i + n_\omega^2 - n^2,$$

wenn $n_\omega$ den Brechungsindex des gewöhnlichen Strahles in Kalkspath, $n$ wie vorhin den Brechungsindex des Glases bezeichnet.

Nach dieser Formel bestimmt sich der kleinste Austrittswinkel der gewöhnlich gebrochenen Strahlen (für $i = o$) aus

$$\sin^2 i' = n_\omega^2 - n^2$$

wie folgt:

*B*) 38° 42′ *D*) 39° 25′ *F*) 40° 12′.

Der Einfallswinkel, bei welchem an der Spathfläche die totale Reflexion beginnt ($i' = 90$), ergibt sich aus der Gleichung

$$\cos^2 i = n_\omega^2 - n^2;$$

er ist das Complement des vorigen, also beziehungsweise 51° 18′, 50° 35′, 49° 48′; Strahlen, welche unter grösseren Einfallswinkeln auf die vordere (Glas-)Fläche treffen, treten aus der Hinterfläche nicht mehr aus. Die gewöhnlich gebrochenen Strahlen, welche aus der Hinterfläche noch austreten, liegen also (für Natriumlicht) zwischen $i' = 39°\,25'$ und $i' = 90°$; sie entsprechen einfallenden Strahlen zwischen $i = o$ und $i = 50°\,35'$, während alle zwischen $i = 50°\,35'$ und $i = 90°$ einfallenden

Strahlen nach innen total reflektiert werden. Jene noch austretenden ordinären Strahlen bilden ein (bei Benutzung des vollen Gssichtsfeldes unreines) Spektrum, welches aber so stark zur Seite gelenkt ist, dass es die Beobachtung in keiner Weise hindert; für Natriumlicht z. B. beträgt die Ablenkung gegen den Axenstrahl $39^0 25' - 19^0 8' = 20^0 17'$. Bei diesem Gebrauche (Glas voran) wirkt das neue Prisma eigentlich ähnlich wie ein achromatisches Kalkspathprisma, das aber wegen der weit grösseren Ablenkung der ordinären Strahlen nach Art eines Nicols verwendbar ist.

# Theoretische Untersuchungen über elastische Körper und Elektrizität.

Von **Paul Glan.**

(*Eingelaufen 5. Februar.*)

Die Grenze eines Körpers habe die Gleichung

$$\omega = \psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{o}),$$

in der $\mathfrak{g}$ die Länge einer geodätischen Linie seiner Oberfläche von einem Punkte derselben aus und $\mathfrak{o}$ den Winkel bedeutet, den diese Linie im Anfangspunkte von $\mathfrak{g}$ mit einer bestimmten Geodätischen bildet. Von einem Punkte einer solchen Linie mag nach dem Innern des Körpers in der Richtung ihrer Hauptnormale der Einheitsvektor $\nu$ gehen, in der Richtung ihrer Tangente und zwar nach der Seite wachsender Länge der Einheitsvektor $\tau$ und in der Binormalen liegend der Einheitsvektor $\iota$; es sei die Drehung um $\nu$ von $\tau$ nach $\iota$ rechtsläufig oder positiv. Ein Vektor im Raume kann in der Form

$$\omega = \psi(\mathfrak{g}, \mathfrak{o}) + n\nu$$

gegeben sein, in der $n$ ein Skalar ist. Es ist weiter

$$\tau = UD_{\mathfrak{g}}\psi, \quad \iota = \pm UD_{\mathfrak{o}}\psi, \quad \nu = \pm UVD_{\mathfrak{g}}\psi D_{\mathfrak{o}}\psi.$$

Das Vorzeichen ist in den Ausdrücken für $\iota$ und $\nu$ so zu nehmen, dass $\tau$, $\iota$, $\nu$ die zuvor angegebene Lage zu einander haben.

Der Zuwachs $\Delta\alpha_1$, $\Delta\alpha_2$, $\Delta\alpha_3$, den die Vektoren der elastischen Kräfte bei einer unendlich kleinen Zustandsänderung

$dm_1, .. dt$ im Zeitelement $dt$ erleiden, soll nun in seiner Abhängigkeit von der Zeit in Betracht gezogen werden, in der sie erfolgt. Ein bestimmter Zustand ist dann durch die ihm zukommenden Werte der Formvariabeln, der Temperatur und der Zeit charakterisiert, in welcher sie ausgeführt ward. Es wird, zum Beispiel,

$$A a_1 = \varphi(m_1, .. n_3, \mathrm{t}, t, dm_1, .. dn_3, d\mathrm{t}, dt).$$

Die Entwickelung nach $dm_1, .. dt$ und alleinige Berücksichtigung der Glieder mit den ersten Potenzen dieser Grössen, welche erlaubt ist, wie früher in diesen Untersuchungen erläutert ward, wenn sich $a_1$ nur wenig und stetig mit $m_1, .. \mathrm{t}$ ändert, giebt

$$A a_1 = \mu_1' \, dm_1 + \mu_1'' \, dm_2 + \mu_1''' \, dm_3 + \nu_1' \, dn_1 + \nu_1'' \, dn_2 + \nu_1''' \, dn_3 + \chi_1 \, dt.$$

Hier sind die vektor Faktoren vektor Funktionen von $m_1, .. \mathrm{t}, t, dt$. Sie sind nach den vorliegenden Erfahrungen, wie früher ausgeführt ist, entwickelbar jedenfalls bis zu den Gliedern mit $m_1, .. n_3$ anzusehen und es können dann bei der Kleinheit von $m_1, .. n_3$ nur die von den Formvariabeln unabhängigen Glieder dieser Entwickelungen zunächst in Betracht gezogen werden. Diese nur von $\mathrm{t}$, $t$ und dem Zeitelement $dt$ abhängigen Vektoren sollen $\mu_1', .. \chi_1$ von jetzt sein. Bei raschen periodischen Formänderungen können wir, da sich bei mehreren solchen die Temperatur nur wenig infolge derselben ändert und sich nach dem bisher Bekannten die elastischen Konstanten im allgemeinen in geringem Masse mit der Temperatur verändern, für kürzere Zeit die Aenderung der Temperatur $\mathrm{t}$ ausser Acht lassen in Bezug auf ihren Einfluss auf die Vektoren $\mu_1', .. \chi_1$. Da ferner nach mehreren raschen periodischen Aenderungen der Form keine Veränderung des Stoffes im allgemeinen einzutreten pflegt, wollen wir die elastischen Vektoren $\mu_1', .. \chi_1$ periodisch veränderlich nehmen. Die Dauer ihrer Periode sei $4 : h$ und gleich derjenigen der Formänderung. Die Vektoren $\mu_1', .. \nu_1'''$ mögen hier so bestimmt werden wie zuvor in diesen Abhandlungen bei langsamen Aenderungen;

nun sind jedoch ihre elastischen Koeffizienten periodische Funktionen von $4:h$ und ein elastischer Skalar wie $e_1$ dann darstellbar in der Form:

$$e_1 = E_1 + E_1' \sin\left(\frac{\pi h t}{2} + U_1'\right) + E_1'' \sin\left(2\cdot\frac{\pi h t}{2} + U_1''\right) + \dots$$

und es sind $E_1, \dots U_1', \dots$ abhängig von $h$. Es sollen nur die ersten Glieder dieser Reihen vorläufig in Betracht gezogen werden.

Da die innere elastische Kraft dieselbe bleibt, wenn sich bei konstanten äusseren Kräften die Formvariabeln um $d_t m_1, \dots d_t n_3$ ändern, wie es einer Aenderung der Temperatur um $d\mathrm{t}$ entspricht, folgt zum Beispiel,

$$\chi_1 d\mathrm{t} = -\mu_1' d_t m_1 - \mu_1'' d_t m_2 - \mu_1''' d_t m_3 - \nu_1' d_t n_1 - \nu_1'' d_t n_2 - \nu_1''' d_t n_3.$$

Die thermischen Ausdehnungsindizes für einen bestimmten Zustand, der nun durch seine Formvariabeln, Temperatur und die Zeit, in der er entstanden, zu charakterisieren ist, ergeben sich dann nach Früherem in der Form:

$$a = a_o + a_{m_1} m_1 + a_{m_2} m_2 + a_{m_3} m_3 + a_{n_1} n_1 + a_{n_2} n_2 + a_{n_3} n_3,$$

und es sind $a_o, \dots a_{n_3}$ Funktionen von $\mathrm{t}$, $t$, $dt$ ähnlich den elastischen Skalaren zu behandeln, wie die Leitfähigkeit für Wärme $k$. In Kristallen sind beide thermischen Indizes von der Richtung im allgemeinen abhängig.

Die Gleichung zur Bestimmung des Wärmeverbrauchs einer unendlich kleinen Zustandsänderung kann die frühere bleiben; es ist die spezifische Wärme bei konstanter Form dann so wie zuvor die elastischen Skalare und thermischen Ausdehnungsindizes zu betrachten.

Für die Grenze kann weiter der zu ihr senkrechte Wärmefluss unendlich nahe ihren beiden Seiten und nach derselben Richtung genommen gleich gesetzt werden. Dies ergiebt für $\lim n = 0$:

$$(k_1\, d\mathfrak{t}_{\omega_1} S\varphi\nu\, U d\varphi_{\omega_1} + k_2\, d\mathfrak{t}_{\omega_2} S\varphi\nu\, U d\varphi_{\omega_2} + k_3\, d\mathfrak{t}_{\omega_3} S\varphi\nu\, U d\varphi_{\omega_3})_{n>0}$$
$$= (k_1\, d\mathfrak{t}_{\omega_1} S\varphi\nu\, U d\varphi_{\omega_1} + k_2\, d\mathfrak{t}_{\omega_2} S\varphi\nu\, U d\varphi_{\omega_2} + k_3\, d\mathfrak{t}_{\omega_3} S\varphi\nu\, U d\varphi_{\omega_3})_{n<0};$$

es ist $\varphi\nu$ das Lot zu ihrer Grenze bei der Formänderung $\varphi\,(\omega, t)$.

Für einen nichtkristallischen Stoff von unendlich grosser Ausdehnung haben die Vorgänge an der unendlich entfernten Grenze keinen zu beachtenden Einfluss auf das im Endlichen vor sich Gehende und hier Betrachtete und können unbeachtet bleiben. Es mag die folgende Bewegung geprüft werden:

$$\varrho = \omega + \tau\, g\, \varepsilon^{-\mathfrak{j}\mathfrak{g}:4\mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{j}'}{4}(\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)}(\pm 1 + S\,\iota^{\,\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht}).$$

Der variable Vektor $(\varrho - \omega)$ ist die Verschiebung eines Teilchens; $\tau$, $\iota$, $\nu$ stellt ein System dreier zu einander rechtwinkligen Einheitsvektoren dar und die Drehung um $\tau$ von $\iota$ nach $\nu$ ist rechtläufig und positiv. Eine Länge $\mathfrak{g}$ ist in der Richtung von $\tau$ vom Vektorenanfangspunkte aus genommen. Die Bewegung erfolgt in ebenen Wellen mit Längsschwingungen, welche in der Richtung von $\tau$ fortschreiten, dabei absorbiert werden und mit der Zeit verlöschen, während die Ruhelage an einem Endpunkte ihrer Bahn liegt. Sie liegt für den der fortlaufenden Welle Entgegensehenden im hinteren Teile der Schwingungsbahn, wenn $+$ vor 1 genommen wird, im vorderen bei $-$ vor 1. Die Schwingungen und $g$ sollen sehr klein sein. Es werden die Formvariabeln

$$m_1 = -g\, \varepsilon^{-\mathfrak{j}\mathfrak{g}:4\mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{j}'}{4}(\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)} \left[(\pm 1 + \cos)\left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{2\,\mathfrak{l}}\right) + \frac{\pi}{2\mathfrak{l}} \sin\right],$$

$m_2 = m_3 = n_1 = n_2 = n_3 = 0$. Es bedeuten hier und im folgenden cos und sin abkürzend $\cos \frac{\pi}{2}\,(\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)$ und $\sin \frac{\pi}{2}\,(\mathfrak{g}:\mathfrak{l} - ht)$.

Die Vektoren der elastischen Kräfte werden

$$a_1 = \tau\left[-m_1\, V\frac{(4\,V - E)}{3\,V - E} + \frac{a_0\, E}{3 - E:V}\,(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)\right],$$

$$a_2 = \iota\left[m_1\, V\frac{(2\,V - E)}{3\,V - E} + \frac{a_0\, E\,(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)}{3 - E:V}\right],$$

$$a_3 = \nu\left[m_1\, V\frac{(2\,V - E)}{3\,V - E} + \frac{a_0\, E\,(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_0)}{3 - E:V}\right],$$

und die Gleichung zur Bestimmung der Temperatur wird, da hier die Temperatur, allein durch die betrachteten Wellen geändert, in jeder Ebene senkrecht zur Richtung von $\tau$ in jedem Punkte dieselbe sein muss,

$$D_t \mathfrak{T} = -\frac{\mathfrak{T}\, a_0\, E}{s\, c_g\, \mathfrak{a}\,(3 - E : V)} D_t\, m_1 + \frac{k}{s\, c_g} D_{\mathfrak{g}}^2 \mathfrak{T}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_0\, \varepsilon^{f(\mathfrak{g},\, t)},$$

$$f(\mathfrak{g},t) = -\frac{a_0 E}{s c_g \mathfrak{a}(3 - E:V)}\left[m_1 + \int \frac{k}{s c_g} D_{\mathfrak{g}}^2 m_1 dt + \int \frac{k}{s c_g} dt \int \frac{k}{s c_g} D_{\mathfrak{g}}^4 m_1 dt + \ldots\right]$$

und es sind nur die in Bezug auf $g$ von der ersten Ordnung sich ergebenden Glieder in Betracht gezogen. Es bezeichnen dann hier $k$ und $c_g$ den von den Formvariabeln unabhängigen Teil dieser Grössen und es soll dann für $c_g$ der Wert von $c_{\mathfrak{v}}$ für langsame Steigerung der Temperatur genommen werden. Die Bewegungsgleichung für das Innere ist dann

$$s\, D_t^2\, \varrho = \tau \left[\frac{V(4\, V - E)}{3\, V - E} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2\, E^2}{s\, c_{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{a}\,(3 - E : V)^2}\right] D_{\mathfrak{g},t}^2\, m_1$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2\, E^2\, \tau}{s c_{\mathfrak{v}} \mathfrak{a}(3 - E : V)^2} \cdot \left[\frac{k}{s\, c_{\mathfrak{v}}} D_{\mathfrak{g}}^3\, m_1 + \frac{k}{s c_{\mathfrak{v}}} \int \frac{k}{s\, c_{\mathfrak{v}}} D_g^5\, m_1\, dt + \ldots\right].$$

In dieser Gleichung, die für alle Werte der Zeit $t$ gelten soll, müssen dann nach Fortlassung des gemeinsamen Faktors

$$\tau\, g\, \varepsilon^{-\mathfrak{j}\mathfrak{g} : 4\mathfrak{l} + \frac{\mathfrak{j}'}{4}(\mathfrak{g} : \mathfrak{l} - h t)}$$

die von der Zeit unabhängigen Glieder und die Koeffizienten von cos und sin einzeln null sein. Dies führt zu den drei Gleichungen, wenn für den thermischen Leitungsindex $k$ und die spezifische Wärme bei konstantem Volumen $c_{\mathfrak{v}}$ nur der von den Formvariabeln unabhängige Teil genommen und dieser von der Entstehungszeit eines Zustandes unabhängig betrachtet wird,

$$-\, s\, \frac{\mathfrak{j}'^3 h^3}{64} = -\left[\frac{V(4\, V - E)}{3\, V - E} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2\, E^2}{s c_{\mathfrak{v}}\, \mathfrak{a}(3 - E : V)^2}\right] \frac{\mathfrak{j}'\, h}{4} \left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{4\, \mathfrak{l}}\right)^2$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2\, E^2}{s c_{\mathfrak{v}} \mathfrak{a}(3 - E : V)^2}\left[\frac{k}{s c_{\mathfrak{v}}} \cdot \left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{4\, \mathfrak{l}}\right)^4 - \left(\frac{k}{s c_{\mathfrak{v}}}\right)^2 \frac{4}{\mathfrak{j}'\, h}\left(\frac{\mathfrak{j} - \mathfrak{j}'}{4\, \mathfrak{l}}\right)^6 + \ldots\right],$$

$$- s\frac{\mathfrak{j}' h^3}{64} + 3 s \pi^2 \frac{\mathfrak{j}' h^3}{16}$$

$$= \left[\frac{V(4V-E)}{3V-E} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]\left[-\frac{\mathfrak{j}' h}{4}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^2 + \frac{\pi^2 h}{(4\mathfrak{l})^2}(\mathfrak{j}'-2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'))\right]$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\left[\frac{k}{s c_v}\left(\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^4 + \frac{16\pi^4}{(4\mathfrak{l})^4} - \frac{24(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2\pi^2}{(4\mathfrak{l})^4}\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{k}{s c_v}\right)^2\left[-\frac{\mathfrak{j}'}{\pi^2 h}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^6 - \frac{\mathfrak{j}'}{\pi^2 h}\left(\frac{240\pi^4(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2}{(4\mathfrak{l})^6} - \frac{60\pi^2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^4}{(4\mathfrak{l})^6} - \frac{64\pi^6}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{\pi h}\left(\frac{12\pi(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^5}{(4\mathfrak{l})^6} - \frac{160\pi^3(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^3}{(4\mathfrak{l})^6} + \frac{192\pi^5(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right] : \left(\frac{\mathfrak{j}'^2}{4\pi^2}+1\right) + \ldots\right],$$

$$\frac{3}{32} s \pi \mathfrak{j}'^2 h^3 - \frac{s\pi^3 h^3}{8}$$

$$= -\left[\frac{V(4V-E)}{3V-E} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]\frac{h\pi}{(4\mathfrak{l})^2}\left[\mathfrak{j}'(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}') - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2 + 2\pi^2\right]$$

$$+ \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\left[\frac{k}{s c_v}\frac{8\pi}{(4\mathfrak{l})^4}\cdot((\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^3 - 4\pi^2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'))\right.$$

$$+ \left(\frac{k}{s c_v}\right)^2\left(\frac{-2}{\pi h}\left(\frac{\mathfrak{j}-\mathfrak{j}'}{4\mathfrak{l}}\right)^6 - \frac{2}{\pi h}\left(\frac{240\pi^4}{(4\mathfrak{l})^6}\cdot(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^2 - \frac{60\pi^2(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^4}{(4\mathfrak{l})^6} - \frac{64\pi^6}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\mathfrak{j}'}{\pi^2 h}\left(\frac{12\pi(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^5}{(4\mathfrak{l})^6} - \frac{160\pi^3(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')^3}{(4\mathfrak{l})^6} + \frac{192\pi^5(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')}{(4\mathfrak{l})^6}\right)\right) : \left(\frac{\mathfrak{j}'^2}{4\pi^2}+1\right) + \ldots\right].$$

Es sollen nun Wellenlängen von der Ordnung der Lichtwellen in Betracht gezogen werden, die schwache Absorption erleiden. Dann ist $(\mathfrak{j}-\mathfrak{j}')$ klein und es folgt aus der ersten Gleichung, wenn die Glieder mit der vierten und sechsten Potenz des Vernichtungsindex fortbleiben,

$$\frac{\mathfrak{j}' h}{4} = \left(\frac{\mathfrak{j}'-\mathfrak{j}}{4\mathfrak{l}}\right)\left[\frac{V(4V-E)}{s(3V-E)} + \frac{\mathfrak{T}\, a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a}(3-E:V)^2}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

In der dritten Gleichung sollen auch nur ausser den vom Vernichtungsindex unabhängigen Gliedern die mit seiner ersten

Potenz berücksichtigt werden; es wird dann, wenn $G$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bezeichnet:

$$G^2 = \left[\frac{V(4V-E)}{s(3V-E)} + \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a} (3-E:V)^2}\right]$$

$$+ \frac{4 \mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a} (3-E:V)^2} \left[\frac{k}{s c_v G}\left(\frac{\mathfrak{i}-\mathfrak{i}'}{4\mathfrak{l}}\right) - \left(\frac{k}{s c_v}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{G^2 (4\mathfrak{l})^2}\right].$$

In erster Näherung braucht nur das erste Glied der rechten Seite der letzten Gleichung gerechnet zu werden, und es ergiebt sich:

$$G = \left[\frac{V(4V-E)}{s(3V-E)} + \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a} (3-E:V)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Erlöschungsindex wird

$$\frac{\mathfrak{i}' h}{4} = \left(\frac{\mathfrak{i}-\mathfrak{i}'}{4\mathfrak{l}}\right) G,$$

und danach der Erlöschungsindex für eine Schwingung:

$$\mathfrak{i}' = \mathfrak{i} : 2.$$

Aus der zweiten, aus der Bewegungsgleichung für das Innere sich ergebenden Gleichung folgt mit demselben Grade der Annäherung wie bisher,

$$\frac{\mathfrak{i}-\mathfrak{i}'}{4\mathfrak{l}} = \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2}{s^2 c_v \mathfrak{a} (3-E:V)^2} \frac{k \pi^2}{s c_v G^3 (4\mathfrak{l})^2}$$

$$\left[1 - \frac{\mathfrak{T} a_0^2 E^2 \pi^2 7}{s^2 c_v \mathfrak{a} (3-E:V)^2} \left(\frac{k}{s c_v}\right)^2 \frac{1}{G^4 (4\mathfrak{l})^2}\right]^{-1},$$

oder es wird der Vernichtungsindez, da das zweite Glied der eckigen Klammer klein gegen deren erstes ist, wenn $N$ den Brechungsindex dieser Strahlen gegen den Weltraum bezeichnet,

$$\frac{\mathfrak{i}-\mathfrak{i}'}{4\mathfrak{l}} = \mathfrak{T} a_0^2 E^2 k \pi^2 N^5 : s^2 c_v \mathfrak{a} (3-E:V)^2 s c_v G_0^3 (4\mathfrak{l}_0)^2,$$

wenn $G_0$ und $4\mathfrak{l}_0$ Fortpflanzungsgeschwindigkeit und Wellen-

länge im Weltalle für diese Wellen bei gleicher Schwingungszahl sind.

Die Teilchen verschieben sich in derselben oder entgegengesetzter Richtung des Fortschreitens der Wellen um

$$g\,\varepsilon^{-\left(\frac{\mathfrak{i}-\mathfrak{i}'}{4\,\mathfrak{l}}\right)(\mathfrak{g}+at)}$$

und das ergiebt für eine kurze Strecke $\mathfrak{g}$, die sie in einem Stoffe vorschreiten, annähernd als bestimmend für die Grösse der Verschiebung, um deren Endpunkt sie schwingen,

$$g - g\,\frac{a_0^2\,k}{s\,c_v^2}\,\frac{\mathfrak{T}\,\pi^2 E^2 h^2}{\mathfrak{a}\,V^2\,16}\cdot\left[4 - E:V + \frac{\mathfrak{T}\,a_0^2\,E^2}{s\,c_v\,\mathfrak{a}\,V(3 - E:V)}\right]^{-2}.$$

Das Verhältnis des Dehnungs- zum Verdrehungsindex $E:V$ ist für langsame Formänderungen, wie es sich aus dem Dehnungsverhältnis $w$ gleich $2 - 2\,w$ ergiebt, für verschiedene Substanzen wenig anders und schwankt im äussersten Falle zwischen 2 und 3. Wir werden dies auch für sehr rasche Aenderungen annehmen. Für die Metalle Messing, Stahl, *Fe*, *Ag*, *Cu*, *Pb*, *Ni*, für die $E:V$ aus dem Dehnungsverhältnis erhalten werden kann, ergiebt sich auch

$$\frac{E^2}{V^2}\left[4 - E:V + \frac{\mathfrak{T}\,a_0^2\,E^2}{s\,c_v\,\mathfrak{a}\,V(3 - E:V)}\right]^{-2}$$

bei langsamer Formänderung nicht sehr verschieden und ist 2·920 am kleinsten beim *Fe* und 4·973 am grössten für *Pb*. Wir werden dies bei den Metallen auch für sehr rasche Aenderung der Form so annehmen. Bei derselben Temperatur und Grösse der Anfangsamplitude $g$ ist bei Wellen mit gleicher Schwingungszahl $h:4$ die Grösse der Verschiebung dann hauptsächlich bestimmt durch $a_0^2\,k : s\,c_v^2$. Ich werde für $a_0$ den Wert des thermischen Ausdehnungsindex der langsamen Temperaturänderung bei Metallen nehmen und statt der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen $c_v$ diejenige bei konstantem Druck $c_p$, wie zuvor.

Ich gebe im folgenden die Werte von $a_0^2\,k : s\,c_p^2$ multipliziert mit $10^{10}$.

| | $a_0^2 k\, 10^{10} : s c_p^2$ |
|---|---|
| Silber | 122·9 |
| Kadmium | 79·25 |
| Gold | 66·85 |
| Blei | 63·43 |
| Quecksilber | 40·70 |
| Zink | 31·54 |
| Kupfer | 29·41 |
| Magnesium | 25·63 |
| Aluminium | 16·47 |
| Zinn | 33·96 |
| Neusilber | 3·881 |
| Platin | 3·661 |
| Antimon | 3·444 |
| Wismut | 2·907 |
| Eisen | 2·584 |
| Kobalt | 2·361 |
| Nickel | 2·315 |

In Pulvern aus Silber und Nickel werden durch diese Wellen Silberteilchen viel mehr verschoben als Nickelteilchen und in die nächsten Schichten gedrängt, deren Zusammenhang sie vermehren. Dadurch wird deren elektrischer Widerstand vermindert. Diese in zwei entgegengesetzten Arten auftretenden Wellen, wie die beiden Elektrizitäten, wirken wie elektrische Wellen. Die Wirkung ist nach der vorigen Tabelle in Pulvern aus Nickel und Silber, wie sie in Marconis Empfänger verwandt sind, grösser als in solchen aus anderen Metallen.

# Sitzungsberichte

der

# königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

## Mathematisch-physikalische Classe.

### Sitzung vom 5. März 1898.

1. Herr RICHARD HERTWIG theilt in längerem Vortrage die Resultate seiner Beobachtungen: „Ueber Befruchtung und Kerntheilung bei Actinosphaerium Eichhorni“ mit. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

2. Herr EUGEN V. LOMMEL legt zwei Arbeiten des Herrn Privatdozenten Dr. ARTHUR KORN vor:

a) „Ueber die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie“;

b) „Ueber die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer incompressiblen Flüssigkeit“.

3. Herr HUGO SEELIGER überreicht eine Abhandlung: „Ueber die Grössenklassen der telescopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen“.

4. Herr FERDINAND LINDEMANN macht eine Mittheilung: „Ueber die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt“.

5. Herr Walter Dyck giebt einen dritten Bericht zur Potentialtheorie: „Ueber die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Systems von Funktionen mehrerer Variabeln in einem gegebenen Bereich und über die Berechnung der Werthe einer gegebenen Funktion in diesen Punkten“.

# Ueber die Entstehung des Erdmagnetismus nach der hydrodynamischen Theorie.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 5. März.*)

Die am allgemeinsten verbreitete Ansicht über den Erdmagnetismus ist die, dass die gewaltigen jedenfalls in der Erde vorhandenen Eisenmassen zum Teil wenigstens permanente Magnete sind, und dass eine Richtung in ihrer Axenlagerung, die magnetische Axe der Erde, bevorzugt ist; man kann dabei, wie Lamont[1]) es gethan hat, von der Ampère'schen Theorie des Magnetismus Gebrauch machen und an Stelle der permanenten Magnete elektrische Ströme im Erdinnern annehmen, deren Wirkungen denen der Magnete äquivalent sind. Man könnte sich ja wohl mit dieser Erklärung beruhigen, wenn man sich über den Mechanismus eines Magneten, resp. eines elektrischen Stromes, keine weiteren dynamischen Vorstellungen machte; sowie man aber mit derartigen Ideen an die Erscheinung des Erdmagnetismus herantritt, wird man zu der Frage gedrängt:

Welche mechanischen Einflüsse können die einseitige Bevorzugung einer Axenrichtung veranlassen, und wie kommt es, dass die Pole dieser bevorzugten Richtung den Polen der Erdaxe so verhältnismässig nahe liegen? Können wir nicht die

[1]) In bezug auf die reichhaltige Literatur über den Erdmagnetismus und die möglichen Ursachen seiner Entstehung verweise ich auf das ausgezeichnete Werk von S. Günther, Handbuch der Geophysik, Stuttgart 1897.

Erdrotation mit der Erscheinung des Erdmagnetismus in einen kausalen Zusammenhang bringen? Mit Hilfe der hydrodynamischen Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen kann man nun auf diese Fragen so ausserordentlich einfache Antworten geben, dass die Theorie des Erdmagnetismus aus der genannten mechanischen Theorie wohl einigen Nutzen ziehen dürfte.

---

Wir wollen uns eine Kautschukkugel in einer inkompressibeln Flüssigkeit denken, auf deren Oberfläche wir beliebige Drucke ausüben können. Hat die Kautschukkugel von Hause aus eine beliebige Drehungsgeschwindigkeit $\varrho'$ um eine Axe, die wir zur $z$ Axe nehmen, so wird sie diese Drehungsgeschwindigkeit, falls man keinerlei Reibung annimmt, zu jeder Zeit beibehalten, so lange der Druck auf der Flüssigkeitsoberfläche konstant ist. Denken wir uns nun diesen Druck verändert, so wird sich die Kautschukkugel zusammenziehen oder ausdehnen; der Radius $R$ der Kugel wird einen mit der Zeit veränderlichen Wert haben, und es wird nun nicht:

$$\varrho' = \text{const.},$$

sondern

$$R^2 \varrho' = \text{const.}$$

sein. Es ist nicht schwierig, diese Formel aus den allgemeinen mechanischen Prinzipien herzuleiten; es genügt aber hier wohl die Einsicht, dass, wenn die Kugel sich ausdehnt, sie zur Drehung mit derselben Geschwindigkeit Arbeit leisten müsste, und umgekehrt; es muss also thatsächlich bei einer Ausdehnung der Kugel eine Verminderung der Drehungsgeschwindigkeit, bei einer Kontraktion der Kugel eine Vergrösserung der Drehungsgeschwindigkeit eintreten.

Ist nun der auf die Flüssigkeitsoberfläche wirkende Druck periodisch mit der kleinen Schwingungsdauer $T$, so pulsiert die Kautschukkugel, d. h. ihr Radius hat zur Zeit $t$ den Wert:

$$R = R_0 + a \cos \frac{t}{T} 2\pi,$$

wo $R_0$ den Mittelwert des Radius, den Wert desselben zu einer Zeit vorstellt, in der

$$\cos \frac{t}{T} 2\pi = 0$$

ist, und $a$ die Amplitude der Pulsation bedeutet.

Wiederum wird die Formel

$$R^2 \varrho' = \text{const.} = R_0^2 \varrho_0'$$

stattfinden, wenn $R_0$ und $\varrho_0'$ die Werte von $R$ und $\varrho'$ zu irgend einer Anfangszeit $t_0$ vorstellen; es ist somit:

$$\varrho' = \varrho_0' \frac{R_0^2}{\left(R_0 + a \cos \frac{t}{T} 2\pi\right)^2}$$

oder:

$$\varrho' = \varrho_0' \left(1 - \frac{2a}{R_0} \cos \frac{t}{T} 2\pi\right),$$

wenn wir die Amplitude $a$ als sehr klein im Vergleich mit dem Radius $R_0$ annehmen. Dem entspricht eine lineare Geschwindigkeit an der Oberfläche der Kugel, von der Grösse:

$$V = R \varrho_0' - 2a \varrho_0' \cos \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$= R_0 \varrho_0' - a \varrho_0' \cos \frac{t}{T} 2\pi.$$

Diese Formel zeigt, dass durch die Pulsation der Kautschukkugel die Konstanz der Drehungsgeschwindigkeit so abgeändert wird, dass zu der konstanten Drehungsgeschwindigkeit $\varrho_0'$ noch eine vibratorische Drehungsgeschwindigkeit hinzutritt, welche die Periode der Pulsationsschwingungen besitzt und von einer solchen Grössenordnung ist, dass die derselben entsprechenden linearen Geschwindigkeiten an der Oberfläche der Kugel durch das Produkt

$$a \varrho_0' \cos \frac{t}{T} 2\pi$$

gegeben sind.

Legen wir die Annahme der hydrodynamischen Gravitationstheorie zu grunde, dass das gesamte Sonnensystem unter der Einwirkung eines äusseren periodischen Druckes stehe und somit unsere Erde wie eine Kautschukkugel in einer inkompressiblen Flüssigkeit sehr rasche Pulsationsschwingungen ausführe, so können wir durch die eben durchgeführte Untersuchung sofort zu einem wichtigen Resultat über die Erdrotation gelangen:

Infolge der raschen Pulsationsschwingung kann die Erde keine völlig konstante Rotationsgeschwindigkeit haben, wir haben vielmehr neben einer solchen konstanten Rotationsgeschwindigkeit noch eine schwingende, deren Periode mit der Periode der Pulsationsschwingungen übereinstimmt. Die Grössenordnung dieser schwingenden Rotationsgeschwindigkeit ist von solcher Art, dass die infolge derselben an der Erdoberfläche vorhandene lineare Schwingungsgeschwindigkeit den Wert hat:

$$a\,\varrho_0',$$

wo $a$ die Amplitude der Erdpulsation, $\varrho_0'$ die mittlere Drehungsgeschwindigkeit der Erde vorstellt.[1])

Mit dieser Rotationsschwingung erhalten wir nun nach der hydrodynamischen Theorie der elektrischen Erscheinungen ein elektromagnetisches Feld, in welchem die Rotationsaxe der Erde eine ausgezeichnete Richtung vorstellt. Es ist ja die Grundannahme in jener Theorie, dass die Geschwindigkeiten eines jeden Mediums, in welchem sich elektrische Erscheinungen abspielen, von der Form sind:

---

[1]) Nach den ziemlich rohen Schätzungen, welche man bisher noch in bezug auf die für die Erdpulsation in betracht kommenden Grössen anstellen kann, ist etwa $a$ von der Ordnung der Wellenlängen des Lichtes, während die Schwingungsdauer $T$ von der Ordnung: $10^{-25}$ sec anzunehmen ist. $\varrho_0'$ ist bekanntlich von der Ordnung: $10^{-5}$ sec$^{-1}$, so dass also die der schwingenden Rotation der Erde entsprechende lineare Schwingungsgeschwindigkeit an ihrer Oberfläche von der Ordnung $10^{-10}$ cm sec$^{-1}$ wird.

$$u = u_0 + X \cos \frac{t}{T} 2\pi + L \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$v = v_0 + Y \cos \frac{t}{T} 2\pi + M \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

$$w = w_0 + Z \cos \frac{t}{T} 2\pi + N \sin \frac{t}{T} 2\pi,$$

wo $X\,Y\,Z$ und $L\,M\,N$ im Dielektrikum genau dieselben Bedeutungen haben, wie die elektrischen, resp. magnetischen Verschiebungen in der Theorie Maxwells.

Wir brauchen nun nur vorauszusetzen, dass die Periode der die Gravitation veranlassenden Pulsationsschwingungen mit der Periode der das Wesen der elektrischen Erscheinungen ausmachenden Schwingungen übereinstimme, und dass ihre Phase dieselbe sei, wie die Phase der von magnetischen Teilchen oder elektrischen Strömen ausgehenden Schwingungen, dann sagt die oben bewiesene Thatsache einer schwingenden Rotationsgeschwindigkeit der Erde, in die Sprache der Elektrizitätstheorie übersetzt, folgendes aus:

Wäre die Erde ein Dielektrikum, so würden die elektrischen Komponenten $X\,Y\,Z$ eine Resultante besitzen, die überall innerhalb der Erde die Richtung der Breitenkreise besitzt; ist aber, wie es in Wirklichkeit der Fall ist, die Erde ein Leiter der Elektrizität, so werden in der Richtung der Breitenkreise elektrische Ströme vor sich gehen, deren Intensitäten jener Resultanten der elektrischen Komponenten und der Leitungsfähigkeit der Erde proportional sind. Alle diese Ströme sind Magneten äquivalent, welche die Erdaxe zur magnetischen Axe haben.

Wir gelangen so zu dem folgenden Resultat:

Die Erdpulsation zusammen mit der Erdrotation liefert in den leitenden Teilen der Erde elektrische Strömungen, welche Magneten mit lauter unter sich parallelen und gleichgerichteten, zugleich der Erdaxe parallelen Axen äquivalent sind, wenn die Schwingungen der Pulsation mit den magnetischen Schwing-

ungen in der hydrodynamischen Theorie gleiche Perioden und gleiche Phasen haben.

Die Abweichung der magnetischen Axe von der Rotationsaxe der Erde kann man sich durch eine ungleichmässige Lagerung der leitenden Teile innerhalb der Erde erklären, wie man sich auch die täglichen und säkularen Veränderungen des Erdmagnetismus durch die Einwirkung der übrigen Himmelskörper auf die Lagerung der leitenden Teile und die Richtung der elektrischen Ströme innerhalb der Erde hervorgebracht denken kann.

---

Zum Schluss möchte ich die eben angedeutete Auffassung des Erdmagnetismus zu einer ganz allgemeinen Auffassung über den permanenten Magnetismus erweitern. Ich kann mir denselben nur dadurch entstanden denken, dass leitende Teilchen, welche in einer konstanten, sehr raschen Rotation begriffen wären, wenn die universelle Pulsation unseres Sonnensystems nicht existierte, jetzt unter der Einwirkung derselben gezwungen sind, Rotationsschwingungen auszuführen. Diese Teilchen werden ihren Magnetismus so lange behalten, bis sie durch Reibung ihre ursprüngliche konstante (nicht schwingende) Rotationsgeschwindigkeit verloren haben; temporär magnetische Teilchen haben dagegen von Hause aus eine derartige konstante (nicht schwingende) Drehungsgeschwindigkeit nicht, ihre Rotationsschwingungen hören damit auch sofort auf, sobald ihre unmittelbare Veranlassung (inducierende elektrische Ströme etc.) ausser Wirkung tritt.

# Ueber die Erhaltung des dielektrischen Zustandes einer inkompressiblen Flüssigkeit.

Von **Arthur Korn.**

(*Eingelaufen 5. März.*)

Wenn man die elektrischen Vorgänge in einem Dielektrikum als sehr rasche Schwingungen einer inkompressiblen Flüssigkeit auffasst, so hat man sich vor allem das Problem vorzulegen:

Unter welchen Bedingungen können Geschwindigkeiten von der Form:

$$1)\quad \begin{cases} u = u_0 + u_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + u_2 \sin\frac{t}{T}2\pi, \\ v = v_0 + v_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + v_2 \sin\frac{t}{T}2\pi, \\ w = w_0 + w_1 \cos\frac{t}{T}2\pi + w_2 \sin\frac{t}{T}2\pi \end{cases}$$

Lösungen der allgemeinen hydrodynamischen Differentialgleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \mu\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \mu\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z}, \end{cases}$$

vorstellen, wenn man über die Grössen:

$$u_0\, v_0\, w_0 \qquad u_1\, v_1\, w_1 \qquad u_2\, v_2\, w_2$$

die Voraussetzung macht, dass

$$3)\qquad \left\{\begin{matrix} u_0, & v_0, & w_0 \\ u_1, & v_1, & w_1 \\ u_2, & v_2, & w_2 \end{matrix}\right| \quad \text{nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit,}$$

$$4)\qquad \left\{\begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial t}, & \frac{\partial v_0}{\partial t}, & \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}, & \frac{\partial v_1}{\partial t}, & \frac{\partial w_1}{\partial t} \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}, & \frac{\partial v_2}{\partial t}, & \frac{\partial w_2}{\partial t} \end{matrix}\right| \quad \text{nicht gegen die Grösse } \frac{\text{Geschwindigkeitseinheit}}{\text{Zeiteinheit}}$$

von der Ordnung $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen und $T$ die ausserordentlich kleine Schwingungsdauer der das Wesen der elektrischen Erscheinungen ausmachenden Schwingungen vorstellt.

Der einfachste unter allen derartigen Bewegungszuständen ist jedenfalls der wirbellose Zustand, bei welchem

$$u_0\ v_0\ w_0 \quad u_1\ v_1\ w_1 \quad u_2\ v_2\ w_2$$

den folgenden Bedingungen genügen:

$$5)\qquad \left\{\begin{aligned} u_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}, & u_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, & u_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \\ v_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y}, & v_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, & v_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \\ w_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}, & w_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z}, & w_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Ich habe neben diesem einfachsten Flüssigkeitszustand noch einen anderen beschrieben, welchen ich, wegen seiner Wichtigkeit für die Theorie der Dielektrika, als den dielektrischen Zustand einer inkompressiblen Flüssigkeit bezeichnet habe.

Dieser Zustand ist dadurch definiert, dass die Grössen:

$$u_0\ v_0\ w_0 \quad u_1\ v_1\ w_1 \quad u_2\ v_2\ w_2$$

den folgenden Bedingungen genügen sollen:

$$
6)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + c\,\mathfrak{u}_1 + 2\,\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\,u_2 + \frac{\partial u_0}{\partial y}\,v_2 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\,w_2\right),\\
v_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + c\,\mathfrak{v}_1 + 2\,\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\,u_2 + \frac{\partial v_0}{\partial y}\,v_2 + \frac{\partial v_0}{\partial z}\,w_2\right),\\
w_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + c\,\mathfrak{w}_1 + 2\,\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\,u_2 + \frac{\partial w_0}{\partial y}\,v_2 + \frac{\partial w_0}{\partial z}\,w_2\right),
\end{aligned}\right.
$$

$$
7)\quad \left\{\begin{aligned}
u_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + c\,\mathfrak{u}_2 - 2\,\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\,u_1 + \frac{\partial u_0}{\partial y}\,v_1 + \frac{\partial u_0}{\partial z}\,w_1\right),\\
v_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + c\,\mathfrak{v}_2 - 2\,\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\,u_1 + \frac{\partial v_0}{\partial y}\,v_1 + \frac{\partial v_0}{\partial z}\,w_1\right),\\
w_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + c\,\mathfrak{w}_2 - 2\,\frac{T}{2\pi}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\,u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y}\,v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial z}\,w_1\right),
\end{aligned}\right.
$$

wo $c$ eine Konstante ist,

$$\mathfrak{u}_1\;\mathfrak{v}_1\;\mathfrak{w}_1 \qquad \mathfrak{u}_2\;\mathfrak{v}_2\;\mathfrak{w}_2$$

die Bedeutungen haben:

$$
8)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{u}_1 &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} w\cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} v\cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\},\\
\mathfrak{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} u\cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} w\cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\},\\
\mathfrak{w}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} v\cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} u\cos\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\},
\end{aligned}\right.
$$

$$
9)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{u}_2 &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} w\sin\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\} - \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} v\sin\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\},\\
\mathfrak{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} u\sin\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} w\sin\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\},\\
\mathfrak{w}_2 &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} v\sin\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{2}{T}\int_t^{t+T} u\sin\frac{t}{T}\,2\pi\,dt\right\},
\end{aligned}\right.
$$

und wo schliesslich von $u_0\, v_0\, w_0$ nur vorausgesetzt wird, dass sie reine sichtbare Geschwindigkeiten vorstellen, d. h. dass:

10) $$\left\{\begin{matrix} u\ , & v\ , & w \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}\ , & \frac{\partial v_0}{\partial t}\ , & \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\ , & \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}\ , & \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \end{matrix}\right| \text{ nicht gegen ihre Dimensionseinheiten von der Ordnung } \frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$$

gross sein sollen.

Wir setzen noch:

11) $$c = -\frac{T}{2\pi A}$$

und verstehen unter $\frac{1}{A}$ eine Geschwindigkeit von der Grössenordnung der Lichtgeschwindigkeit.

Führen wir die Grössen $X\, Y\, Z$ und $L\, M\, N$ durch die Gleichungen ein:

12) $$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} u \cos\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\ , \\ Y &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} v \cos\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\ , \\ Z &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} w \cos\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\ , \end{aligned}\right.$$

13) $$\left\{\begin{aligned} L &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} u \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\ , \\ M &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} v \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\ , \\ N &= \frac{2}{T}\int_t^{t+T} w \sin\frac{t}{T}\, 2\pi\, dt\ , \end{aligned}\right.$$

so können wir die Definitionsgleichungen des dielektrischen Zustandes 6)—9) folgendermassen schreiben:

$$14)\begin{cases} X = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \dfrac{T}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}L + \dfrac{\partial u_0}{\partial y}M + \dfrac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ Y = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \dfrac{T}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}\right) - \left(\dfrac{\partial v_0}{\partial x}L + \dfrac{\partial v_0}{\partial y}M + \dfrac{\partial v_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ Z = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \dfrac{T}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\dfrac{\partial w_0}{\partial x}L + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}M + \dfrac{\partial w_0}{\partial z}N\right)\right\}, \end{cases}$$

$$15)\begin{cases} L = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \dfrac{T}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial u_0}{\partial x}X + \dfrac{\partial u_0}{\partial y}Y + \dfrac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\}. \\ M = \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \dfrac{T}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial v_0}{\partial x}X + \dfrac{\partial v_0}{\partial y}Y + \dfrac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\}. \\ N = \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \dfrac{T}{2\pi}\left\{\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial w_0}{\partial x}X + \dfrac{\partial w_0}{\partial y}Y + \dfrac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\}. \end{cases}$$

Ich habe früher[1]) gezeigt, dass dieser Bewegungszustand der Flüssigkeit den hydrodynamischen Gleichungen genügt, falls die Bedingungen erfüllt sind:

---

[1]) A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik II. Teil, II. Abschnitt, p. 211—227, Berlin 1898. Ich hatte in dem Beweise daselbst:

$$\mathfrak{u}_1 = \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z}, \qquad \mathfrak{u}_2 = \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z},$$

$$\mathfrak{v}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x}, \qquad \mathfrak{v}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x},$$

$$\mathfrak{w}_1 = \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}, \qquad \mathfrak{w}_2 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

gesetzt, doch bleibt derselbe auch bei unserer Definition 8) 9) in Gültig keit. Ich beschränke mich an dieser Stelle mit dem Hinweis auf jene Untersuchungen, da ich weiter unten den Beweis noch einmal in der für die jetzigen Zwecke passenden Form geben werde.

$$16)\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}=-A\left(\frac{\overline{dL}}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}L-\frac{\partial u_0}{\partial y}M-\frac{\partial u_0}{\partial z}N\right),\\ \frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}=-A\left(\frac{\overline{dM}}{dt}-\frac{\partial v_0}{\partial x}L-\frac{\partial v_0}{\partial y}M-\frac{\partial v_0}{\partial z}N\right),\\ \frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}=-A\left(\frac{\overline{dN}}{dt}-\frac{\partial w_0}{\partial x}L-\frac{\partial w_0}{\partial y}M-\frac{\partial w_0}{\partial z}N\right),\end{cases}$$

$$17)\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}=A\left(\frac{\overline{dX}}{dt}-\frac{\partial u_0}{\partial x}X-\frac{\partial u_0}{\partial y}Y-\frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right),\\ \frac{\partial L}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial x}=A\left(\frac{\overline{dY}}{dt}-\frac{\partial v_0}{\partial x}X-\frac{\partial v_0}{\partial y}Y-\frac{\partial v_0}{\partial z}Z\right),\\ \frac{\partial M}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial y}=A\left(\frac{\overline{dZ}}{dt}-\frac{\partial w_0}{\partial x}X-\frac{\partial w_0}{\partial y}Y-\frac{\partial w_0}{\partial z}Z\right),\end{cases}$$

wobei die Operation $\frac{\overline{d}}{dt}$ die Bedeutung hat:

$$18)\qquad \frac{d(\ )}{dt}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+\frac{\partial(\ )}{\partial x}u_0+\frac{\partial(\ )}{\partial y}v_0+\frac{\partial(\ )}{\partial z}w_0 .$$

Wir wollen nun zeigen, dass der dielektrische Zustand ein zu jeder Zeit notwendiger Flüssigkeitszustand ist, wenn derselbe zu irgend einer Anfangszeit $t_0$ besteht und eine gewisse Bedingung an der Grenze gefordert wird.

Wir wollen dazu jetzt unsere frühere Definition des dielektrischen Zustandes in folgende Form fassen:

Es sollen die Geschwindigkeiten

$$[u] \quad [v] \quad [w]$$

des dielektrischen Zustandes durch die Gleichungen gegeben sein:

$$19)\begin{cases} [u]=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}u_0\,dt+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}X\,dt\cos\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}L\,dt\sin\frac{t}{T}2\pi ,\\ [v]=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}v_0\,dt+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}Y\,dt\cos\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}M\,dt\sin\frac{t}{T}2\pi ,\\ [w]=\frac{1}{T}\int_t^{t+T}w_0\,dt+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}Z\,dt\cos\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{T}\int_t^{t+T}N\,dt\sin\frac{t}{T}2\pi ,\end{cases}$$

wo:

$$20)\quad \left\{\begin{matrix} u_0, & v_0, & w_0 \\ X, & Y, & Z \\ L, & M, & N \end{matrix}\right| \quad \text{nicht gegen die Geschwindigkeitseinheit,}$$

$$21)\quad \left\{\begin{matrix} \frac{\partial u_0}{\partial t}, & \frac{\partial v_0}{\partial t}, & \frac{\partial w_0}{\partial t} \\ \frac{\partial X}{\partial t}, & \frac{\partial Y}{\partial t}, & \frac{\partial Z}{\partial t} \\ \frac{\partial L}{\partial t}, & \frac{\partial M}{\partial t}, & \frac{\partial N}{\partial t} \end{matrix}\right| \quad \text{nicht gegen die Beschleunigungseinheit}$$

von der Ordnung $\frac{\text{Zeiteinheit}}{T}$ gross sein sollen und $u_0 v_0 w_0$, $X Y Z$, $L M N$ den Bedingungen genügen:

$$22)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{T}\Big| u_0 \Big|_t^{t+T} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \\ \frac{1}{T}\Big| v_0 \Big|_t^{t+T} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \\ \frac{1}{T}\Big| w_0 \Big|_t^{t+T} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

$$23)\left\{\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} X dt &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}L + \frac{\partial u_0}{\partial y}M + \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Y dt &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}L + \frac{\partial v_0}{\partial y}M + \frac{\partial v_0}{\partial z}N\right)\right\}, \\ \frac{1}{T}\int_t^{t+T} Z dt &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}L + \frac{\partial w_0}{\partial y}M + \frac{\partial w_0}{\partial z}N\right)\right\}, \end{aligned}\right.$$

$$24)\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_t^{t+T} L\,dt &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_0}{\partial x}X + \frac{\partial u_0}{\partial y}Y + \frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\},\\
\frac{1}{T}\int_t^{t+T} M\,dt &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial x}X + \frac{\partial v_0}{\partial y}Y + \frac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\},\\
\frac{1}{T}\int_t^{t+T} N\,dt &= \frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x}X + \frac{\partial w_0}{\partial y}Y + \frac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Bilden wir zunächst mit der Funktion $[u]$, ohne dieselbe als eine Geschwindigkeitskomponente aufzufassen, den Differentialquotienten:

$$\frac{d\,[u]}{dt} = \frac{\partial\,[u]}{\partial t} + \frac{\partial\,[u]}{\partial x}u + \frac{\partial\,[u]}{\partial y}v + \frac{\partial\,[u]}{\partial z}w\,,$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\frac{d[u]}{dt}
&= \frac{1}{T}\Big|\,u_0\Big|_t^{t+T} + \frac{1}{T}\Big|\,X\Big|_t^{t+T}\cos\frac{t}{T}2\pi + \frac{1}{T}\Big|\,L\Big|_t^{t+T}\sin\frac{t}{T}2\pi\\
&+ \left\{-\frac{2\pi}{T}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}L + \frac{\partial u_0}{\partial y}M + \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right)\right\}\sin\frac{t}{T}2\pi\\
&+ \left\{\frac{2\pi}{T}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}X + \frac{\partial u_0}{\partial y}Y + \frac{\partial u_0}{\partial z}Z\right)\right\}\cos\frac{t}{T}2\pi,
\end{aligned}$$

analog $\frac{d[v]}{dt}$ und $\frac{d[w]}{dt}$.

Bestehen nun für $X\,Y\,Z$, $L\,M\,N$ die Bedingungen:

$$25)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} &= -A\left\{\frac{1}{T}\Big|\,L\Big|_t^{t+T} - \frac{\partial u_0}{\partial x}L - \frac{\partial u_0}{\partial y}M - \frac{\partial u_0}{\partial z}N\right\},\\
\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} &= -A\left\{\frac{1}{T}\Big|\,M\Big|_t^{t+T} - \frac{\partial v_0}{\partial x}L - \frac{\partial v_0}{\partial y}M - \frac{\partial v_0}{\partial z}N\right\},\\
\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} &= -A\left\{\frac{1}{T}\Big|\,N\Big|_t^{t+T} - \frac{\partial w_0}{\partial x}L - \frac{\partial w_0}{\partial y}M - \frac{\partial w_0}{\partial z}N\right\},
\end{aligned}\right.$$

$$26)\begin{cases}\dfrac{\partial N}{\partial y}-\dfrac{\partial M}{\partial z}=A\left\{\dfrac{1}{T}\Big|X\Big|_t^{t+T}-\dfrac{\partial u_0}{\partial x}X-\dfrac{\partial u_0}{\partial y}Y-\dfrac{\partial u_0}{\partial z}Z\right\},\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}-\dfrac{\partial N}{\partial x}=A\left\{\dfrac{1}{T}\Big|Y\Big|_t^{t+T}-\dfrac{\partial v_0}{\partial x}X-\dfrac{\partial v_0}{\partial y}Y-\dfrac{\partial v_0}{\partial z}Z\right\},\\ \dfrac{\partial M}{\partial x}-\dfrac{\partial L}{\partial y}=A\left\{\dfrac{1}{T}\Big|Z\Big|_t^{t+T}-\dfrac{\partial w_0}{\partial x}X-\dfrac{\partial w_0}{\partial y}Y-\dfrac{\partial w_0}{\partial z}Z\right\},\end{cases}$$

so wird:

$$\text{analog } 27)\begin{cases}\dfrac{d[u]}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_0+\dfrac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\dfrac{t}{T}2\pi-\dfrac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\dfrac{t}{T}2\pi\right),\\ \dfrac{d[v]}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0+\dfrac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\dfrac{t}{T}2\pi-\dfrac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\dfrac{t}{T}2\pi\right),\\ \dfrac{d[w]}{dt}=\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_0+\dfrac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\dfrac{t}{T}2\pi-\dfrac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\dfrac{t}{T}2\pi\right).\end{cases}$$

Sind andererseits $u\,v\,w$ irgend welche Geschwindigkeiten einer inkompressiblen Flüssigkeit, so ist:

$$28)\qquad\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x},\\ \dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial y},\\ \dfrac{dw}{dt}=-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial z},\end{cases}$$

Wir subtrahieren die entsprechenden Gleichungen 27) und 28), multiplicieren resp. mit $u-[u]$, $v-[v]$, $w-[w]$, addieren und integrieren über den ganzen Flüssigkeitsraum $A$, so folgt:

$$\int_A\left[(u-[u])\frac{d}{dt}(u-[u])+(v-[v])\frac{d}{dt}(v-[v])+(w-[w])\frac{d}{dt}(w-[w])\right]d\tau$$

$$=-\int_A\Big[(u-[u])\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\right)$$

$$+(v-[v])\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\right)$$

$$+(w-[w])\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\right)\Big]d\tau,$$

oder wenn wir rechts von der Green'schen Umformung Gebrauch machen:

29) $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_A \Big[(u-[u])^2+(v-[v])^2+(w-[w])^2\Big]\,d\tau$$

$$=+\int\limits_\Omega \Big(\varphi_0+\frac{2\pi}{T}\varphi_2\cos\frac{t}{T}2\pi-\frac{2\pi}{T}\varphi_1\sin\frac{t}{T}2\pi+\frac{1}{\mu}p\Big)(u-[u])_n\,do,$$

wo das Integral rechts über alle Elemente $do$ der Oberfläche zu erstrecken ist und, wenn man unter $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ $\cos(nz)$ die Richtungskosinusse der inneren Normalen versteht, $(u-[u])_n$ die Bedeutung hat:

30) $$(u-[u])_n$$
$$=(u-[u])\cos(nx)+(v-[v])\cos(ny)+(w-[w])\cos(nz).$$

Ist an der ganzen Flüssigkeitsoberfläche:

31) $$u_n=[u]_n\,,$$

so folgt aus 29), dass das Integral:

$$\int\Big[(u-[u])^2+(v-[v])^2+(w-[w])^2\Big]\,dt$$

stets gleich null sein muss, wenn es zu irgend einer Anfangszeit $t_0$ verschwindet; besteht also der dielektrische Zustand zu einer Anfangszeit $t_0$ und erfüllt zu jeder Zeit die normale Geschwindigkeitskomponente an der Oberfläche die Bedingung des dielektrischen Zustandes:

$$u_n=[u]_n\,,$$

so muss der dielektrische Zustand der Flüssigkeit zu jeder Zeit $t$ erhalten bleiben.

Bedenken wir noch, dass die für unseren Beweis benützte Definition des dielektrischen Zustandes mit der früheren völlig übereinstimmt, so können wir noch einmal unsere Resultate in folgender Weise formulieren:

I. Haben die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = -A\left\{\frac{\overline{dL}}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} L - \frac{\partial u_0}{\partial y} M - \frac{\partial u_0}{\partial z} N\right\},$$

$$\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = -A\left\{\frac{\overline{dM}}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} L - \frac{\partial v_0}{\partial y} M - \frac{\partial v_0}{\partial z} N\right\},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = -A\left\{\frac{\overline{dN}}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} L - \frac{\partial w_0}{\partial y} M - \frac{\partial w_0}{\partial z} N\right\};$$

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = A\left\{\frac{\overline{dX}}{dt} - \frac{\partial u_0}{\partial x} X - \frac{\partial u_0}{\partial y} Y - \frac{\partial u_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = A\left\{\frac{\overline{dY}}{dt} - \frac{\partial v_0}{\partial x} X - \frac{\partial v_0}{\partial y} Y - \frac{\partial v_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = A\left\{\frac{\overline{dZ}}{dt} - \frac{\partial w_0}{\partial x} X - \frac{\partial w_0}{\partial y} Y - \frac{\partial w^0}{\partial z} Z\right\}$$

Lösungen, welche den Bedingungen genügen:

$$X = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} L + \frac{\partial u_0}{\partial y} M + \frac{\partial u_0}{\partial z} N\right)\right\},$$

$$Y = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} L + \frac{\partial v_0}{\partial y} M + \frac{\partial v_0}{\partial z} N\right)\right\},$$

$$Z = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} L + \frac{\partial w_0}{\partial y} M + \frac{\partial w_0}{\partial z} N\right)\right\},$$

$$L = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_0}{\partial x} X + \frac{\partial u_0}{\partial y} Y + \frac{\partial u_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$M = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) + \frac{\partial v_0}{\partial x} X + \frac{\partial v_0}{\partial y} Y + \frac{\partial v_0}{\partial z} Z\right\},$$

$$N = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{T}{2\pi}\left\{\frac{1}{A}\left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) + \frac{\partial w_0}{\partial x} X + \frac{\partial w_0}{\partial y} Y + \frac{\partial w_0}{\partial z} Z\right\},$$

so stellen die Geschwindigkeiten:

$$[u] = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} u_0\, dt + X \cos\frac{t}{T} 2\pi + L \sin\frac{t}{T} 2\pi\,,$$

$$[v] = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} v_0\, dt + Y \cos\frac{t}{T} 2\pi + M \sin\frac{t}{T} 2\pi\,,$$

$$[w] = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} w_0\, dt + Z \cos\frac{t}{T} 2\pi + N \sin\frac{t}{T} 2\pi\,,$$

einen möglichen Bewegungszustand einer inkompressiblen Flüssigkeit dar, welchen wir als den dielektrischen Zustand der Flüssigkeit bezeichnen.

II. Befindet sich eine Flüssigkeit zu irgend einer Anfangszeit im dielektrischen Zustande, so muss dieser Zustand stets erhalten bleiben, wenn nur von der normalen Geschwindigkeitskomponente $u_n$ der Flüssigkeit an der Oberfläche stets die Erfüllung der Bedingung des dielektrischen Zustandes:

$$u_n = [u]_n$$

gefordert wird.

# Ueber die Grössenklassen der telescopischen Sterne der Bonner Durchmusterungen.

Von **Hugo Seeliger.**

(*Eingelaufen 5. März.*)

Für viele Fragen der Stellarastronomie ist das Verhalten der in den Bonner Durchmusterungen enthaltenen Grössenschätzungen gegenüber einer festen Helligkeitsscala von erheblichem Interesse. Für die helleren Sterne bis etwa zur 6. Grösse liegt eine grosse Anzahl von Untersuchungen[1]) vor, durch die ihr photometrisches Verhalten ziemlich sicher bestimmt ist und wenn erst die Potsdamer Beobachtungsreihe, welche alle Sterne des nördlichen Himmels bis zur $7\frac{1}{2}$ Grösse enthalten wird, vollständig publicirt sein wird, wird man diesen Gegenstand nach allen Richtungen hin übersehen können. Für die Sterne von der 6. bis 9. Grösse dagegen fehlen bisher nähere Angaben, obwohl alle Speculationen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne sich vorerst hauptsächlich auf das photometrische Verhalten der Sterne 6.—9. Grösse stützen müssen, weil hier in den Bonner Durchmusterungen ein nahezu vollständiges Material vorliegt und die Anzahl dieser Sterne genügend gross ist, um allgemeinere Gesetze in der scheinbaren Vertheilung deutlich zum Ausdruck bringen zu können. Auf die hier entschieden vorhandene Lücke in unserer Kenntniss

---

[1]) Vgl. Müllers Photometrie der Gestirne. S. 455 ff.

bin ich öfters mit grossem Bedauern gestossen und da nunmehr seit einigen Jahren ein umfangreiches Beobachtungsmaterial vorliegt, das nach der gewünschten Richtung hin noch nicht verwerthet worden ist, hielt ich es für nützlich aus diesem Materiale jene Schlüsse zu ziehen, welche die erwähnte Lücke wenigstens einigermassen ausfüllen können. Auch bedurfte ich dieser Resultate zu Untersuchungen, über die ich an anderer Stelle berichten werde. Das genannte Material bietet die „Photometric Revision of the Durchmusterung“,[1]) welche die photometrische Beobachtung vieler Tausend Durchmusterungssterne enthält und mit dem Meridianphotometer der Harvard Sternwarte während der Jahre 1882—88 gewonnen worden ist. In dieser Publication, die im Folgenden stets mit *H. R.* bezeichnet werden soll, ist für jeden Stern die Grösse nach der Bonner Schätzung neben dem Resultat der gewonnenen photometrischen Bestimmung angeführt, was die Festlegung der Durchmusterungsgrössen gegen die photometrische Helligkeitsscala sehr wesentlich vereinfacht, denn diese besteht im Wesentlichen auf der Bildung einer allerdings sehr grossen Zahl von Differenzen und ihrer passenden Vereinigung zu Mittelzahlen. Bei diesen Operationen wurde ich wesentlich durch Herrn cand. astr. C. Schwend unterstützt, der ungefähr die Hälfte der Vergleichungen ausführte.

Ehe ich auf die Mittheilung der gewonnenen Resultate eingehe, möchte ich zuerst darauf hinweisen, was bisher über das Verhalten der Durchmusterungsgrössen bekannt war.

In der Hauptsache war man in Bezug auf das photometrische Verhalten der Sterne 6.—9. Grösse der Durchmusterungen fast allein auf die Resultate zweier in Pulkowa mit einem Zöllner'schen Photometer ausgeführten Arbeiten angewiesen, welche sich die Aufgabe stellten den Logarithmus log $\gamma$ des Helligkeitsverhältnisses zweier um eine Grössenklasse aus-

[1]) Annals of the Astronomical Observatory of Harvard College. Vol. XXIV, Cambridge. 1890.

einanderliegenden Sterne der nördlichen Bonner Durchmusterung (*D. M.*) festzustellen, welcher in der jetzt allgemein angenommenen photometrischen Scala 0.4 ist. Die beiden Arbeiten rühren von Herrn Rosén[1]) und dem kürzlich verstorbenen Lindemann[2]) her. Herr Rosén hat 110 Sterne untersucht und gefunden für Sterne von der Grösse

| | |
|---|---|
| $5^m - 6^m$, | $\log \gamma = 0.388$ |
| 6 — 7 | 0.388 |
| 7 — 8 | 0.363 |
| 8 — 9 | 0.379 |

Lindemann hat in seine Ableitung 92 Sterne von der Grösse $6.1^m - 7.0^m$, 101 zwischen $7.1^m - 8.0^m$ und 97 Sterne zwischen $8.1^m - 9.5^m$ einbezogen und das Resultat erhalten für:

| | |
|---|---|
| $6^m - 7^m$, | $\log \gamma = 0.394$ |
| 7 — 8 | 0.392 |
| 8 — 9 | 0.437 |

Diese beiden Zahlenreihen, auf den ersten Blick gut übereinstimmend, zeigen doch bedeutende Unterschiede, wenn man weiter entfernte Helligkeitsgrade, z. B. Sterne 9. und 6. Grösse mit einander vergleichen will. Bezeichnet $h_m$ die Helligkeit eines Sternes von der Grösse $m$, so geben z. B. die Zahlen Herrn Roséns: $\log h_{6\cdot 0} - \log h_{9\cdot 0} = 1.130$, während nach Lindemann dafür 1.223 herauskommt, was einem Unterschiede von fast $\frac{1}{4}$ Grössenklasse gleichkommt. An sich sind beide Beobachtungsreihen mit grosser Sorgfalt und nach eingehendem Studium des angewandten Instrumentes ausgeführt. Bei der vorliegenden Aufgabe kommt es aber auf möglichst grosse Ge-

---

[1]) Rosén, Studien und Messungen mit einem Zöllner'schen Photometer. Bulletin de l'acad. d. St. Pétersbourg 1870. Referat von Engelmann in der Vierteljahrsschrift der A. G. Jahrgang V, S. 29 ff.

[2]) Lindemann, Photometrische Bestimmung der Grössenklassen der Bonner Durchmusterung. Supplément II aux Observations de Poulkova. 1889. Referat von Herrn G. Müller, V. J. S. Jahrg. 25, S. 25 ff.

nauigkeit der Einzelmessungen in erster Linie nicht an. Es unterliegt keinem Zweifel und ist leicht erklärlich, dass die einzelnen Grössenschätzungen der nördlichen Durchmusterung bedeutenden zufälligen Fehlern unterworfen waren. Um diese zu eliminiren, um also Aussagen machen zu können, die sich auf eine mittlere in Bonn eingehaltene Helligkeitsscala beziehen, wird die Anzahl von 110 Sternen, wie bei Rosén, und werden wohl auch die 290 Sterne Lindemanns nicht ausreichen. Dazu kommt aber noch ein viel einflussreicherer Umstand. Die Bonner Durchmusterung enthält, wie ebenfalls leicht erklärlich, constante Schätzungsfehler, welche zonenweise auftreten. Diese können erst durch eine weit grössere Anzahl von Vergleichspunkten unschädlich gemacht werden und zwar wird man eine sehr grosse Anzahl über den ganzen Himmel vertheilter Sterne betrachten müssen, wenn die constanten Schätzungsfehler sich nur langsam mit dem Ort am Himmel ändern und wenn diese Abhängigkeit einen nennenswerthen Betrag erreicht. Beides findet, wie gezeigt werden wird, bei der *D. M.* statt. Aus diesem Grunde muss man der *H. R.* eine erhöhte Wichtigkeit zuerkennen, denn sie enthält eine überaus grosse Anzahl photometrischer Bestimmungen von Durchmusterungssternen, die über den ganzen nördlichen Himmel verstreut sind, wenn auch mit einer wohl beträchtlich geringeren Genauigkeit, als im Einzelnen zu erreichen möglich ist.

Wie schon erwähnt, ist die in der *D. M.* angewandte Helligkeitsscala variabel mit dem Orte am Himmel und zwar bei den schwächeren Sternen in einem ziemlich erheblichen Betrage. Vor allem tritt eine Abhängigkeit von der Lage zur Milchstrasse oder, was formell auf dasselbe hinausläuft, von der Sternfülle in der betrachteten Himmelsregion, deutlich hervor. Da aber die Lage zur Milchstrasse bei allen stellarastronomischen Untersuchungen eine wesentliche Rolle spielt, so muss diesem Punkte auch bei der Aufsuchung der Beziehung der Bonner Sterngrössen zu einer festen photometrischen Scala ganz besondere Aufmerksamkeit zugewendet werden. Eine Vergleichung der Grössen der Durchmusterung mit photometrischen Messungen

kann eben nur dann ein unzweideutiges Resultat ergeben, wenn man zugleich angeben kann, wie die Räume, in denen die verglichenen Sterne sich befinden, gegen die Milchstrasse liegen.

Die erste Hindeutung darauf, dass die Bonner Sternschätzungen in sternreichen Gegenden merklich anders ausgefallen sind, als in sternarmen, hat Schönfeld in der Einleitung zur südlichen Durchmusterung — *S. D.* — Seite [36] gemacht. Ihm fiel danach gleich beim Beginne seiner Arbeit auf, dass die Differenzen der Grössenangaben der *S. D.* weniger derjenigen der Bessel'schen Zonen „um so mehr positiv sind, je sternreicher die verglichenen Räume sind". Dieses Vorkommniss hat später Herr Scheiner[1]) näher untersucht und bestätigt gefunden. Er hat auch Vergleichungen mit Argelander und Schjellerup angestellt und die Differenzen der Grössenangaben *S. D.* — Bessel bez. Argelander und Schjellerup in die Form gebracht:

$$h_0 + a \cdot \frac{D - D_0}{D_0}$$

wo $D$ die Sternfülle in der betrachteten Gegend, $D_0$ eine gewisse nicht näher angegebene mittlere Sternfülle bedeutet. Es ergab sich

| | *S. D.* — Bessel | | *S. D.* — Argelander | |
|---|---|---|---|---|
| Grösse | $h_0$ | $a$ | $h_0$ | $a$ |
| 7 m | — 0.13m | + 0.323m | + 0.19m | + 0.276m |
| 7½ | — 0.10 | + 0.247 | + 0.21 | + 0.357 |
| 8 | — 0.03 | + 0.285 | + 0.12 | + 0.307 |
| 8½ | — 0.13 | + 0.224 | + 0.05 | + 0.161 |
| 9 | — 0.20 | + 0.139 | — 0.02 | + 0.185 |

[1]) Vergleichung der Grössenangaben der südlichen Durchmusterung mit denen anderer Cataloge. Astr. Nachr. Nr. 2766, 1887.

wobei die Grössenangabe in der ersten Verticalreihe diejenige des verglichenen Kataloges ist. Die natürlich viel schwächer begründete Vergleichung mit Schjellerup ergab:

| | | |
|---|---|---|
| $8\frac{1}{2}^{m}$ | $h_0 = -0.31^{m}$ | $a = +0.065^{m}$ |
| $8\frac{3}{4}$ | $-0.21$ | $+0.178$ |
| $9$ | $-0.21$ | $+0.073$ |

Sämmtliche $a$ haben das positive Vorzeichen und die aus den Vergleichungen mit Bessel und Argelander hervorgegangenen stimmen auch ihrem Betrag nach recht gut überein. Man wird deshalb aus diesen Vergleichungen wohl mit einiger Sicherheit den Schluss ziehen dürfen, dass die aufgefundenen Differenzen in der Hauptsache in systematischen Schätzungsfehlern der *S.D.* ihren Grund haben und man wird sich auch, wie es Herr Scheiner thut, mit plausiblen Erklärungsversuchen über die Thatsache hinwegsetzen können, dass die Vergleichung der *S.D.* mit Lalande von dem erwähnten Einfluss der Sternfülle nichts zeigt.

Die Coefficienten $a$ sind positiv und nehmen, wenn die Vergleichung mit Schjellerup ausser der Betrachtung bleibt, mit zunehmender Sterngrösse ab. Die zweite Eigenschaft, auf die es bei manchen Anwendungen besonders ankommt, ist indessen nicht als verbürgt anzusehen. Die Vergleichung mit *H.R.* wird auch die erste, aber keineswegs die zweite Eigenschaft ergeben.

Dass Einflüsse von der Art, wie die eben besprochenen, bei Sterngrössenschätzungen in einem grösseren Gesichtsfelde zu erwarten sind, kann man leicht einsehen, wenn man berücksichtigt, dass sich das schätzende Auge in sternreichen Gegenden in einem anderen Reizungszustand befindet als in sternarmen und wenn man ferner annimmt, dass die adoptirte Schätzungsscala hiervon abhängig ist. Die letztere Annahme scheint nothwendig zu sein, wenn man die von Herrn Scheiner gefundenen Zahlen in ihrer Abhängigkeit von der Sterngrösse

durch eine Formel darstellen wollte, die auf der Grundlage des Fechner'schen psychophysischen Gesetzes aufgebaut ist. Dadurch werden aber so weitgehende Willkürlichkeiten in die Betrachtung eingeführt, dass eine auf diesem Wege aufgestellte Formel nicht viel mehr Werth als eine Interpolationsformel beanspruchen kann, weshalb ich auf dahingehende Versuche nicht näher eingehen möchte.

Die Vergleichungen des Herrn Scheiner beziehen sich aut Cataloge, deren Sterngrössen ebenfalls durch Schätzungen erhalten sind, deren Helligkeitsscala auch nicht näher bekannt ist. Es ist ferner eine naheliegende Vermuthung, dass die Sternschätzungen der *S.D.* durch die angewendete Feldbeleuchtung nicht ganz unbeeinflusst geblieben sind. Diese Feldbeleuchtung wurde am Anfange jeder Zone sorgfältig den äusseren Umständen angepasst, zu denen natürlich auch die Sternfülle in der eingestellten Himmelsgegend gehört. Und wenn auch der Beobachter Schönfeld mit bewundernswerther Annäherung das Bestreben, seine Arbeit der nördlichen *D.M.* möglichst homogen zu gestalten, erreicht hat, so könnte man doch von vornherein geneigt sein zu vermuthen, dass sich in den Sterngrössen der *D.M.* der Einfluss der Milchstrasse in einer ganz andern Weise zeigen könnte. In jedem Falle ist aber a priori nichts näheres über diesen Punkt zu sagen, und man muss ihn als einer Untersuchung dringend bedürftig bezeichnen.

Bei den Vergleichungen der nördlichen *D.M.* mit der *H.R.*, worauf nunmehr eingegangen werden soll, ist deshalb auch auf den Einfluss der Sternfülle gehörig Rücksicht genommen worden und es hat sich in der That herausgestellt, dass bei den schwächeren Sternen dadurch ein ganz wesentlicher Einfluss aufgedeckt worden ist.

Bei Gelegenheit der Mittheilung der Abzählungen der in der Bonner Durchmusterung enthaltenen Sterne[1]) habe ich den Himmel in 9 Zonen eingetheilt, die parallel zu der Milch-

[1]) Sitzungsberichte der Münchener Akademie 1884 und 1886.

strasse, deren Mitte als längs eines grossen Kreises verlaufend angenommen wurde, liegen. Zone I reicht von + 90° bis + 70° nördlicher galactischer Breite, Zone II von + 70° bis + 50° u. s. f., Zone V von + 10° bis — 10° die Milchstrasse umschliessend, Zone IX endlich von — 70° bis — 90°. Ich habe a. a. O. die Grenzcurven dieser Zonen durch Diagramme dargestellt, durch welche die Zone, in welcher eine gegebene Himmelsgegend liegt, sofort abgelesen werden kann und überall dort, wo es nicht auf grosse Genauigkeit ankommt, werden diese Curven nützlich befunden werden. Ich habe im vorliegenden Falle diese Curven ebenfalls benutzt und ihre Verwendung gestaltete sich überaus einfach, weil die Resultate der *H. R.* nach einzelnen Declinationsgraden geordnet sind. Es waren also in den Tabellen der einzelnen Declinationsgrade die Grenzen der Zonen I bis VIII — IX kommt in *D. M.* nicht vor — kenntlich zu machen. Die *H. R.* enthält die Declinationsgrade + 0°, + 1°, + 4°, + 5°, + 9°, + 10° u. s. f. Bei der beschränkten Genauigkeit reichte es aus für zwei anstossende Declinationsgrade, also für 0° und 1°, für 4° und 5° etc., dieselben Grenzcurven anzunehmen. Um eine etwaige Controle zu ermöglichen, führe ich in der folgenden Tabelle die angenommenen Grenzen der Zonen an. Die Zahlen sind so zu verstehen: Für + 0° und + 1° reicht z. B. Zone VIII von $0^h\,0^m$ bis $2^h\,48^m$ und von $22^h\,54^m$ bis $0^h$, Zone III von $9^h\,5^m$ bis $10^h\,54^m$ und von $14^h\,48^m$ bis $16^h\,33^m$.

| | +0° | +5° |
|---|---|---|
| | h m | h m |
| | 0 0 | 0 0 |
| VIII | 2 48 | 2 24 |
| VII | 4 30 | 4 15 |
| VI | 6 2 | 5 50 |
| V | 7 35 | 7 24 |
| IV | 9 5 | 8 50 |
| III | 10 54 | 10 30 |
| II | 14 48 | 15 6 |
| III | 16 33 | 16 45 |
| IV | 18 5 | 18 15 |
| V | 19 33 | 19 42 |
| VI | 21 12 | 21 24 |
| VII | 22 54 | 23 12 |
| VIII | $0^h$ | $0^h$ |

| | +10° | +15° | +20° | +25° | +30° | +35° | +40° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h m | | | | | | |
| | 0 0 | h m | h m | h m | h m | | |
| VIII | 1 45 | 0 0 | 0 0 | 0 0 | 0 0 | h m | h m |
| VII | 4 0 | 3 42 | 3 20 | 2 54 | 2 0 | 0 0 | 0 0 |
| VI | 5 38 | 5 30 | 5 15 | 5 0 | 4 42 | 4 24 | 3 54 |
| V | 7 12 | 7 0 | 6 54 | 6 42 | 6 30 | 6 18 | 6 5 |
| IV | 8 42 | 8 32 | 8 24 | 8 15 | 8 10 | 8 3 | 7 55 |
| III | 10 13 | 10 5 | 9 54 | 9 48 | 9 45 | 9 42 | 9 42 |
| II | 12 4 | 11 36 | 11 25 | 11 18 | 11 18 | 11 20 | 11 30 |
| I | 13 25 | 13 50 | 14 6 | 14 15 | 14 18 | 14 18 | 14 10 |
| II | 15 18 | 15 30 | 15 42 | 15 48 | 15 54 | 15 48 | 15 54 |
| III | 16 54 | 17 0 | 17 10 | 17 20 | 17 25 | 17 32 | 17 40 |
| IV | 18 24 | 18 30 | 18 42 | 18 50 | 19 3 | 19 15 | 19 24 |
| V | 19 54 | 20 3 | 20 18 | 20 32 | 20 50 | 21 12 | 21 40 |
| VI | 21 32 | 21 50 | 22 15 | 22 45 | 23 26 | $0^h$ | $0^h$ |
| VII | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ | | |

| | +50° | +55° | +60° | +65° | | +70° | | +75° | +80° | +85° | >86° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | h m | | | | | | | | | | |
| | 0 0 | h m | h m | h m | | h m | | | | | |
| VI | 2 15 | 0 0 | 0 0 | 0 0 | | 0 0 | | h m | h m | h m | |
| V | 5 33 | 5 15 | 4 48 | 4 10 | V | 3 0 | | 0 0 | 0 0 | 0 0 | |
| IV | 7 48 | 7 46 | 7 42 | 7 42 | IV | 7 40 | IV | 7 42 | 8 0 | 8 48 | IV |
| III | 9 50 | 10 6 | 10 30 | 11 15 | III | 18 0 | III | 17 54 | 17 40 | 16 40 | |
| II | 15 45 | 15 30 | 15 10 | 14 24 | IV | 22 36 | IV | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ | |
| III | 17 50 | 17 54 | 17 55 | 18 0 | V | $0^h$ | | | | | |
| IV | 20 0 | 20 20 | 20 50 | 21 24 | | | | | | | |
| V | 22 10 | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ | | | | | | | |
| VI | $0^h$ | | | | | | | | | | |

Es wurden nun für die einzelnen Declinationsgrade und Zonen die Differenzen der Grössenangaben *D.M.*—*H.R.* gebildet und zusammenaddirt. Hierbei wurden die Differenzen ohne jede Correctur dem angeführten Werke entnommen und nur jene ausgeschlossen, deren absoluter Betrag $\geq 0.7$ war. Das ist freilich eine ziemlich willkürliche Maassnahme. Sie entstand aus dem Bestreben, nicht gar zu viele Ausschliessungen machen zu müssen und in der That bildet die Zahl der thatsächlich erfolgten einen ganz geringfügigen Procentsatz. Unzweifelhaft befinden sich unter den mitgenommenen Differenzen viele, die

durch Fehler irgend welcher Art entweder in der *D.M.* oder in der *H.R.* entstanden sind. Es bleibt also nur die Annahme übrig, dass sich alle diese Ungenauigkeiten, die zum Theil kaum festzustellen wären, im Mittel aufheben. Man wird dies bei der überaus grossen Anzahl von Vergleichungen, die benutzt werden konnten, mit einiger Sicherheit annehmen können, aber nur dort, wo sehr verschiedene Regionen des Himmels bei den einzelnen Mittelwerthen mitstimmen. Denn bei den Differenzen fällt sofort auf, dass sie sehr oft innerhalb engerer Bezirke von annähernd gleichem Betrage sind, dass also eine Art systematischer Beeinflussung mitgespielt hat, sei es bei den Schätzungen der *D.M.*, sei es bei den photometrischen Messungen. Diejenigen Mittelwerthe also, welche nur aus Vergleichungen, die sich auf kleinere Bezirke erstrecken, entstanden sind, wird man nicht als sicher betrachten dürfen. Dies findet bei den Zonen VIII und I statt, und thatsächlich weichen die ihnen zugehörigen Mittelzahlen theilweise stark von den Werthen ab, die man durch eine nicht ganz unzuverlässige Extrapolation aus den den andern Zonen entsprechenden Mittelwerthen gewinnt.

Die erhaltenen Summen der Differenzen für die einzelnen Declinationsgrade und Zonen wurden in Tabellen zusammengestellt. Diese sollen aber nicht mitgetheilt werden, vielmehr enthalten die folgenden Tabellen gleich die Mittelwerthe, vor denen die Anzahl der Differenzen steht. Am Fusse jeder Tabelle steht indessen die Summe für jede Zone und die dazugehörige Anzahl der Sterne. Diese Summen sind also direct gebildet und genauer, als sie aus den auf 2 Stellen abgekürzten Mittelwerthen hervorgehen würden. Um mittlere Differenzen für die ganzen und halben Grössenklassen der *D.M.* zu erhalten, sind folgende Grössenklassen der *D.M.* zu Gruppen vereinigt worden:

Gruppe 1 enthält die *D.M.* Grössen 6.3 bis 6.7 incl. Die Gruppen 2, 3, 4 und 5 bezw. die Grössen 6.8 bis 7.2 incl., 7.3 bis 7.7 incl., 7.8 bis 8.2 incl., 8.3 bis 8.7 incl., endlich

die Gruppen 6 und 6a die Grössen 8.8, 8.9, 9.0 bezw. 9.1 und 9.2.

Die letzten beiden Gruppen wurden zunächst aus dem Grunde auseinander gehalten, weil vermuthet werden konnte, dass sich die *D.M.* Grössen 9.1—9.2 der Schätzungsscala, welche bei den helleren Sternen angewendet worden ist, nicht einfügen. Es ergab sich indessen zum Schlusse, dass diese Vermuthung sich wenigstens nicht mit Sicherheit bestätigt und so konnten dann die beiden Gruppen 6 und 6a in eine einzige unbedenklich vereinigt werden. Die für die einzelnen Gruppen erhaltenen Mittelzahlen werden nun sehr nahe für die *D.M.* Grössen 6.5, 7.0 etc. bis 9.0 gelten. Abgesehen davon, dass die Grössen der einzelnen Gruppen sich symmetrisch um die ganzen und halben Grössenklassen lagern, kommt hierbei noch in Betracht, dass die Decimalen 0 und 5 sowohl in der *D.M.* als auch in dem Verzeichnisse der *H.R.* sehr bedeutend überwiegen. Zu den nun folgenden Tabellen wäre noch zu bemerken, dass wegen der geringen Anzahl von Sternen, welche die Gruppe 6a bilden, hier mehrere Declinationsgrade zusammengefasst worden sind.

Grösse 6.3,

| | VIII | | VII | | VI | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0—5° | 2 | +0.03 | — | — | 8 | +0.10 | 8 | +0.30 |
| 9—15 | 1 | —0.42 | 16 | +0.11 | 26 | +0.09 | 20 | —0.09 |
| 19—25 | | | 24 | —0.16 | 32 | —0.10 | 24 | +0.03 |
| 29—35 | | | 2 | —0.06 | 35 | —0.12 | 26 | +0.01 |
| 39—45 | | | | | 31 | —0.06 | 38 | +0.04 |
| 49—55 | | | | | 12 | 0.00 | 35 | —0.14 |
| 59—65 | | | | | | | 41 | 0.00 |
| 69—75 | | | | | | | 11 | 0.00 |
| ≥75° | | | | | | | | |
| Summe | 3 | —0.36 | 42 | —2.17 | 144 | —5.82 | 293 | —0.56 |

Grösse: 6.8,

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 6 | +0.11 | 2 | +0.60 | 5 | +0.25 | 6 | +0.05 |
| 1 | — | — | 1 | +0.36 | — | — | 2 | +0.26 |
| 4 | — | — | 2 | +0.40 | 2 | +0.10 | 6 | +0.18 |
| 5 | — | — | 1 | +0.29 | 3 | +0.37 | 9 | +0.11 |
| 9 | 3 | +0.34 | 5 | +0.27 | 4 | +0.06 | 4 | +0.30 |
| 10 | 2 | +0.21 | 6 | +0.04 | 8 | +0.11 | 7 | +0.10 |
| 14 | | | 7 | —0.07 | 7 | +0.02 | 11 | —0.06 |
| 15 | | | 9 | —0.03 | 8 | —0.05 | 10 | —0.08 |
| 19 | | | 12 | —0.15 | 12 | —0.26 | 12 | +0.03 |
| 20 | | | 9 | —0.21 | 7 | —0.22 | 5 | +0.27 |
| 24 | | | 5 | —0.32 | 4 | +0.34 | 4 | +0.08 |
| 25 | | | 5 | —0.18 | 5 | —0.25 | 6 | —0.14 |
| 29 | | | 1 | —0.26 | 7 | 0.00 | 14 | +0.04 |
| 30 | | | 5 | —0.20 | 6 | —0.15 | 18 | +0.02 |
| 34 | | | | | 20 | —0.23 | 10 | +0.10 |
| 35 | | | | | 17 | —0.22 | 4 | +0.07 |
| 39 | | | | | 22 | —0.08 | 13 | +0.05 |
| 40 | | | | | 18 | —0.15 | 12 | —0.08 |
| 44 | | | | | 11 | +0.13 | 10 | +0.06 |
| 45 | | | | | 17 | —0.06 | 8 | —0.01 |
| 49 | | | | | 7 | —0.31 | 12 | —0.10 |
| 50 | | | | | 12 | —0.03 | 7 | —0.16 |
| 54 | | | | | | | 16 | —0.26 |
| 55 | | | | | | | 12 | +0.06 |
| 59 | | | | | | | 23 | —0.18 |
| 60 | | | | | | | 13 | —0.11 |
| 64 | | | | | | | 12 | —0.27 |
| 65 | | | | | | | 15 | —0.24 |
| 69 | | | | | | | 6 | —0.14 |
| 70 | | | | | | | 1 | —0.54 |
| 74 | | | | | | | | |
| 75 | | | | | | | | |
| 76 | | | | | | | | |
| 79 | | | | | | | | |
| >80° | | | | | | | | |
| Summe | 11 | +2.07 | 70 | —4.04 | 202 | —16.98 | 288 | —12.66 |

6.4, 6.5, 6.6, 6.7.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | + 0.23 | 4 | + 0.15 | 8 | + 0.20 | — | — |
| 13 | 0.00 | 8 | + 0.12 | 10 | + 0.27 | 2 | + 0.34 |
| 13 | + 0.04 | 16 | − 0.15 | 6 | + 0.12 | 11 | + 0.04 |
| 21 | + 0.07 | 8 | + 0.21 | 6 | + 0.01 | 9 | + 0.23 |
| 27 | − 0.12 | 12 | − 0.12 | 11 | − 0.06 | 6 | − 0.19 |
| 27 | − 0.04 | 14 | + 0.04 | 18 | − 0.04 | — | — |
| 17 | − 0.06 | 19 | − 0.06 | 11 | − 0.15 | — | — |
| 18 | − 0.11 | 23 | − 0.10 | | | | |
| 31 | + 0.04 | 14 | − 0.04 | | | | |
| 171 | − 3.26 | 118 | − 3.84 | 70 | + 1.96 | 28 | + 2.10 |

6.9, 7.0, 7.1, 7.2.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | + 0.03 | 2 | + 0.42 | 3 | + 0.17 | — | — |
| 2 | − 0.13 | 1 | + 0.16 | — | — | — | — |
| 6 | + 0.37 | 1 | + 0.35 | 1 | − 0.22 | — | — |
| 3 | − 0.01 | 1 | + 0.34 | — | — | — | — |
| 7 | + 0.12 | 6 | + 0.08 | 4 | + 0.29 | — | — |
| 4 | + 0.24 | 2 | + 0.22 | 1 | + 0.08 | — | — |
| 3 | − 0.26 | 4 | − 0.05 | 4 | − 0.02 | 1 | + 0.26 |
| 8 | − 0.06 | 6 | + 0.03 | 3 | − 0.09 | 3 | + 0.39 |
| 4 | + 0.05 | 6 | − 0.16 | 3 | + 0.23 | 6 | + 0.05 |
| 1 | + 0.20 | 3 | + 0.40 | 4 | + 0.26 | 3 | + 0.13 |
| 5 | + 0.11 | 2 | + 0.08 | 4 | − 0.34 | 5 | − 0.20 |
| 3 | − 0.03 | 2 | + 0.27 | 5 | + 0.13 | 5 | − 0.25 |
| 6 | + 0.15 | 2 | − 0.36 | 4 | − 0.34 | 7 | − 0.20 |
| 8 | + 0.13 | 3 | + 0.18 | 5 | − 0.12 | 3 | − 0.26 |
| 3 | − 0.17 | 6 | 0.00 | 3 | + 0.26 | 2 | − 0.42 |
| 11 | − 0.13 | 4 | + 0.04 | 3 | − 0.03 | 7 | − 0.22 |
| 16 | − 0.26 | 4 | − 0.18 | 2 | + 0.28 | 4 | − 0.36 |
| 13 | − 0.08 | 11 | − 0.11 | 4 | − 0.29 | 8 | − 0.26 |
| 8 | + 0.09 | 3 | + 0.08 | 5 | − 0.20 | 1 | − 0.32 |
| 7 | − 0.39 | 4 | + 0.22 | 10 | − 0.22 | | |
| 3 | − 0.04 | 5 | − 0.18 | 3 | − 0.19 | | |
| 8 | − 0.14 | 4 | − 0.02 | 7 | − 0.08 | | |
| 5 | + 0.13 | 3 | + 0.47 | 7 | + 0.03 | | |
| 11 | − 0.11 | — | — | 5 | − 0.07 | | |
| 7 | + 0.04 | 7 | − 0.10 | 2 | − 0.29 | | |
| 12 | + 0.01 | 5 | − 0.05 | 2 | + 0.07 | | |
| 5 | − 0.03 | 5 | − 0.07 | 3 | − 0.31 | | |
| 5 | − 0.22 | 6 | − 0.36 | 2 | − 0.40 | | |
| 10 | − 0.20 | 8 | − 0.20 | | | | |
| 6 | − 0.13 | 6 | − 0.07 | | | | |
| 6 | + 0.03 | 3 | − 0.14 | | | | |
| 14 | − 0.11 | 10 | − 0.23 | | | | |
| 4 | − 0.20 | 2 | − 0.20 | | | | |
| 3 | + 0.13 | 2 | − 0.21 | | | | |
| 35 | − 0.03 | 19 | − 0.15 | | | | |
| 256 | − 10.78 | 158 | − 9.51 | 99 | − 6.24 | 55 | − 8.74 |

Grösse 7.3,

| | VIII | | VII | | VI | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 5 | + 0.21 | 6 | + 0.08 | 4 | + 0.16 | 10 | + 0.10 |
| 1 | 1 | + 0.21 | 1 | − 0.49 | 1 | − 0.14 | 1 | + 0.01 |
| 4 | 1 | − 0.31 | 3 | + 0.08 | 4 | + 0.08 | 6 | − 0.09 |
| 5 | 4 | + 0.32 | 5 | − 0.15 | 3 | + 0.21 | 6 | + 0.22 |
| 9 | 1 | − 0.17 | 14 | + 0.02 | 5 | − 0.02 | 5 | + 0.17 |
| 10 | 3 | − 0.09 | 8 | + 0.02 | 5 | + 0.05 | 6 | + 0.16 |
| 14 | | | 8 | − 0.11 | 3 | + 0.39 | 14 | − 0.01 |
| 15 | | | 5 | + 0.07 | 11 | − 0.13 | 8 | + 0.02 |
| 19 | | | 9 | − 0.07 | 7 | − 0.10 | 14 | − 0.04 |
| 20 | | | 11 | − 0.05 | 7 | − 0.23 | 8 | + 0.04 |
| 24 | | | 4 | − 0.06 | 9 | + 0.14 | 9 | + 0.08 |
| 25 | | | 10 | − 0 17 | 8 | − 0.05 | 10 | + 0.01 |
| 29 | | | 5 | + 0.21 | 18 | − 0.12 | 11 | + 0.08 |
| 30 | | | | | 12 | − 0.09 | 15 | + 0.08 |
| 34 | | | | | 16 | − 0.22 | 10 | + 0.05 |
| 35 | | | | | 12 | − 0.18 | 13 | + 0.18 |
| 39 | | | | | 17 | − 0.14 | 20 | − 0.02 |
| 40 | | | | | 20 | − 0.23 | 20 | + 0.09 |
| 44 | | | | | 14 | − 0.07 | 13 | − 0.17 |
| 45 | | | | | 9 | − 0.28 | 12 | − 0.25 |
| 49 | | | | | 9 | − 0.21 | 13 | + 0.02 |
| 50 | | | | | 7 | − 0.14 | 13 | − 0.11 |
| 54 | | | | | | | 27 | − 0.22 |
| 55 | | | | | | | 21 | − 0.04 |
| 59 | | | | | | | 19 | − 0.04 |
| 60 | | | | | | | 15 | − 0.17 |
| 64 | | | | | | | 13 | − 0.17 |
| 65 | | | | | | | 6 | 0.00 |
| 69 | | | | | | | 5 | − 0.26 |
| 70 | | | | | | | 1 | − 0.09 |
| 74 | | | | | | | | |
| 75 | | | | | | | | |
| 76 | | | | | | | | |
| 79 | | | | | | | | |
| 80 | | | | | | | | |
| >80 | | | | | | | | |
| Summe | 15 | + 1.81 | 89 | − 2.57 | 201 | − 22.22 | 344 | − 9.26 |

7.4, 7.5, 7.6, 7.7.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | + 0.05 | 10 | + 0.16 | 7 | − 0.01 | | |
| 5 | + 0.22 | 3 | + 0.09 | 1 | + 0.51 | | |
| 2 | + 0.25 | 3 | + 0.28 | 6 | + 0.25 | | |
| 3 | + 0.10 | 2 | + 0.37 | 6 | + 0.10 | | |
| 4 | + 0.25 | 2 | + 0.31 | 2 | + 0.51 | 2 | + 0.38 |
| 3 | + 0.12 | 6 | + 0.30 | 6 | + 0.08 | 3 | + 0.36 |
| 6 | − 0.12 | 2 | + 0.06 | 1 | − 0.04 | 4 | + 0.12 |
| 8 | − 0.10 | 4 | − 0.12 | 3 | − 0.12 | 3 | + 0.53 |
| 7 | − 0.08 | 4 | − 0.10 | 5 | + 0.19 | 4 | + 0.28 |
| 9 | + 0.03 | 4 | + 0.05 | 6 | − 0.14 | 3 | − 0.21 |
| 11 | + 0.20 | 3 | − 0.31 | 5 | + 0.04 | 4 | − 0.27 |
| 8 | − 0.07 | 4 | − 0.18 | 8 | − 0.14 | 9 | − 0.37 |
| 11 | + 0.27 | 9 | + 0.01 | 2 | − 0.02 | 4 | − 0.22 |
| 6 | + 0.08 | 2 | − 0.11 | 5 | − 0.18 | 4 | − 0.24 |
| 6 | + 0.02 | 8 | − 0.07 | 5 | − 0.06 | 3 | − 0.09 |
| 8 | − 0.16 | 8 | − 0.13 | 2 | − 0.55 | 3 | − 0.21 |
| 14 | − 0.26 | 4 | − 0.30 | 10 | − 0.24 | 2 | + 0.27 |
| 15 | − 0.20 | 9 | − 0.20 | 7 | − 0.26 | 6 | − 0.17 |
| 10 | − 0.12 | 4 | − 0.22 | 10 | − 0.07 | 2 | − 0.52 |
| 7 | − 0.19 | 10 | − 0.25 | 4 | − 0.47 | 1 | − 0.62 |
| 9 | − 0.15 | 8 | − 0.22 | 5 | − 0.21 | | |
| 7 | − 0.24 | 10 | − 0.16 | 11 | − 0.26 | | |
| 9 | − 0.45 | 7 | − 0.02 | 5 | − 0.16 | | |
| 6 | − 0.11 | 4 | − 0.02 | 5 | − 0.08 | | |
| 14 | − 0.13 | 3 | − 0.04 | 4 | − 0.15 | | |
| 4 | − 0.12 | 6 | − 0.32 | 9 | − 0.29 | | |
| 7 | + 0.12 | 2 | − 0.08 | 4 | − 0.13 | | |
| 13 | + 0.02 | 7 | − 0.04 | 3 | + 0.10 | | |
| 6 | − 0.23 | 12 | − 0.24 | | | | |
| 12 | − 0.22 | 3 | + 0.09 | | | | |
| 6 | + 0.01 | 5 | − 0.17 | | | | |
| 22 | − 0.12 | 10 | − 0.21 | | | | |
| 3 | − 0.19 | 4 | − 0.27 | | | | |
| 10 | − 0.01 | 2 | − 0.16 | | | | |
| 10 | + 0.17 | 7 | − 0.16 | | | | |
| 35 | + 0.02 | 21 | + 0.11 | | | | |
| 322 | − 15.30 | 212 | − 16.06 | 147 | − 14.89 | 57 | − 4.89 |

Grösse: 7.8.

| | VIII | | VII | | VI | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 7 | — 0.17 | 10 | + 0.24 | 8 | + 0.02 | 10 | + 0.18 |
| 1 | 5 | + 0.20 | 3 | + 0.03 | 3 | + 0.02 | 6 | + 0.29 |
| 4 | 1 | + 0.30 | 6 | + 0.07 | 10 | + 0.26 | 8 | + 0.20 |
| 5 | 6 | + 0.18 | 10 | + 0.06 | 5 | + 0.39 | 7 | + 0.19 |
| 9 | 1 | — 0.17 | 6 | — 0.02 | 7 | + 0.01 | 6 | — 0.03 |
| 10 | 1 | — 0.17 | 15 | — 0.13 | 10 | + 0.07 | 6 | + 0.04 |
| 14 | | | 8 | — 0.03 | 8 | — 0.08 | 10 | + 0.20 |
| 15 | | | 13 | 0.00 | 9 | 0.00 | 10 | + 0.01 |
| 19 | | | 4 | — 0.25 | 7 | — 0.23 | 5 | — 0.02 |
| 20 | | | 4 | — 0.18 | 12 | — 0.24 | 8 | + 0.11 |
| 24 | | | 8 | — 0.04 | 7 | — 0.02 | 8 | + 0.18 |
| 25 | | | 7 | — 0.30 | 11 | — 0.08 | 16 | + 0.03 |
| 29 | | | 6 | + 0.01 | 17 | — 0.12 | 14 | + 0.01 |
| 30 | | | 11 | + 0.01 | 16 | — 0.08 | 18 | + 0.06 |
| 34 | | | | | 25 | — 0.19 | 10 | — 0.06 |
| 35 | | | | | 18 | — 0.21 | 11 | + 0.12 |
| 39 | | | | | 16 | — 0.14 | 29 | — 0.13 |
| 40 | | | | | 16 | — 0.22 | 13 | — 0.17 |
| 44 | | | | | 9 | — 0.05 | 18 | — 0.12 |
| 45 | | | | | 11 | — 0.18 | 19 | — 0.03 |
| 49 | | | | | 15 | — 0.29 | 15 | — 0.10 |
| 50 | | | | | 7 | — 0.26 | 10 | — 0.20 |
| 54 | | | | | | | 27 | — 0.23 |
| 55 | | | | | | | 26 | — 0.01 |
| 59 | | | | | | | 28 | — 0.12 |
| 60 | | | | | | | 15 | — 0.06 |
| 64 | | | | | | | 9 | — 0.21 |
| 65 | | | | | | | 14 | — 0.25 |
| 69 | | | | | | | 9 | — 0.27 |
| 70 | | | | | | | 4 | — 0.03 |
| 74 | | | | | | | | |
| 75 | | | | | | | | |
| 76 | | | | | | | | |
| 79 | | | | | | | | |
| 80 | | | | | | | | |
| > 80 | | | | | | | | |
| Summe | 21 | + 1.40 | 111 | — 2.54 | 247 | — 26.84 | 389 | — 17.67 |

7.9, 8.0, 8.1, 8.2.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | + 0.22 | 8 | + 0.29 | 8 | + 0.17 | | |
| 5 | + 0.09 | 1 | − 0.54 | 6 | − 0.11 | | |
| 6 | + 0.31 | 4 | + 0.10 | 6 | − 0.13 | | |
| 7 | + 0.25 | 4 | + 0.15 | 6 | − 0.09 | | |
| 13 | − 0.03 | 4 | + 0.05 | 3 | + 0.35 | 2 | + 0.21 |
| 11 | + 0.06 | 7 | + 0.19 | 4 | + 0.26 | 3 | + 0.50 |
| 12 | − 0.04 | 7 | − 0.17 | 3 | − 0.24 | 5 | + 0.21 |
| 10 | − 0.18 | 7 | − 0.04 | 5 | − 0.33 | 1 | + 0.21 |
| 7 | − 0.19 | 7 | + 0.04 | 5 | − 0.17 | 9 | + 0.08 |
| 9 | − 0.18 | 3 | − 0.10 | 3 | − 0.28 | 4 | − 0.14 |
| 10 | + 0.05 | 4 | − 0.37 | 3 | − 0.06 | 3 | − 0.06 |
| 6 | − 0.18 | 2 | + 0.29 | 5 | − 0.04 | 3 | − 0.41 |
| 9 | + 0.16 | 10 | + 0.29 | 6 | − 0.14 | 2 | − 0.39 |
| 13 | − 0.03 | 4 | + 0.08 | 8 | − 0.32 | 3 | − 0.58 |
| 10 | − 0.09 | 8 | + 0.02 | 3 | − 0.39 | 3 | − 0.05 |
| 7 | − 0.29 | 9 | − 0.16 | 1 | 0.00 | 3 | − 0.40 |
| 13 | − 0.30 | 6 | − 0.25 | 5 | − 0.13 | 2 | − 0.22 |
| 8 | − 0.15 | 5 | − 0.17 | 13 | − 0.02 | 3 | − 0.54 |
| 5 | − 0.19 | 8 | − 0.28 | 6 | − 0.17 | 2 | − 0.32 |
| 10 | − 0.35 | 6 | − 0.28 | 8 | − 0.21 | 3 | − 0.29 |
| 7 | − 0.05 | 9 | − 0.21 | 7 | − 0.11 | | |
| 11 | − 0.30 | 2 | + 0.13 | 6 | − 0.18 | | |
| 11 | − 0.11 | 1 | + 0.04 | 4 | − 0.37 | | |
| 14 | − 0.16 | 5 | − 0.03 | 6 | − 0.15 | | |
| 12 | − 0.20 | 9 | + 0.07 | 3 | − 0.09 | | |
| 7 | − 0.17 | 7 | − 0.20 | 5 | − 0.16 | | |
| 10 | − 0.04 | 4 | − 0.21 | 3 | − 0.13 | | |
| 9 | − 0.18 | 7 | − 0.31 | 2 | − 0.08 | | |
| 12 | − 0.20 | 8 | + 0.02 | | | | |
| 10 | − 0.07 | 7 | − 0.09 | | | | |
| 9 | − 0.03 | 4 | − 0.22 | | | | |
| 28 | − 0.12 | 15 | − 0.15 | | | | |
| 10 | + 0.09 | 4 | − 0.20 | | | | |
| 10 | − 0.08 | 2 | − 0.38 | | | | |
| 17 | − 0.07 | 9 | − 0.05 | | | | |
| 54 | + 0.05 | 20 | − 0.08 | | | | |
| 410 | − 27.34 | 227 | − 15.18 | 143 | − 16.87 | 51 | − 5.47 |

Grösse: 8.3,

| | VIII | | VII | | VI | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0° | 17 | — 0.18 | 20 | — 0.06 | 28 | + 0.07 | 25 | + 0.15 |
| 1 | 10 | — 0.26 | 6 | — 0.11 | 18 | + 0.15 | 8 | + 0.06 |
| 4 | 8 | — 0.23 | 18 | — 0.23 | 24 | + 0.01 | 20 | 0.00 |
| 5 | 10 | + 0.30 | 17 | — 0.22 | 18 | — 0.05 | 22 | + 0.09 |
| 9 | 1 | — 0.07 | 10 | — 0.19 | 19 | — 0.05 | 16 | + 0.10 |
| 10 | 7 | — 0.38 | 14 | + 0.03 | 18 | + 0.01 | 23 | + 0.02 |
| 14 | | | 14 | — 0.17 | 18 | — 0.05 | 16 | + 0.07 |
| 15 | | | 9 | — 0.32 | 6 | — 0.02 | 15 | + 0.03 |
| 19 | | | 6 | — 0.31 | 9 | — 0.19 | 17 | — 0.03 |
| 20 | | | 17 | — 0.21 | 12 | — 0.19 | 21 | — 0.12 |
| 24 | | | 8 | — 0.26 | 14 | — 0.13 | 17 | — 0.08 |
| 25 | | | 10 | — 0.22 | 16 | — 0.10 | 15 | — 0.08 |
| 29 | | | 3 | — 0.09 | 27 | — 0.17 | 13 | — 0.02 |
| 30 | | | 7 | + 0.08 | 14 | — 0.25 | 17 | 0 |
| 34 | | | | | 20 | — 0.36 | 22 | — 0.08 |
| 35 | | | | | 18 | — 0.30 | 25 | — 0.01 |
| 39 | | | | | 23 | — 0.26 | 21 | — 0.22 |
| 40 | | | | | 19 | — 0.32 | 26 | — 0.22 |
| 44 | | | | | 19 | — 0.03 | 9 | — 0.08 |
| 45 | | | | | 21 | — 0.09 | 25 | — 0.10 |
| 49 | | | | | 15 | — 0.20 | 21 | — 0.10 |
| 50 | | | | | 12 | — 0.29 | 22 | — 0.26 |
| 54 | | | | | | | 10 | — 0.19 |
| 55 | | | | | | | 19 | — 0.13 |
| 59 | | | | | | | 22 | — 0.19 |
| 60 | | | | | | | 17 | — 0.14 |
| 64 | | | | | | | 15 | — 0.19 |
| 65 | | | | | | | 11 | — 0.25 |
| 69 | | | | | | | 11 | — 0.18 |
| 70 | | | | | | | 5 | — 0.10 |
| 74 | | | | | | | | |
| 75 | | | | | | | | |
| 76 | | | | | | | | |
| 79 | | | | | | | | |
| 80 | | | | | | | | |
| >80 | | | | | | | | |
| Summe | 53 | — 9.86 | 159 | — 25.99 | 388 | — 46.95 | 526 | — 37.81 |

8.4, 8.5, 8.6, 8.7.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | − 0.11 | 6 | + 0.03 | 18 | − 0.09 | | |
| 10 | − 0.05 | 4 | + 0.04 | 11 | − 0.06 | | |
| 24 | − 0.04 | 10 | − 0.13 | 15 | + 0.12 | | |
| 9 | − 0.09 | 7 | + 0.21 | 16 | − 0.02 | | |
| 13 | − 0.08 | 6 | + 0.11 | 8 | + 0.03 | 6 | − 0.09 |
| 19 | + 0.05 | 13 | + 0.01 | 16 | − 0.05 | 6 | − 0.04 |
| 10 | − 0.13 | 4 | − 0.01 | 5 | − 0.04 | 5 | − 0.19 |
| 11 | − 0.02 | 7 | − 0.05 | 6 | + 0.01 | 4 | − 0.18 |
| 12 | − 0.25 | 11 | − 0.12 | 8 | − 0.26 | 2 | − 0.40 |
| 9 | − 0.08 | 8 | − 0.14 | 6 | − 0.21 | 10 | − 0.24 |
| 10 | − 0.19 | 6 | − 0.22 | 5 | − 0.24 | 1 | − 0.61 |
| 14 | − 0.29 | 11 | − 0.23 | 4 | − 0.32 | 7 | − 0.32 |
| 13 | + 0.08 | 7 | − 0.25 | 7 | − 0.25 | 2 | − 0.31 |
| 13 | − 0.01 | 10 | − 0.32 | 5 | − 0.38 | 3 | − 0.26 |
| 16 | − 0.24 | 6 | − 0.27 | 5 | − 0.11 | 3 | − 0.08 |
| 18 | − 0.20 | 8 | − 0.26 | 8 | − 0.30 | 10 | − 0.09 |
| 14 | − 0.32 | 4 | − 0.41 | 2 | − 0.37 | 7 | − 0.51 |
| 20 | − 0.29 | 5 | − 0.47 | 4 | − 0.26 | 1 | − 0.57 |
| 9 | − 0.26 | 7 | − 0.17 | 5 | − 0.45 | 3 | − 0.29 |
| 16 | − 0.22 | 5 | − 0.22 | 6 | − 0.34 | 3 | − 0.39 |
| 20 | − 0.10 | 5 | − 0.30 | 5 | − 0.18 | | |
| 11 | − 0.21 | 4 | − 0.37 | 6 | − 0.19 | | |
| 15 | − 0.21 | 8 | + 0.03 | 3 | − 0.23 | | |
| 6 | − 0.19 | 6 | − 0.14 | 6 | − 0.19 | | |
| 17 | − 0.07 | 11 | − 0.36 | 8 | − 0.19 | | |
| 16 | − 0.31 | 3 | − 0.23 | 3 | − 0.59 | | |
| 11 | − 0.09 | 11 | − 0.18 | 3 | − 0.08 | | |
| 7 | − 0.21 | 8 | − 0.05 | 2 | − 0.45 | | |
| 11 | 0.00 | 18 | − 0.17 | | | | |
| 8 | − 0.10 | 4 | − 0.10 | | | | |
| 4 | − 0.03 | 5 | − 0.08 | | | | |
| 60 | − 0.06 | 36 | − 0.09 | | | | |
| 13 | + 0.06 | 10 | + 0.03 | | | | |
| 10 | − 0.06 | 4 | − 0.02 | | | | |
| 7 | 0.00 | 2 | − 0.28 | | | | |
| 11 | + 0.09 | 9 | − 0.13 | | | | |
| 507 | − 58.80 | 289 | − 39.62 | 196 | − 28.14 | 73 | − 17.11 |

Grösse 8.8,

| | VIII | | VII | | VI | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| +0° | 27 | — 0.30 | 25 | — 0.28 | 42 | + 0.01 | 48 | + 0.05 |
| 1 | 9 | — 0.16 | 17 | — 0.12 | 20 | — 0.06 | 16 | + 0.07 |
| 4 | 18 | — 0.26 | 20 | — 0.31 | 23 | — 0.16 | 30 | + 0.02 |
| 5 | 11 | — 0.33 | 17 | — 0.25 | 25 | — 0.23 | 23 | — 0.01 |
| 9 | 4 | — 0.32 | 16 | — 0.14 | 26 | — 0.15 | 19 | + 0.08 |
| 10 | 14 | — 0.29 | 20 | — 0.20 | 21 | — 0.16 | 35 | + 0.03 |
| 14 | | | 12 | — 0.31 | 24 | — 0.13 | 20 | — 0.02 |
| 15 | | | 17 | — 0.18 | 13 | — 0.11 | 17 | 0.00 |
| 19 | | | 21 | — 0.35 | 17 | — 0.26 | 22 | 0.00 |
| 20 | | | 13 | — 0.32 | 11 | — 0.32 | 25 | — 0.16 |
| 24 | | | 18 | — 0.24 | 19 | — 0.33 | 26 | — 0.19 |
| 25 | | | 9 | — 0.30 | 8 | — 0.27 | 25 | — 0.10 |
| 29 | | | 8 | — 0.26 | 19 | — 0.31 | 23 | — 0.09 |
| 30 | | | 11 | — 0.26 | 32 | — 0.23 | 29 | — 0.14 |
| 34 | | | | | 41 | — 0.29 | 30 | — 0.04 |
| 35 | | | | | 26 | — 0.34 | 24 | — 0.19 |
| 39 | | | | | 27 | — 0.38 | 28 | — 0.14 |
| 40 | | | | | 29 | — 0.38 | 32 | — 0.32 |
| 44 | | | | | 18 | — 0.26 | 27 | — 0.22 |
| 45 | | | | | 23 | — 0.22 | 22 | — 0.28 |
| 49 | | | | | 28 | — 0.32 | 30 | — 0.27 |
| 50 | | | | | 16 | — 0.26 | 21 | — 0.26 |
| 54 | | | | | | | 34 | — 0.26 |
| 55 | | | | | | | 31 | — 0.15 |
| 59 | | | | | | | 26 | — 0.19 |
| 60 | | | | | | | 21 | — 0.24 |
| 64 | | | | | | | 14 | — 0.18 |
| 65 | | | | | | | 13 | — 0.30 |
| 69 | | | | | | | 11 | — 0.12 |
| 70 | | | | | | | 9 | — 0.06 |
| 74 | | | | | | | | |
| 75 | | | | | | | | |
| 76 | | | | | | | | |
| 79 | | | | | | | | |
| 80 | | | | | | | | |
| >80 | | | | | | | | |
| Summe | 83 | — 23.38 | 224 | — 56.08 | 508 | — 116.38 | 731 | — 89.58 |

8.9, 9.0.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | — 0.21 | 24 | — 0.28 | 25 | — 0.32 | | |
| 19 | — 0.31 | 11 | — 0.26 | 12 | — 0.41 | | |
| 34 | — 0.08 | 18 | — 0.15 | 19 | — 0.28 | | |
| 14 | — 0.07 | 10 | — 0.19 | 9 | — 0.32 | | |
| 23 | — 0.08 | 4 | — 0.07 | 12 | — 0.21 | 8 | — 0.31 |
| 23 | — 0.05 | 7 | — 0.09 | 14 | — 0.28 | 7 | — 0.46 |
| 13 | — 0.18 | 16 | — 0.18 | 11 | — 0.07 | 3 | — 0.42 |
| 20 | — 0.06 | 13 | — 0.18 | 7 | — 0.22 | 5 | — 0.20 |
| 14 | — 0.26 | 10 | — 0.35 | 4 | — 0.38 | 4 | — 0.34 |
| 12 | — 0.24 | 8 | — 0.20 | 4 | — 0.35 | 5 | — 0.18 |
| 17 | — 0.28 | 11 | — 0.25 | 3 | — 0.49 | 6 | — 0.32 |
| 16 | — 0.37 | 7 | — 0.37 | 12 | — 0.36 | 6 | — 0.46 |
| 15 | — 0.09 | 9 | — 0.37 | 6 | — 0.39 | 9 | — 0.53 |
| 15 | — 0.16 | 17 | — 0.13 | 6 | — 0.42 | 3 | — 0.43 |
| 19 | — 0.18 | 5 | — 0.46 | 7 | — 0.44 | 1 | — 0.22 |
| 15 | — 0.34 | 8 | — 0.39 | 6 | — 0.20 | 8 | — 0.31 |
| 21 | — 0.38 | 6 | — 0.32 | 9 | — 0.31 | 3 | — 0.40 |
| 25 | — 0.41 | 9 | — 0.32 | 5 | — 0.34 | 5 | — 0.56 |
| 16 | — 0.32 | 13 | — 0.42 | 6 | — 0.59 | 4 | — 0.25 |
| 6 | — 0.37 | 10 | — 0.45 | 11 | — 0.50 | 3 | — 0.52 |
| 25 | — 0.20 | 9 | — 0.37 | 18 | — 0.33 | | |
| 18 | — 0.25 | 6 | — 0.40 | 12 | — 0.33 | | |
| 14 | — 0.27 | 9 | — 0.21 | 5 | — 0.19 | | |
| 20 | — 0.27 | 5 | — 0.08 | 10 | — 0.15 | | |
| 16 | — 0.31 | 11 | — 0.16 | 5 | — 0.37 | | |
| 9 | — 0.21 | 13 | — 0.20 | 4 | — 0.50 | | |
| 15 | — 0.12 | 6 | — 0.21 | 9 | — 0.29 | | |
| 13 | — 0.08 | 11 | — 0.20 | 7 | — 0.21 | | |
| 22 | — 0.12 | 20 | — 0.05 | | | | |
| 10 | — 0.12 | 11 | — 0.09 | | | | |
| 15 | — 0.08 | 10 | — 0.16 | | | | |
| 72 | — 0.14 | 51 | — 0.14 | | | | |
| 21 | — 0.07 | 9 | — 0.02 | | | | |
| 16 | — 0.09 | 10 | — 0.15 | | | | |
| 7 | + 0.10 | 4 | — 0.30 | | | | |
| 17 | — 0.03 | 5 | — 0.15 | | | | |
| 673 | — 122.63 | 406 | — 86.38 | 258 | — 81.56 | 80 | — 30.24 |

Grösse 9.1,

| | VIII | | VII | | VI | | V | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0— 1° | 1 | — 0.27 | 3 | — 0.13 | 6 | + 0.05 | 11 | + 0.02 |
| 4— 5 | 2 | — 0.33 | 9 | — 0.21 | 2 | — 0.11 | 13 | — 0.06 |
| 9—10 | 4 | — 0.36 | 9 | — 0.11 | 9 | + 0.03 | 7 | + 0.16 |
| 14—15 | | | 12 | — 0.30 | 11 | — 0.21 | 7 | — 0.07 |
| 19—20 | | | — | — | 4 | — 0.06 | 8 | — 0.16 |
| 24—25 | | | 6 | — 0.14 | 2 | — 0.16 | 6 | — 0.27 |
| 29—30 | | | 3 | — 0.18 | 4 | — 0.24 | 11 | — 0.22 |
| 34—35 | | | | | 8 | — 0.35 | 14 | — 0.15 |
| 39—40 | | | | | 9 | — 0.36 | 6 | — 0.07 |
| 44—45 | | | | | 16 | — 0.25 | 21 | — 0.24 |
| 49—50 | | | | | 9 | — 0.19 | 6 | — 0.21 |
| 54—55 | | | | | | | 4 | — 0.36 |
| 59—60 | | | | | | | 12 | — 0.10 |
| 64—65 | | | | | | | 1 | — 0.40 |
| 69—70 | | | | | | | 7 | — 0.11 |
| 74—75 | | | | | | | — | — |
| 76, 79—80 | | | | | | | 10 | + 0.06 |
| >80 | | | | | | | 1 | + 0.07 |
| Summe | 7 | — 2.36 | 42 | — 8.29 | 80 | — 15.10 | 145 | — 17.14 |

9.2.

| IV | | III | | II | | I | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | − 0.24 | 7 | − 0.47 | 3 | − 0.33 | | |
| 6 | − 0.12 | 3 | + 0.16 | 3 | − 0.19 | | |
| 4 | + 0.12 | 3 | − 0.09 | 3 | − 0.30 | 2 | − 0.05 |
| 3 | − 0.18 | 11 | − 0.22 | 10 | − 0.23 | 2 | + 0.04 |
| 14 | − 0.21 | 8 | − 0.40 | 6 | − 0.42 | 3 | − 0.38 |
| 10 | − 0.29 | 4 | − 0.27 | 5 | − 0.51 | 3 | − 0.46 |
| 5 | − 0.27 | 1 | − 0.66 | — | — | 5 | − 0.43 |
| 11 | − 0.12 | 11 | − 0.24 | 5 | − 0.37 | 3 | − 0.38 |
| 4 | − 0.06 | 5 | − 0.29 | 5 | − 0.41 | 5 | − 0.56 |
| 18 | − 0.19 | 2 | − 0.45 | 5 | − 0.35 | 4 | − 0.47 |
| 3 | − 0.18 | 7 | − 0.35 | 7 | − 0.35 | | |
| 3 | − 0.36 | 2 | − 0.09 | 4 | − 0.32 | | |
| 6 | − 0.18 | 6 | − 0.08 | 4 | − 0.56 | | |
| 2 | − 0.10 | — | — | 5 | − 0.16 | | |
| 6 | − 0.23 | 13 | − 0.19 | | | | |
| 25 | − 0.08 | 16 | − 0.02 | | | | |
| 7 | + 0.11 | | | | | | |
| 1 | − 0.23 | | | | | | |
| 137 | − 21.03 | 99 | − 21.20 | 65 | − 22.19 | 27 | − 10.52 |

Die vorstehenden Tabellen vereinigen 10660 Vergleichungen. Ein blosser Anblick der Zahlen bestätigt die schon oben gemachte Bemerkung, dass die einzelnen Himmelsgegenden (hier Declinationsgrade) ausgeprägte systematische Abweichungen zeigen.

Um über diese sehr deutliche und systematische Abhängigkeit der Bonner Grössenscala von der Declination eine bessere Uebersicht zu gewinnen, mögen die mit Rücksicht auf die Sternzahlen gebildeten Mittel der in horizontaler Reihe stehenden Abweichungen *D.M.* — *H.R.* mitgetheilt werden. Ich habe gleich 2 Declinationsgrade vereinigt und das resultirende Mittel dem einfachen Mittel der Declination zugeordnet.

| δ | 6.3—6.7$^m$ | δ | 6.8—7.2$^m$ | 7.3—7.7$^m$ | 7.8—8.2$^m$ | 8.3—8.7$^m$ | 8.8—9.2$^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3°0 | +0.187 | 1° | +0.167 | +0.105 | +0.124 | −0.016 | −0.156 |
| 12.5 | +0.065 | 5 | +0.203 | +0.125 | +0.161 | −0.038 | −0.158 |
| 22.5 | −0.038 | 10 | +0.161 | +0.120 | +0.043 | −0.019 | −0.118 |
| 32.5 | +0.019 | 15 | −0.033 | −0.011 | −0.033 | −0.065 | −0.149 |
| 42.5 | −0.055 | 20 | −0.042 | −0.036 | −0.112 | −0.169 | −0.242 |
| 52.5 | −0.056 | 25 | −0.078 | −0.054 | −0.051 | −0.183 | −0.276 |
| 62.5 | −0.041 | 30 | −0.040 | +0.004 | −0.026 | −0.121 | −0.228 |
| 72.5 | −0.079 | 35 | −0.117 | −0.083 | −0.134 | −0.188 | −0.244 |
| 75.5 | +0.013 | 40 | −0.119 | −0.140 | −0.173 | −0.291 | −0.329 |
| | | 45 | −0.042 | −0.194 | −0.170 | −0.157 | −0.301 |
| | | 50 | −0.134 | −0.157 | −0.188 | −0.193 | −0.281 |
| | | 55 | −0.046 | −0.131 | −0.130 | −0.151 | −0.224 |
| | | 60 | −0.093 | −0.145 | −0.113 | −0.210 | −0.242 |
| | | 65 | −0.232 | −0.032 | −0.188 | −0.170 | −0.189 |
| | | 70 | −0.167 | −0.204 | −0.098 | −0.117 | −0.113 |
| | | 75 | −0.123 | −0.127 | −0.122 | −0.070 | −0.117 |
| | | 78 | −0.110 | −0.108 | −0.056 | +0.011 | −0.043 |
| | | >80° | −0.070 | +0.053 | −0.006 | −0.026 | −0.063 |

Die einzelnen Werthe schwanken zwar nicht unbeträchtlich in unregelmässiger Weise hin und her, aber ein durchaus systematisch von der Declination abhängiger Gang ist unverkennbar. Dieser letztere ist keineswegs durch den verschiedenen Antheil, mit welchem die einzelnen Zonen an den Mitteln theilnehmen, zu erklären, sondern thatsächlich zeigt die in Bonn angewandte Helligkeitsscala beträchtliche Schwankungen, welche von zwei Argumenten, der Rectascension und Declination, oder, wie hier die Anordnung geschah, der Declination und der Zone, abhängig ist. Man wird deshalb auch die Resultate der

obigen Tabellen nicht durch einfacher verlaufende Zahlenreihen so darstellen können, dass ihre Anwendung in allen Fällen zu empfehlen wäre, vielmehr wird man am besten immer auf die ursprünglichen Tabellen zurückgehen.

Der Einfluss der Sternfülle bezw. die Lage der betreffenden Sterne zur Milchstrasse tritt besonders bei den schwächeren Sternen überaus deutlich hervor. Besonders auffallend wird diese Erscheinung, wenn man die Mittel der Differenzen für jede Zone und Grössengruppe bildet. Es findet sich:

| | $6.3-6.7^m$ | | | $6.8-7.2^m$ | | | $7.3-7.7^m$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zone | *Δ* | *A* | *F* | *Δ* | *A* | *F* | *Δ* | *A* | *F* |
| VIII | −0.120 | 3 | −0.023 | +0.188 | 11 | −0.065 | +0.121 | 15 | −0.077 |
| VII | −0.051 | 42 | 21 | −0.058 | 70 | 63 | −0.029 | 89 | 75 |
| VI | −0.040 | 144 | 14 | −0.084 | 202 | 56 | −0.110 | 201 | 65 |
| V | −0.003 | 203 | 09 | −0.044 | 288 | 51 | −0.027 | 344 | 56 |
| IV | −0.019 | 171 | 16 | −0.042 | 256 | 58 | −0.076 | 322 | 68 |
| III | −0.033 | 118 | 22 | −0.060 | 158 | 64 | −0.079 | 212 | 76 |
| II | +0.028 | 70 | 24 | −0.063 | 99 | 66 | −0.113 | 147 | 79 |
| I | +0.075 | 28 | 24 | −0.161 | 55 | 66 | −0.085 | 57 | 79 |
| Mittel | −0.015 | 779 | | −0.059 | 1139 | | −0.060 | 1387 | |

| | $7.8-8.2^m$ | | | $8.3-8.7^m$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Zone | *Δ* | *A* | *F* | *Δ* | *A* | *F* |
| VIII | + 0.067 | 21 | − 0.087 | − 0.186 | 53 | − 0.156 |
| VII | − 0.023 | 111 | 83 | − 0.164 | 159 | 148 |
| VI | − 0.109 | 247 | 62 | − 0.121 | 388 | 109 |
| V | − 0.047 | 389 | 47 | − 0.072 | 526 | 079 |
| IV | − 0.067 | 410 | 68 | − 0.116 | 507 | 121 |
| III | − 0.067 | 227 | 84 | − 0.137 | 289 | 151 |
| II | − 0.118 | 143 | 89 | − 0.144 | 196 | 161 |
| I | − 0.107 | 51 | 91 | − 0.234 | 73 | 164 |
| Mittel | − 0.069 | 1599 | | − 0.121 | 2191 | |

| | $8.8-9.0^m$ | | $9.1-9.2^m$ | | $8.8-9.2^m$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Zone | *Δ* | *A* | *Δ* | *A* | *Δ* | *A* | *F* |
| VIII | − 0.281 | 83 | − 0.337 | 7 | − 0.286 | 90 | − 0.270 |
| VII | − 0.250 | 224 | − 0.200 | 42 | − 0.242 | 266 | 256 |
| VI | − 0.229 | 508 | − 0.189 | 80 | − 0.223 | 588 | 183 |
| V | − 0.123 | 731 | − 0.118 | 145 | − 0.122 | 876 | 125 |
| IV | − 0.182 | 673 | − 0.154 | 137 | − 0.177 | 810 | 204 |
| III | − 0.213 | 406 | − 0.214 | 99 | − 0.213 | 505 | 261 |
| II | − 0.316 | 258 | − 0.341 | 65 | − 0.321 | 323 | 280 |
| I | − 0.378 | 80 | − 0.390 | 27 | − 0.381 | 107 | 285 |
| Mittel | − 0.205 | 2963 | − 0.196 | 602 | − 0.203 | 3565 | |

Die Rubrik *Δ* enthält die Mittelwerthe der Differenzen der Grössenangaben *D. M.* — *H. R.*, die danebenstehenden *A* be-

deuten die Anzahl der benützten Sterne. $F$ soll später erklärt werden. Man sieht, dass im Allgemeinen nur jene $\Delta$ von einem ziemlich regelmässigen Verlaufe abweichen, bei denen $A$ relativ klein ist. Die Differenzen für Zone VIII in den ersten 4 und für Zone I für die 3 ersten Gruppen sind thatsächlich ganz unsicher und würden am besten als unbestimmbar fortzulassen sein. Man wird, was sich aus anderen Gründen empfehlen wird, indessen diese Unsicherheit auch zum Ausdrucke bringen, wenn man $A$ als die Gewichte der zugehörigen $\Delta$ ansieht.

Die zuletzt angeführten Tabellen geben die aus den angestellten Vergleichungen direct hervorgehenden Mittelzahlen. Um aber eine bessere Uebersicht über die Abhängigkeit der Bonner Sternschätzungen von der Lage zur Milchstrasse zu erlangen, wird es sich empfehlen, mit einer entsprechenden Genauigkeit die $\Delta$ durch eine Interpolationsformel darzustellen. Es gelingt dies in der That in recht befriedigender Weise durch eine Formel mit verhältnissmässig wenig Constanten. Die einzelnen Zonen kann man durch ihre mittlere Sternfülle — Anzahl aller in der *D. M.* enthaltenen Sterne auf dem Areale eines Quadratgrades, was natürlich eine zunächst willkürliche Annahme bildet — characterisiren. Setzt man für die Milchstrassenzone V die Sternfülle $D = 1$, so kann man annehmen, wenn noch $\delta = D - 0.7$ gesetzt wird:

| Zone | $D$ | $\delta$ |
|---|---|---|
| VIII | 0.41 | − 0.29 |
| VII | 0.47 | − 0.23 |
| VI | 0.77 | + 0.07 |
| V | 1.00 | + 0.30 |
| IV | 0.68 | − 0.02 |
| III | 0.45 | − 0.25 |
| II | 0.37 | − 0.33 |
| I | 0.35 | − 0.35 |

Es sei $m$ der Ueberschuss der Sterngrösse jeder der Gruppen über 6.5, also der Reihe nach 0, 0.5, 1,0, . . 2.5, $h_m$ die Helligkeit eines Sternes von der Grösse $m$, wobei $h_{6.5} = 1$ angenommen

wird. Nimmt man die Helligkeitsscala, welche der *H. R.* zu Grunde liegt, so ist $\log h_{m-1} - \log h_m = 0.4$ und $1 : h_m$ hat für die 6 Gruppen der Reihe nach die Werthe:

1, 1.58, 2.51, 3.98, 6.31, 10.00

Dann hat eine Ueberschlagsrechnung ergeben, dass die besser bestimmten Differenzen der obigen Tabelle sich durch eine Formel von der Form:

$$c_m + \alpha \cdot \delta + \beta (\delta \cdot m) + \gamma \cdot \frac{\delta}{h_m}$$

befriedigend darstellen lassen. $c_m$ ist eine der betreffenden Gruppe eigenthümliche Zahl. Den vorliegenden 48 Differenzen wurden die Gewichte $A$ gegeben, der Einfachheit wegen wurde indessen für $\sqrt{A}$ die nächstgelegene ganze Zahl angesetzt. Die 48 Bedingungsgleichungen enthalten 9 Unbekannte, nämlich $c_{6\cdot5}$, $c_{7\cdot0}$ . . $c_{9\cdot0}$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Die Aufstellung der Normalgleichungen nach der Methode der kl. Quadr. und ihre Auflösung ist verhältnissmässig einfach, da sich immer nur ein Theil derselben zusammenfindet. Wegen des interpolatorischen Charakters der ganzen, im Uebrigen nach allen Richtungen controllirten Rechnung hätte es kein Interesse mehr als das Endresultat anzuführen. Es ergab sich:

$$D.M. - H.R. = c_m - 0.014\,\delta - 0.043\,(\delta\,m) + 0.0368\left(\frac{\delta}{h_m}\right)$$

worin

$$\begin{aligned} c_{6\cdot5} &= -\ 0.016 \\ c_{7\cdot0} &= -\ 0.058 \\ c_{7\cdot5} &= -\ 0.067 \\ c_{8\cdot0} &= -\ 0.067 \\ c_{8\cdot5} &= -\ 0.118 \\ c_{9\cdot0} &= -\ 0.199 \end{aligned}$$

also für

$$
\left.
\begin{array}{lll}
m = 6.5 & D.M. - H.R. = & -\overset{m}{0.016} + \overset{m}{0.023} \cdot \delta \\
7.0 & & -0.058 + 0.024 \cdot \delta \\
7.5 & & -0.067 + 0.035 \cdot \delta \\
8.0 & & -0.067 + 0.068 \cdot \delta \\
8.5 & & -0.118 + 0.131 \cdot \delta \\
9.0 & & -0.199 + 0.246 \cdot \delta
\end{array}
\right\} (F)
$$

Das Resultat dieser Formel ist unter $F$ in der obigen Tabelle angegeben. Der Anschluss der Zahlen $F$ an die $\Delta$ ist, abgesehen von den bereits namhaft gemachten unsicheren $\Delta$, ein ziemlich zufriedenstellender und die Formel ($F$) wird in vielen Fällen die frühere Tabelle ersetzen können. Die starke Zunahme der Coefficienten von $\delta$ mit $m$ ist ganz zweifellos, wie auch schon der Anblick der ursprünglichen Tabellen ergiebt.

Die Vergleichung zwischen der südlichen Durchmusterung (*S. D.*) und der *H. R.* konnte in Anbetracht der weit geringeren Zahl von Vergleichspunkten nur in weniger ausgedehntem Masse durchgeführt werden. Es wurden hier die Sterngrössen der *S. D.* in die 4 Gruppen zusammengefasst: 1. Gruppe $6.6^m$—$7.5^m$ incl., 2. Gruppe $7.6^m$–$8{,}5^m$ incl., 3. Gruppe $8.6^m$–$9.0^m$ incl., 3a. Gruppe $9.1^m$—$9.2^m$. Die Gruppe 3a wurde zunächst aus denselben Gründen, wie 6a bei der *D. M.* gebildet. Die Zahl der verfügbaren Differenzen ist bei ihr viel zu gering, sodass sich nur constatiren lässt, dass eine auffallende Abweichung in ihrem Verhalten gegen die Gruppe 3 nicht besteht, weshalb nichts anderes übrig bleibt, als beide Gruppen zu vereinigen. Im Ganzen enthalten die folgenden Tabellen 2789 Sterne, also etwa $^1/_4$ der Anzahl, welche bei der *D. M.* angewendet werden konnte. Diese Tabellen sind ganz ähnlich entstanden und angeordnet, wie die analogen für *D. M.* Es wäre der Vollständigkeit wegen nur zu erwähnen, dass in Gegenden, wo stärkere negative Differenzen auftreten, noch solche vom Betrage 0.71 und 0.72 zugelassen und also nicht ausgeschlossen worden sind. Die Grenzen für die Zonen, welche manchmal kleine Verschiebungen erlitten, wenn sie dadurch in eine Lücke im Verzeichnisse der *H. R.* fielen, wurden den folgenden Zahlen gemäss angenommen:

| | −4° | −5° |
|---|---|---|
| | $0^h\ 0^m$ | $0^h\ 0^m$ |
| VIII | 2 58 | 2 58 |
| VII | 4 43 | 4 48 |
| VI | 6 14 | 6 10 |
| V | 7 40 | 7 40 |
| IV | 9 20 | 9 20 |
| III | 11 12 | 11 12 |
| II | 14 31 | 14 26 |
| III | 16 20 | 16 22 |
| IV | 17 52 | 17 50 |
| V | 19 21 | 19 21 |
| VI | 20 55 | 20 50 |
| VII | 22 35 | 22 30 |
| VIII | $0^h$ | $0^h$ |

| | −9° | −10° |
|---|---|---|
| | $0^h\ 0^m$ | $0^h\ 0^m$ |
| IX | 1 28 | 1 28 |
| VIII | 3 23 | 3 18 |
| VII | 4 55 | 4 55 |
| VI | 6 22 | 6 22 |
| V | 7 54 | 7 54 |
| IV | 9 33 | 9 36 |
| III | 11 45 | 11 45 |
| II | 13 50 | 13 49 |
| III | 16 1 | 16 1 |
| IV | 17 40 | 17 40 |
| V | 19 11 | 19 11 |
| VI | 20 42 | 20 42 |
| VII | 22 12 | 22 12 |
| VIII | $0^h$ | $0^h$ |

| | −14° | −15° | −19° | −20° |
|---|---|---|---|---|
| | $0^h\ 0^m$ | $0^h\ 0^m$ | $0^h\ 0^m$ | $0^h\ 0^m$ |
| IX | 1 50 | 1 50 | 2 6 | 2 6 |
| VIII | 3 30 | 3 30 | 3 42 | 3 42 |
| VII | 5 0 | 5 0 | 5 13 | 5 13 |
| VI | 6 30 | 6 30 | 6 41 | 6 42 |
| V | 8 4 | 8 7 | 8 16 | 8 16 |
| IV | 9 48 | 9 54 | 10 15 | 10 15 |
| III | 15 36 | 15 36 | 15 20 | 15 20 |
| IV | 17 30 | 17 26 | 17 20 | 17 13 |
| V | 19 6 | 19 0 | 18 53 | 18 50 |
| VI | 20 30 | 20 30 | 20 24 | 20 24 |
| VII | 22 5 | 22 5 | 21 54 | 21 54 |
| VIII | 23 33 | 23 33 | 23 20 | 23 20 |
| IX | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ | $0^h$ |

Ich lasse nun die Tabellen für die Mittelwerthe der Differenzen *S.D.* — *H.R.* für die einzelnen Declinationsgrade und Zonen folgen.

Grössen 6.6

| | IX | | VIII | | VII | | VI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 4° | — | — | 13 | — 0.04 | 14 | — 0.07 | 14 | + 0.19 |
| — 5 | 2 | + 0.24 | 6 | — 0.02 | 9 | + 0.10 | 6 | + 0.02 |
| — 9 | — | — | 10 | — 0.08 | 15 | — 0.05 | 9 | — 0.10 |
| — 10 | 3 | — 0.31 | 15 | + 0.06 | 10 | — 0.18 | 10 | + 0.17 |
| — 14 | 8 | — 0.09 | 9 | — 0.39 | 15 | — 0.04 | 12 | + 0.25 |
| — 15 | 7 | — 0.12 | 9 | — 0.10 | 11 | — 0.08 | 14 | + 0.17 |
| — 19 | 10 | + 0.05 | 12 | — 0.05 | 18 | — 0.14 | 10 | + 0.05 |
| — 20 | 3 | — 0.29 | 12 | — 0.18 | 9 | — 0.03 | 6 | + 0.17 |
| Summe | 33 | — 2.23 | 86 | — 7.54 | 101 | — 6.70 | 81 | + 10.39 |

Grössen 7.6

| | IX | | VIII | | VII | | VI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 4° | — | — | 13 | — 0.04 | 27 | — 0.25 | 13 | — 0.06 |
| — 5 | — | — | 17 | — 0.14 | 16 | — 0.15 | 20 | — 0.10 |
| — 9 | 6 | — 0.06 | 9 | — 0.09 | 12 | — 0.05 | 13 | + 0.13 |
| — 10 | 7 | — 0.37 | 12 | — 0.16 | 7 | + 0.09 | 22 | + 0.01 |
| — 14 | 10 | — 0.23 | 18 | — 0.25 | 16 | — 0.04 | 11 | + 0.22 |
| — 15 | 5 | — 0.35 | 11 | — 0.26 | 16 | — 0.14 | 10 | + 0.04 |
| — 19 | 10 | — 0.31 | 9 | — 0.11 | 15 | — 0.05 | 21 | + 0.09 |
| — 20 | 11 | — 0.27 | 8 | — 0.22 | 3 | — 0.03 | 19 | + 0.10 |
| Summe | 49 | — 13.11 | 97 | — 15.73 | 112 | — 12.74 | 129 | + 5.66 |

Grössen 8.6

| | IX | | VIII | | VII | | VI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 4° | — | — | 20 | — 0.28 | 15 | — 0.32 | 20 | — 0.18 |
| — 5 | — | — | 23 | — 0.24 | 20 | — 0.27 | 22 | — 0.12 |
| — 9 | 3 | — 0.26 | 12 | — 0.37 | 18 | — 0.24 | 15 | — 0.13 |
| — 10 | 6 | — 0.40 | 8 | — 0.46 | 9 | — 0.30 | 26 | — 0.08 |
| — 14 | 9 | — 0.43 | 13 | — 0.40 | 9 | — 0.28 | 19 | — 0.20 |
| — 15 | 9 | — 0.41 | 12 | — 0.41 | 10 | — 0.19 | 24 | — 0.03 |
| — 19 | 5 | — 0.40 | 14 | — 0.36 | 8 | — 0.39 | 19 | — 0.06 |
| — 20 | 5 | — 0.44 | 11 | — 0.30 | 19 | — 0.18 | 26 | — 0.05 |
| Summe | 37 | — 14.92 | 113 | — 37.58 | 108 | — 28.17 | 171 | — 17.41 |

Grössen 9.1

| | IX | | VIII | | VII | | VI | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| — 4° | — | — | 1 | — 0.05 | 3 | — 0.40 | 8 | — 0.31 |
| — 5 | — | — | 3 | — 0.23 | 3 | — 0.43 | 3 | — 0.23 |
| — 9 | — | — | 2 | — 0.29 | 5 | — 0.12 | 4 | — 0.11 |
| — 10 | — | — | 2 | — 0.19 | 1 | — 0.46 | 3 | — 0.14 |
| — 14 | — | — | 3 | — 0.39 | 2 | — 0.34 | 4 | + 0.03 |
| — 15 | — | — | 1 | — 0.06 | 4 | — 0.38 | 15 | — 0.04 |
| — 19 | — | — | 4 | — 0.21 | 3 | — 0.01 | 6 | — 0.24 |
| — 20 | 3 | — 0.28 | 1 | — 0.53 | 3 | — 0.18 | 8 | — 0.14 |
| Summe | 3 | — 0.84 | 17 | — 4.29 | 24 | — 6.33 | 51 | — 7.08 |

bis 7.5 incl.

| V | | IV | | III | | II | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | − 0.03 | 14 | − 0.06 | 6 | − 0.13 | 15 | + 0.13 |
| 9 | + 0.12 | 13 | − 0.32 | 12 | − 0.04 | 6 | − 0.14 |
| 11 | − 0.02 | 7 | − 0.15 | 8 | − 0.03 | 14 | + 0.07 |
| 8 | + 0.17 | 15 | + 0.10 | 14 | − 0.06 | 4 | + 0.02 |
| 13 | 0.00 | 16 | + 0.04 | 18 | − 0.05 | | |
| 23 | + 0.02 | 14 | + 0.01 | 14 | + 0.13 | | |
| 18 | + 0.10 | 12 | − 0.11 | 17 | + 0.08 | | |
| 13 | + 0.12 | 16 | − 0.03 | 13 | − 0.05 | | |
| 111 | + 5.76 | 107 | − 5.61 | 102 | − 0.80 | 39 | + 0.82 |

bis 8.5 incl.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | − 0.04 | 15 | − 0.32 | 7 | − 0.12 | 23 | − 0.19 |
| 18 | − 0.05 | 9 | − 0.06 | 17 | − 0.12 | 14 | − 0.02 |
| 19 | − 0.15 | 16 | − 0.27 | 13 | + 0.02 | 4 | + 0.23 |
| 13 | − 0.18 | 22 | − 0.31 | 14 | − 0.04 | 5 | − 0.02 |
| 18 | − 0.01 | 14 | + 0.07 | 29 | − 0.12 | | |
| 19 | − 0.09 | 20 | − 0.02 | 21 | − 0.19 | | |
| 25 | − 0.03 | 17 | − 0.18 ? | 12 | − 0.14 | | |
| 19 | + 0.01 | 24 | − 0.10 | 20 | − 0.12 | | |
| 147 | − 9.18 | 137 | − 20.50 | 133 | − 14.65 | 46 | − 3.93 |

bis 9.0 incl.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | − 0.06 | 16 | − 0.21 | 16 | − 0.23 | 13 | − 0.28 |
| 10 | − 0.16 | 17 | − 0.18 | 19 | − 0.19 | 20 | − 0.26 |
| 31 | − 0.15 | 15 | − 0.41 | 22 | − 0.19 | 10 | − 0.21 |
| 29 | − 0.08 | 14 | − 0.35 | 21 | − 0.30 | 9 | − 0.22 |
| 33 | − 0.13 | 22 | − 0.20 | 14 | − 0.17 | | |
| 31 | − 0.12 | 25 | − 0.27 | 24 | − 0.21 | | |
| 42 | + 0.01 | 19 | − 0.23 | 28 | − 0.09 | | |
| 24 | − 0.02 | 28 | − 0.21 | 29 | − 0.18 | | |
| 225 | − 18.24 | 156 | − 38.65 | 173 | − 33.01 | 52 | − 12.92 |

und 9.2

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | − 0.20 | 2 | − 0.08 | 9 | − 0.38 | 4 | − 0.36 |
| 5 | − 0.11 | 5 | − 0.09 | 9 | − 0.31 | 2 | − 0.28 |
| 4 | − 0.22 | 1 | − 0.16 | 4 | − 0.40 | 3 | − 0.23 |
| 3 | − 0.34 | 1 | − 0.26 | 5 | − 0.23 | 1 | − 0.31 |
| 7 | − 0.11 | 2 | − 0.06 | 7 | − 0.25 | | |
| 7 | − 0.19 | 5 | − 0.38 | 10 | − 0.37 | | |
| 14 | 0.00 | 6 | − 0.23 | 6 | − 0.13 | | |
| 8 | + 0.01 | 5 | − 0.22 | 11 | − 0.39 | | |
| 51 | − 5.01 | 27 | − 5.51 | 61 | − 19.60 | 10 | − 2.99 |

Nimmt man die Mittel für die einzelnen Zonen und Grössengruppen, so ergibt sich folgende Zusammenstellung:

| | $6.6^m$—$7.5^m$ | | $7.6^m$—$8.5^m$ | |
|---|---|---|---|---|
| Zone | Δ | A | Δ | A |
| IX | − 0.068 | 33 | − 0.268 | 49 |
| VIII | − 0.088 | 86 | − 0.162 | 97 |
| VII | − 0.066 | 101 | − 0.114 | 112 |
| VI | + 0.128 | 81 | + 0.044 | 129 |
| V | + 0.052 | 111 | − 0.062 | 147 |
| IV | − 0.052 | 107 | − 0.150 | 137 |
| III | − 0.008 | 102 | − 0.110 | 133 |
| II | + 0.021 | 39 | − 0.085 | 46 |
| Mittel | − 0.009 | 660 | − 0.099 | 850 |

| | $8.6^m$—$9.0^m$ | | $9.1^m$, $9.2^m$ | | $8.6^m$—$9.2^m$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Δ | A | Δ | A | Δ | A |
| IX | − 0.403 | 37 | − 0.280 | 3 | − 0.394 | 40 |
| VIII | − 0.333 | 113 | − 0.252 | 17 | − 0.322 | 130 |
| VII | − 0.261 | 108 | − 0.264 | 24 | − 0.261 | 132 |
| VI | − 0.102 | 171 | − 0.139 | 51 | − 0.110 | 222 |
| V | − 0.081 | 225 | − 0.098 | 51 | − 0.084 | 276 |
| IV | − 0.248 | 156 | − 0.204 | 27 | − 0.241 | 183 |
| III | − 0.191 | 173 | − 0.325 | 61 | − 0.225 | 234 |
| II | − 0.248 | 52 | − 0.299 | 10 | − 0.257 | 62 |
| | | 1035 | | 244 | − 0.197 | 1279 |

Der Einfluss der Milchstrasse tritt in den vorstehenden Zahlen überaus deutlich hervor, aber die einzelnen Mittelwerthe verlaufen nicht mehr so regelmässig, wie bei der *D.M.* Dies ist zum Theil jedenfalls eine Folge der kleineren Anzahl der benützten Differenzen, zum Theil aber auch vielleicht eine Folge davon, dass durch die stärker wirkende Extinction und die dadurch bedingte Veränderung im Aussehen der Sternbilder die *S.D.* grösseren systematischen Schätzungsfehlern leichter ausgesetzt war. Es ist auch nicht die Vermuthung abzuweisen, dass die Feldbeleuchtung, so sorgfältig ihre Regulirung auch geschehen und so gering auch ihre Intensität gewesen sein mag, dabei mitgewirkt hat. Auffallend ist auch das asymmetrische Verhalten der symmetrisch gegen die Milchstrasse gelegenen Zonen, namentlich der Zonen IV und VI. Zone VI zeigt überall beträchtlich grössere Werthe — algebraisch genommen — als IV und bei den ersten beiden Gruppen liegt das Maximum nicht in Zone V, sondern in VI. Hier hat also irgend ein

zweiter Einfluss stark mitgewirkt und es ist von vorherein klar, dass es nicht möglich ist, die gefundenen Differenzen durch so einfache Formeln, wie bei der *D.M.*, in gleich befriedigender Weise darzustellen. Um indessen das Verhalten der *S.D.* deutlicher, wenn auch nur in ganz allgemeinen Zügen, übersehen zu können und eine Abschätzung des Einflusses der Lage zur Milchstrasse vornehmen zu können, habe ich die Zonen II und VIII, III und VII, IV und VI nach Massgabe der Gewichte $A$ zu Mitteln vereinigt und diese Mittelwerthe, mit auf ganze Zahlen abgekürzten Wurzeln aus den $A$, für jede Gruppe einzeln durch die Formel

$$S.D. - H.R. = h_0 + a \cdot \delta$$

nach der Methode der kl. Quadr. dargestellt und es ergab sich so

$$\left.\begin{array}{lll} \text{für } 7.0^m & S.D. - H.R. = & 0.000 + 0.214\,\delta \\ \text{,, } 8.0 & = & -0.092 + 0.196\,\delta \\ \text{,, } 9.0 & = & -0.192 + 0.374\,\delta \end{array}\right\} \text{(F)}$$

Hierbei wurde $\delta$ für die Zonen IX, $\frac{1}{2}$(II + VIII), $\frac{1}{2}$(III + VII), $\frac{1}{2}$(IV + VI), V, entsprechend der Anzahl der Sterne, die in der *S.D.* überhaupt vorkommen, der Reihe nach angenommen: — 0.24, — 0.23, — 0.17, + 0.05, + 0.30, Dies ist an und für sich wieder eine einigermassen willkürliche Annahme, die sich aber in der Hauptsache, wie eine Vergleichung der Werthe $F$ und $\Delta$ in der folgenden Zusammenstellung zeigt, bewährt hat.

| Zone | 6.6$^m$ - 7.5$^m$ | | 7.6$^m$—8.5$^m$ | | 8.6$^m$—9.2$^m$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta$ | $F$ | $\Delta$ | $F$ | $\Delta$ | $F$ |
| IX | — 0.068 | — 0.052 | — 0.268 | — 0.139 | — 0.394 | — 0.282 |
| II u. VIII | — 0.054 | — 0.050 | — 0.137 | — 0.137 | — 0.301 | — 0.278 |
| III u. VII | — 0.037 | — 0.036 | — 0.112 | — 0.126 | — 0.238 | — 0.256 |
| IV u. VI | + 0.025 | + 0.011 | — 0.056 | — 0.082 | — 0.170 | — 0.174 |
| V | + 0.052 | + 0.064 | — 0.063 | — 0.033 | — 0.084 | — 0.080 |

Insoweit die letzten Formeln (F) für die *S.D.* und die analogen für die *D.M.* als Ausdruck für die Differenzen der Grössenangaben der beiden Durchmusterungen — Harvard Revision

angesehen werden dürfen, würden also für die Grössenangaben der *D.M.* und *S.D.* die Relationen folgen:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Grösse } 7.0^{\mathrm{m}} & S.D. - D.M. & = + 0.058^{\mathrm{m}} + 0.180^{\mathrm{m}}\,\delta \\ \quad " \quad 8.0 & & = - 0.025 + 0.128\,\delta \\ \quad " \quad 9.0 & & = + 0.007 + 0.128\,\delta \end{array}\right\}$$

Auf die Sternschätzungen der *S.D.* ist demnach der Einfluss der Sternhäufigkeit ein grösserer gewesen, wie bei der *D.M.* In roher Annäherung wird man in vielen Fällen setzen dürfen: $S.D. - D.M. = + 0.14^{\mathrm{m}}\,\delta$.

---

# Ueber die Drehung eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt.

Von F. Lindemann.

(Eingelaufen 20. April.)

Die Lösung des Problems der Rotation eines starren Körpers um seinen Schwerpunkt geschieht bekanntlich mittelst elliptischer Functionen; die Einführung derselben erfordert zwei Schritte: zuerst die Integration der Euler'schen Differential-Gleichungen, die keinerlei Schwierigkeiten bietet, dann die Berechnung der neun Cosinus der Neigungen der im Körper festen Coordinaten-Axen gegen die im Raume fest gedachten Axen. Letztere Berechnung erscheint trotz der von Hermite und anderen angebrachten Vereinfachungen noch immer sehr umständlich. Indem ich umgekehrt den Körper fest, den ganzen Raum aber bewegt denke, führe ich im Folgenden das Problem auf eine von W. Voigt behandelte Aufgabe der Hydrodynamik zurück, für welche die Lösung von Venske in sehr eleganter Form auf Quadraturen reducirt ist. Unter den Integralzeichen erscheinen dabei elliptische Functionen, und man braucht daher die verlangten Integrationen nur nach bekannten Regeln auszuführen, um die fertigen Formeln zu erhalten. Ich habe die Rechnungen so weit durchgeführt, dass die Resultate in der von Hermite gegebenen Gestalt erscheinen, mich deshalb auch ausschliesslich der Jacobi'schen Bezeichnungsweise für die elliptischen Functionen bedient.

Zum Schlusse zeige ich, dass durch eine analoge Ueber-

legung auch ein gewisses anderes Rotationsproblem, das ebenfalls von W. Voigt besprochen ist, auf eine durch Clebsch, H. Weber und F. Kötter erledigte Aufgabe der Hydrodynamik zurückgeführt werden kann.

## § 1. Die Euler'schen Differentialgleichungen.

Die Haupt-Trägheits-Axen eines um seinen Schwerpunkt frei beweglichen Körpers mögen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen. Sie seien mit $A$, $B$, $C$ bezeichnet (wo $A < B < C$), so dass die Gleichung des Trägheits-Ellipsoids in der Form

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

gegeben ist. Sind $p$, $q$, $r$ die Winkelgeschwindigkeiten des bewegten Körpers um die drei (im Körper festen) Haupt-Trägheitsaxen und ist $w$ die Winkelgeschwindigkeit um die momentane Drehungs-Axe, so ist

$$p = w\cos\alpha, \quad q = w\cos\beta, \quad r = w\cos\gamma, \tag{2}$$

$$w^2 = p^2 + q^2 + r^2, \tag{3}$$

wenn $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Richtungswinkel der momentanen Drehungsaxe bezeichnen. Der Pol der Drehung, d. i. der Schnittpunkt dieser Drehungsaxe mit dem Centralellipsoide hat die Coordinaten

$$x_0 = \frac{p}{h}, \quad y_0 = \frac{q}{h}, \quad z_0 = \frac{r}{h}, \tag{4}$$

wenn

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h^2 \tag{5}$$

ist. Für $p$, $q$, $r$ bestehen bekanntlich, da wir das Wirken äusserer Kräfte ausschliessen, die Euler'schen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B - C)\,qr, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C - A)\,rp, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A - B)\,pq. \end{aligned} \tag{6}$$

Mit Hülfe der Gleichung (3), (5) und der weiteren Relation

$$A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2, \tag{7}$$

wo $h$ und $k$ Integrationsconstante bedeuten, wird die Integration der Gleichungen (6) leicht auf elliptische Integrale reducirt. Man kann auch so vorgehen, dass man die Gleichungen (6) direct mit den Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d \sin \mathrm{am}\, u}{du} &= \cos \mathrm{am}\, u \cdot \Delta \mathrm{am}\, u, \\ \frac{d \operatorname{cosin} \mathrm{am}\, u}{du} &= - \Delta \mathrm{am}\, u \cdot \sin \mathrm{am}\, u, \\ \frac{d \Delta \mathrm{am}\, u}{du} &= - \varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, u \cdot \operatorname{cosin} \mathrm{am}\, u \end{aligned} \tag{8}$$

vergleicht, und dann das Argument $u$ und den Modul $\varkappa^2$ entsprechend bestimmt. Auf diese Weise ergibt sich:[1])

$$\begin{gathered} p = a \operatorname{cosin} \mathrm{am}\, u, \quad q = b \sin \mathrm{am}\, u, \quad r = c\, \Delta \mathrm{am}\, u, \\ u = \lambda t + \mu, \end{gathered} \tag{9}$$

wo nun die Constanten $a, b, c, \lambda$ durch die Gleichungen

$$\begin{gathered} b^2 = a^2 \frac{A(A-C)}{B(B-C)}, \quad \lambda^2 = c^2 \frac{(A-C)(B-C)}{AB}, \\ \varkappa^2 = \frac{a^2}{c^2} \frac{A(A-B)}{C(B-C)} \end{gathered} \tag{10}$$

berechnet werden, während $\mu$ von den Anfangswerthen $p_0, q_0, r_0$ der Grössen $p, q, r$ abhängt, so dass

$$p_0 = a \operatorname{cosin} \mathrm{am}\, \mu, \quad q_0 = b \sin \mathrm{am}\, \mu, \quad r_0 = c\, \Delta \mathrm{am}\, \mu. \tag{11}$$

---

[1]) Vgl. z. B. Kirchhoff's Vorlesungen über Mechanik, 7. Vorlesung.

## § 2. Relative Bewegung des Raumes gegen das feste Central-Ellipsoid.

Eine unendlich kleine Drehung um eine Axe mit den Richtungs-Winkeln $\alpha, \beta, \gamma$, bei der ein Punkt $x, y, z$ in den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ übergeführt wird, kann bekanntlich durch folgende Formeln dargestellt werden:

$$\begin{aligned} dx &= d\varphi\,[\quad * \quad - y \cdot \cos\gamma + z \cdot \cos\beta], \\ dy &= d\varphi\,[\quad x\cos\gamma + \quad * \quad - z \cdot \cos\alpha], \\ dz &= d\varphi\,[- x\cos\beta + y\cos\alpha + \quad * \quad], \end{aligned} \tag{12}$$

wo $d\varphi$ den unendlich kleinen Drehungswinkel bezeichnet. Die Rotation ist dadurch von selbst in ihre drei Componenten um die drei Coordinaten-Axen zerlegt.

Um die Rotation des Trägheits-Ellipsoids um die instantane Drehungs-Axe darzustellen, müssten wir ein im Körper festes Coordinatensystem einführen und auf dieses die Gleichungen (12) anwenden, wobei dann $\frac{d\varphi}{dt} = w$ zu setzen wäre, da die Winkelgeschwindigkeit mit $w$ bezeichnet wurde. Statt dessen kann man aber sich vorstellen, dass der Körper fest in seiner Lage verharre, dagegen der ganze Raum sich relativ zu ihm in entgegengesetztem Sinne um die Axe drehe, in welchem Falle dann nur

$$\frac{d\varphi}{dt} = - w \tag{13}$$

zu setzen ist, wenn $w$ die frühere Bedeutung behalten soll. Mit Rücksicht auf (2) gehen dadurch die Gleichungen (12) über in die Form

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ry - qz, \\ \frac{dy}{dt} &= pz - rx, \\ \frac{dz}{dt} &= qx - py. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Elimination von zweien der Grössen $x$, $y$, $z$ führt auf eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung für die dritte dieser Grössen, deren Coëfficienten in Folge von (6) rationale Functionen von $p$, $q$, $r$ sind. Diese Coëfficienten sind somit doppelt-periodische Functionen von $u$, und die Integrale der Differentialgleichung müssen sich nach Picard als doppelt periodische Functionen zweiter Art (im Sinne Hermite's) ergeben.

Gerade mit einem Systeme von Differentialgleichungen von der Form (14) hat sich Picard eingehend beschäftigt unter der Voraussetzung, dass $p$, $q$, $r$ doppelt periodische Functionen erster Art seien, und ist hier zu folgenden Resultaten gekommen:[1]) Es gibt ein Fundamentalsystem von Integralen

$$\begin{matrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{matrix}$$

von der Beschaffenheit, dass zwischen zwei Reihen zusammengehöriger Integrale Identitäten der Form

$$x_m x_n + y_m y_n + z_m z_n = c_{mn} \tag{15}$$

bestehen, wo $m$ auch gleich $n$ sein kann und $c_{mn}$ Constante bedeuten.

In unserem Falle lässt sich nun ein System $x_1, y_1, z_1$ von Lösungen angeben, das durch doppelt periodische Functionen erster Art von $u$ dargestellt wird; und dadurch treten wesentliche Vereinfachungen ein. In der That können wir setzen

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha\, p = \alpha\, a \cos \operatorname{am} u = \alpha\, a \cdot \operatorname{cn} u, \\ y_1 &= \beta\, q = \beta\, b \sin \operatorname{am} u = \beta\, b \cdot \operatorname{sn} u, \\ z_1 &= \gamma\, r = \gamma\, c\, \Delta \operatorname{am} u = \gamma\, c \cdot \operatorname{dn} u. \end{aligned} \tag{16}$$

Führen wir nemlich diese Werthe in (14) ein, so folgt:

---

[1]) Picard, Sur les équations différentielles linéaires à coëfficients doublement périodiques, Crelle's Journal Bd. 90, 1881.

$$\alpha \frac{dp}{dt} = (\beta - \gamma) q r, \quad \beta \frac{dq}{dt} = (\gamma - \alpha) r p, \quad \gamma \frac{dr}{dt} = (\alpha - \beta) p q,$$

so dass sich die Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ durch die Gleichungen

(17) $$\alpha = A \cdot l, \quad \beta = B \cdot l, \quad \gamma = C \cdot l$$

bestimmen, wenn $l$ zunächst unbestimmt bleibt.

Es ist dies dieselbe Rechnung, welche auch sonst bei Behandlung des vorliegenden Problems benutzt wird,[1]) denn die Gleichungen (14) sind wesentlich identisch mit denjenigen Differentialgleichungen, durch die man die neun Coëfficienten in den linearen Gleichungen

(18) $$\begin{aligned} \xi &= c_{11} x + c_{12} y + c_{13} z \\ \eta &= c_{21} x + c_{22} y + c_{23} z \\ \zeta &= c_{31} x + c_{32} y + c_{33} z \end{aligned}$$

bestimmt, welche das im Körper feste Coordinatensystem $\xi$, $\eta$, $\zeta$ mit dem im Raume festen $x$, $y$, $z$ verbinden.

Die Gleichung (15) können wir hier für $m = n = 1$ auf die Form

(19) $$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$$

gebracht denken, wenn wir die Constante $l$ mit Rücksicht auf (7) durch die Bedingung

(20) $$k^2 \cdot l^2 = 1$$

festlegen.

Durch die Gleichungen (16), in denen die Constanten $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $l$ nunmehr durch (17) und (20) vollständig gegeben sind, wird die Bewegung eines ausgezeichneten Raumpunktes, nemlich des Schnittpunktes der instantanen Drehungsaxe mit der Kugel (19), dargestellt, d. h. die relative Lage dieses Punktes gegen das Ellipsoid zu jeder Zeit angegeben. Der Punkt bewegt sich bekanntlich auf einer Raumcurve vierter Ordnung.

---

[1]) Vgl. z. B. Hermite, Sur quelques applications des fonctions elliptiques, p. 24, Paris 1885 (Abdruck aus den Comptes rendus).

## § 3. Allgemeine Lösung der Differentialgleichungen des Problems.

Da jetzt eine Lösung der linearen Differentialgleichung dritter Ordnung bekannt ist, welche man aus dem Systeme (14) abzuleiten hätte, so wird sich diese Gleichung auf eine solche zweiter Ordnung reduciren lassen, und dadurch würden wir im Wesentlichen auf die von Hermite (a. a. O.) zur Bestimmung der Coëfficienten $c_{ik}$ in (18) befolgte Methode geführt werden. Die Aufstellung dieser Gleichung zweiter Ordnung kann aber auch erspart werden, indem sich auf einem von Venske angegebenen Wege die weitere Behandlung des Problems direct auf Quadraturen zurückführen lässt.

Im Anschlusse an ein Problem der Hydrodynamik, das von W. Voigt bearbeitet war, beschäftigt sich Venske mit dem Systeme von Gleichungen:[1])

$$\text{(21)} \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2a^2\left(\frac{\eta z}{a^2+c^2} - \frac{y\zeta}{a^2+b^2}\right), \\ \frac{dy}{dt} &= 2b^2\left(\frac{\zeta x}{b^2+a^2} - \frac{z\xi}{b^2+c^2}\right), \\ \frac{dz}{dt} &= 2c^2\left(\frac{\xi y}{c^2+b^2} - \frac{x\eta}{c^2+a^2}\right), \end{aligned}$$

in denen $a, b, c$ Constante bedeuten und $\xi, \eta, \zeta$ elliptische Functionen von $t$ sind, definirt durch die Gleichungen:

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{2a^2(b^2-c^2)}{(a^2+b^2)\,(a^2+c^2)}\,\eta\zeta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \frac{2b^2(c^2-a^2)}{(b^2+c^2)\,(b^2+a^2)}\,\zeta\xi, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{2c^2(a^2-b^2)}{(c^2+a^2)\,(c^2+b^2)}\,\xi\eta. \end{aligned}$$

---

[1]) Vgl. Nachrichten der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Jahrg. 1891, p. 85.

Offenbar braucht man hier die auftretenden constanten Factoren nur in die Definition der Functionen $\xi, \eta, \zeta$ und $x, y, z$ passend eingehen zu lassen, um direct zu unseren Gleichungen (13) und (9) geführt zu werden. In der That lässt sich auch die Venske'sche Methode leicht auf das uns vorliegende Problem in der folgenden Weise übertragen.

Die Picard'schen Relationen (15) lassen sich durch passende Auswahl der particulären Lösungs-Systeme $x_2, y_2, z_2$ und $x_3, y_3, z_3$ auf eine solche Form bringen, dass neben der Gleichung (19) noch die folgenden Identitäten erfüllt sind:

$$
(23) \qquad \begin{aligned}
x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 &= 1\,, \\
x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 &= 1\,, \\
x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 &= 0\,, \\
x_2 x_3 + y_2 y_3 + z_2 z_3 &= 0\,, \\
x_3 x_1 + y_3 y_1 + z_3 z_1 &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Aus ihnen folgt in bekannter Weise:

$$
(24) \quad x_1 = \varepsilon(y_2 z_3 - y_3 z_2),\ x_2 = \varepsilon(y_3 z_1 - y_1 z_3),\ x_3 = \varepsilon(y_1 z_2 - y_2 z_1),
$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ den Werth der Determinante

$$
\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}
$$

bedeutet. Ebenso ist

$$
(25) \quad \begin{aligned}
y_1 &= \varepsilon(z_2 x_3 - z_3 x_2),\ y_2 = \varepsilon(z_3 x_1 - z_1 x_3),\ y_3 = \varepsilon(z_1 x_2 - z_2 x_1), \\
z_1 &= \varepsilon(x_2 y_3 - x_3 y_2),\ z_2 = \varepsilon(x_3 y_1 - x_1 y_3),\ z_3 = \varepsilon(x_1 y_2 - x_2 y_1).
\end{aligned}
$$

Aus (24) und (25) folgen dann die weiteren Relationen

$$
(26) \qquad \begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 1\,,\ y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0\,, \\
y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 &= 1\,,\ z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 = 0\,, \\
z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 &= 1\,,\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0\,.
\end{aligned}
$$

Nun ist identisch

$$d \log (x_2 + i\, x_3) = \frac{x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 + i\,(x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2}{x_2^2 + x_3^2}\ ^{1)}$$

Im Zähler der rechten Seite führen wir $dx_2$ und $dx_3$ vermöge (14) auf $y_2, z_2$ und $y_3, z_3$ zurück; diese Zähler sind dann gleich

$$\left[r(x_2 y_2 + x_3 y_3) - q(x_2 z_2 + x_3 z_3) + i\, r(x_2 y_3 - x_3 y_2) - i\, q(x_2 z_3 - x_3 z_2)\right] dt$$

oder wegen (25) und (26) gleich

$$(-r\, x_1\, y_1 + q x_1\, z_1 + i\, \varepsilon\, r\, z_1 + i\, \varepsilon\, q\, y_1)\, dt$$

und wegen (16) und (17) gleich

$$\left[p\, q\, r\, A l^2 (C - B) + i\, \varepsilon\, l\, (h^2 - A p^2)\right] dt$$

Auf den Nenner unseres Ausdruckes für $d \log (x_2 + i\, x_3)$ wenden wir die erste Relation (26) an und finden mit Benutzung von (20):

$$(27) \quad \frac{d \log (x_2 + i x_3)}{dt} = i \varepsilon k \frac{h^2 - A p^2}{k^2 - A^2 p^2} - A(B - C) \frac{pqr}{k^2 - A^2 p^2},$$

ebener für die anderen Coordinaten:

$$(27\,\mathrm{a}) \quad \begin{aligned} \frac{d \log (y_2 + i y_3)}{dt} &= i \varepsilon k \frac{h^2 - B q^2}{k^2 - B^2 q^2} - B(C - A) \frac{pqr}{k^2 - B^2 q^2}, \\ \frac{d \log (z_2 + i z_3)}{dt} &= i \varepsilon k \frac{h^2 - C r^2}{k^2 - C^2 r^2} - C(A - B) \frac{pqr}{k^2 - C^2 r^2}, \end{aligned}$$

Hiemit ist im Principe die gestellte Aufgabe vollständig gelöst; es handelt sich nur noch darum, die vorkommenden elliptischen Integrale in die übliche Form zu transformiren.

---

[1]) Auf dieser Identität beruht auch die Durchführung der Quadraturen bei dem Probleme der Bewegung eines starren Körpers in einer unbegrenzten Flüssigkeit; vgl. Halphen, Traité des fonctions elliptiques; 2ième partie, p. 157, Paris 1888.

## § 4. Ausführung der Quadraturen.

Statt $t$ führen wir wieder $u = \lambda t + \mu$ als Integrationsvariable ein. Zunächst finden wir für das zweite Glied der rechten Seite von (27):

$$(28)\quad A(B-C)\int_0^t \frac{pqr}{k^2-A^2p^2}\,dt = \frac{A^2}{2}\int_{p_0^2}^{p^2}\frac{d(p^2)}{k^2-A^2p^2} = -\tfrac{1}{2}\lg\frac{k^2-A^2p^2}{k^2-A^2p_0^2}.$$

Zur Umformung des ersten Gliedes der rechten Seite von (27) benutzen wir einige Relationen, die sich aus (8) und (9) für $u = 0$ und $u = K$ ergeben, nämlich:

$$(29)\quad \begin{aligned} h^2 &= A\,a^2 + C\,c^2 = B\,b^2 + C\,c^2 - \varkappa^2\,C\,c^2,\\ k^2 &= A^2\,a^2 + C^2\,c^2 = B^2\,b^2 + C^2\,c^2 - \varkappa^2\,C^2\,c^2; \end{aligned}$$

ferner definiren wir eine reelle Constante $\omega$ durch die Gleichung

$$(30)\qquad \sin^2 \operatorname{am} i\,\omega = -\frac{A\,(B-C)}{C\,(A-B)},$$

so dass auch:

$$(31)\qquad \operatorname{cosin}^2 \operatorname{am} i\,\omega = \frac{B(A-C)}{C\,(A-B)},\quad \Delta^2 \operatorname{am} i\,\omega = \frac{k^2}{c^2\,C^2};$$

dann wird

$$k\,\frac{h^2 - A p^2}{k^2 - A^2 p^2} = \frac{k}{C} - k\,\frac{a^2 A (A-C)\operatorname{sn}^2 u}{c^2 C^2 (1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 i\,\omega \operatorname{sn}^2 u)}$$

$$= c\cdot \operatorname{dn} i\,\omega - i\,\lambda\,\frac{\varkappa^2 \operatorname{sn} i\,\omega\cdot \operatorname{cn} i\,\omega\cdot \operatorname{dn} i\,\omega\cdot \operatorname{sn}^2 u}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 i\,\omega\cdot \operatorname{sn}^2 u}.$$

Die nöthige Integration lässt sich hiernach mittelst der Jacobi'schen Formel für Normalintegrale dritter Gattung

$$\int_0^u \frac{\varkappa^2 \operatorname{sn} a\cdot \operatorname{cn} a\cdot \operatorname{dn} a\cdot \operatorname{sn}^2 u}{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u\cdot \operatorname{sn}^2 a}\,du = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + u\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}$$

ausführen und ergibt:

$$\log \frac{x_2 + i x_3}{x_2^0 + i x_3^0}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \log \frac{\Theta(u - i\omega)}{\Theta(u + i\omega)} \frac{\Theta(\mu + i\omega)}{\Theta(\mu - i\omega)} + \varepsilon\left(\frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(i\omega)} + ic \cdot \mathrm{dn}\, i\omega\right)(u - \mu) \cdot$$

$$+ \tfrac{1}{2} \log \frac{k^2 - a^2 p^2}{k^2 - a^2 p_0^2}.$$

Hierin ist $\varepsilon = \pm 1$ und $\mu$ ist der Werth von $u$ für $t = 0$, mit dem $p_0$ durch (11) zusammenhängt; $x_2^0$ und $x_3^0$ bezeichnen die Werthe von $x_2$ und $x_3$ zur Zeit $t = 0$. Das letzte Glied lässt sich noch weiter vereinfachen, denn es ist:

$$k^2 \quad a^2 p^2 = c^2 C^2 (1 - \varkappa^2 \mathrm{sn}^2 i\omega \cdot \mathrm{sn}^2 u)$$

(32)
$$= c^2 C^2 \frac{\Theta(u + i\omega)\, \Theta(u - i\omega)}{\Theta(u)^2\, \Theta(i\omega)^2} \Theta(o)^2.$$

Wählen wir $\varepsilon = +1$ (andernfalls wäre nur $i$ mit $-i$ zu vertauschen), und setzen zur Abkürzung

(33)
$$\Omega = \frac{\Theta'(i\omega)}{\Theta(\omega)} + i\, c \cdot \mathrm{dn}\, i\, \omega\,,$$

so wird schliesslich:

(34)
$$\frac{x_2 + i x_3}{x_2^0 + i x_3^0} = \frac{\Theta(u - i\omega)\, \Theta(\mu)}{\Theta(\mu - i\omega)\, \Theta(u)} e^{\Omega(u - \mu)}.$$

Um auch $y_2$ und $y_3$, $z_2$ und $z_3$ zu finden, braucht man die in (27a) verlangten Quadraturen nicht wirklich auszuführen: Es können diese Grössen vielmehr aus den Werthen von $x_2$ und $x_3$ vermöge (24) und (25) gefunden werden, ohne dass eine neue Integration nöthig wäre. In der That ist identisch

$$(x_2 + i x_3)(y_2 - i y_3) = x_2 y_2 + x_3 y_3 - i(x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

aber nach (25) und (26):

(35)
$$= - x_1 y_1 - i z_1\,.$$

Nun ist nach (16) und (17)

$$x_1 y_1 = \alpha \beta p q = a b A B l^2 \operatorname{sn} u \cdot \operatorname{cn} u ;$$

Das Vorzeichen der durch (30) eingeführten Grösse $\omega$ ist noch nicht bestimmt; wir definiren es so, dass

$$\frac{aA}{cC} = -i\varkappa \operatorname{sn} i\omega$$

wird; aus den Gleichungen (10) und (31) folgt dann weiter:

$$(36)\qquad \begin{aligned} \frac{aA}{k} &= -i\varkappa \frac{\operatorname{sn} i\omega}{\operatorname{dn} i\omega} = i\frac{\varkappa}{\varkappa'} \operatorname{cn}(i\omega + K), \\ \frac{bB}{k} &= \varkappa \frac{\operatorname{cn} i\omega}{\operatorname{dn} i\omega} = \varkappa \operatorname{sn}(i\omega + K), \\ \frac{cC}{k} &= \frac{1}{\operatorname{dn} i\omega} = \frac{1}{\varkappa'} \operatorname{dn}(i\omega + K). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (16) gehen dadurch über in

$$(37)\qquad \begin{aligned} x_1 &= i\frac{\varkappa}{\varkappa'} \operatorname{cn}(i\omega + K) \cdot \operatorname{cn} u, \\ y_1 &= \varkappa \operatorname{sn}(i\omega + K) \cdot \operatorname{sn} u, \\ z_1 &= \frac{1}{\varkappa'} \operatorname{dn}(i\omega + K) \cdot \operatorname{dn} u, \end{aligned}$$

Nach dem Additionstheoreme der Function $\Delta$ am wird daher

$$(38)\qquad \begin{aligned} & -y_1 x_1 - i z_1 \\ &= \frac{-i}{\varkappa'} (1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 (i\omega + K)) \operatorname{dn}(u - i\omega - K) \\ &= \frac{-i}{\sqrt{\varkappa'}} \frac{\Theta(u + i\omega + K)\Theta(u - i\omega - K)}{\Theta(u)^2 \Theta(i\omega + K)^2} \Theta(o)^2 \frac{\Theta_1(u - i\omega - K)}{\Theta(u - i\omega - K)} \\ &= \frac{-i}{\sqrt{\varkappa'}} \frac{\Theta_1(u + i\omega) \cdot \Theta(u - i\omega) \cdot \Theta(o)^2}{\Theta(u)^2 \Theta_1(i\omega)^2}. \end{aligned}$$

Diesen Werth führen wir in (35) ein, drücken noch $x_2 + i x_3$ mittelst (34) durch $\Theta$-Functionen aus, vertauschen $i$ mit $-i$ und finden so

$$(y_2 + i\, y_3)(x_2^0 - i\, x_3^0)$$

(39) $$= \frac{-1}{i\sqrt{\varkappa'}} \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, \Theta(o)^2}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2} e^{\Omega(u-\mu)},$$

und, wenn die Anfangswerthe von $y_2$ und $y_3$ benutzt werden:

(40) $$\frac{y_2 + i\, y_3}{y_2^0 + i\, y_3^0} = \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, \Theta(\mu)}{\Theta_1(\mu - i\omega)\, \Theta(u)} e^{\Omega(u-\mu)}.$$

Ebenso findet man aus (23), (24) und (37)

$$(z_2 - iz_3)(y_2 + iy_3) = -y_1 z_1 - ix_1$$

(41) $$= -\frac{\varkappa}{\varkappa'}(1 - \varkappa^2 \mathrm{sn}^2(i\omega + K)\mathrm{sn}^2 u)\, \mathrm{cn}(u + i\omega + K)$$

$$= -\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, H_1(u + i\omega)\, \Theta(o)^2}{\Theta(u)^2\, \Theta_1(i\omega)^2},$$

oder unter Benutzung von (40) und durch Vertauschung von $i$ mit $-i$:

(42) $$(z_2 + iz_3)(y_2^0 - iy_3^0) = -\sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}} \frac{H_1(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\Theta(o)^2}{\Theta(\mu)\, \Theta(u)\, \Theta_1(i\omega)^2} e^{\Omega(u-\mu)}.$$

In der gleichen Weise hätte man die Relation

$$(z_2 + iz_3)(x_2 - ix_3) = -z_1 x_1 - iy_1$$

$$= \frac{i\varkappa}{\mathrm{dn}^2 i\omega} \mathrm{sn}(i\omega - u) \cdot (1 - \varkappa^2 \mathrm{sn}^2 i\omega\, \mathrm{sn}^2 u)$$

$$= -i \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'} \frac{H(u - i\omega)\, \Theta(u + i\omega)\, \Theta(o)^2}{\Theta(u)^2\, \Theta_1(i\omega)^2}$$

benutzen können, aus der sich dann mittelst (34) das Resultat

(42a) $$(z_2 + iz_3)(x_2^0 - ix_3^0) = -i \frac{\sqrt{\varkappa}}{\varkappa'} \frac{H(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\Theta(o)^2}{\Theta(\mu)\, \Theta(u)\, \Theta_1(i\omega)^2} e^{\Omega(u-\mu)}$$

ergibt. Hieraus oder aus (42) findet sich endlich

(43) $$\frac{z_2 + iz_3}{z_2^0 + iz_3^0} = \frac{H(u - i\omega)\, \Theta(\mu)}{H(\mu - i\omega)\, \Theta(u)} e^{\Omega(u-\mu)}.$$

Durch die Formeln (34), (37), (40), (43) ist das Problem der Drehung des starren Körpers um seinen Schwerpunkt vollständig gelöst; denn für die drei Punkte mit den Coordinaten

$$(44) \qquad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3$$

sind diese Coordinaten als Functionen der Zeit $t$ explicite dargestellt; und dadurch ist die relative Bewegung des Raumes gegen den starren Körper vollständig bestimmt.

## § 5. Lage eines festen Axenkreuzes gegen ein bewegliches.

Immerhin wird es nützlich sein, noch einige weitere Ausführungen folgen zu lassen, um den Zusammenhang mit der üblichen Darstellung zu vervollständigen, gleichzeitig auch die Formeln durch nähere Bestimmung der Constanten $x_2^0, x_3^0, y_2^0, y_3^0, z_2^0, z_3^0$ zu vereinfachen.

Die drei Punkte (44) sind die Durchstossungs-Punkte von drei zu einander rechtwinkligen Axen mit einer um den Anfangspunkt gelegten Kugel vom Radius Eins. Ihre Coordinaten sind daher direct gleich den Cosinus der Neigungen dieser Axen gegen das im Körper feste Axen-System der Hauptträgheitsaxen. Bezeichnen wir also durch $\xi, \eta, \zeta$ die Coordinaten eines Punktes gegen die neuen Axen, welche den Anfangspunkt mit den drei Punkten (44) verbinden, durch $x, y, z$ die Coordinaten desselben Punktes gegen das im Körper feste Axenkreuz, so bestehen die Gleichungen

$$(45) \qquad \begin{aligned} \xi &= x_1 x + y_1 y + z_1 z, & x &= x_1 \xi + x_2 \eta + x_3 \zeta, \\ \eta &= x_2 x + y_2 y + z_2 z, & y &= y_1 \xi + y_2 \eta + y_3 \zeta, \\ \zeta &= x_3 x + y_3 y + z_3 z, & z &= z_1 \xi + z_2 \eta + z_3 \zeta; \end{aligned}$$

hierdurch sind die in den Gleichungen (18) auftretenden neun Coëfficienten vollständig bestimmt; und zwar

sind die Grössen $x_1, y_1, z_1$ durch (37) gegeben, während $x_2 + i x_3$, $y_2 + i y_3$, $z_2 + i z_3$ sich aus den Gleichungen (34), (40), (43) berechnen.

Besonders einfach werden die Ausdrücke für die absoluten Beträge dieser complexen Zahlen. Es ist

$$(46)\quad \begin{aligned} x_2^2 + x_3^2 = 1 - x_1^2 &= \frac{1 - \varkappa^2 \operatorname{sn}^2 i\omega \cdot \operatorname{sn}^2 u}{\operatorname{dn}^2 i\omega} \\ &= \frac{\Theta(u - i\omega) \cdot \Theta(u + i\omega) \cdot \Theta_1(o)^2}{\Theta(u)^2 \cdot \Theta_1(i\omega)^2}, \end{aligned}$$

$$(46\text{a})\quad \begin{aligned} y_2^2 + y_3^2 = 1 - y_1^2 &= 1 - \varkappa^2 \cdot \operatorname{sn}^2 u \cdot \operatorname{sn}^2 (i\omega + K) \\ &= \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, \Theta_1(u + i\omega)\, \Theta(o)^2}{\Theta(u)^2\, \Theta_1(i\omega)^2}, \end{aligned}$$

$$(46\text{b})\quad \begin{aligned} z_2^2 + z_3^2 = 1 - z_1^2 &= \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 i\omega}{\operatorname{dn}^2 i\omega}\, \varkappa^2 \\ &= \frac{H(u - i\omega)\, H(u + i\omega)\, H_1(o)^2}{\Theta(u)^2\, \Theta_1(i\omega)^2}. \end{aligned}$$

Diese Formeln stimmen mit den von Hermite a. a. O. in § XIV gegebenen im Wesentlichen überein.

Indem wir die rechten und linken Seiten der Gleichungen (34) und (46) mit einander multipliciren, ferner in (39) und (42a) die Grössen $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch $H_1(o)$, $\Theta(o)$, $\Theta_1(o)$ in bekannter Weise ausdrücken, erhalten wir die folgenden drei zu einander symmetrischen Gleichungen:

$$(47)\quad \begin{aligned} (x_2 + i x_3)(x_2^0 - i x_3^0) &= \frac{\Theta(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, \Theta_1(o)^2}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2}\, e^{\Omega(u-\mu)}, \\ (y_2 + i y_3)(x_2^0 - i x_3^0) &= i\, \frac{\Theta_1(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, \Theta(o)\, \Theta_1(o)}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2}\, e^{\Omega(u-\mu)}, \\ (z_2 + i z_3)(x_2^0 - i x_3^0) &= -i\, \frac{H(u - i\omega)\, \Theta(\mu + i\omega)\, H_1(o)\, \Theta_1(o)}{\Theta(u)\, \Theta(\mu)\, \Theta_1(i\omega)^2}\, e^{\Omega(u-\mu)}, \end{aligned}$$

Folglich können wir

$$x_2 + i\,x_3 = M\,\frac{\Theta(u - i\,\omega)\,\Theta_1(o)}{\Theta(u)\,\Theta_1(i\,\omega)}\,e^{\Omega u}$$

$$x_2^0 - i\,x_3^0 = M_1^0\,\frac{\Theta(\mu + i\,\omega)\,\Theta_1(o)}{\Theta(\mu)\,\Theta_1(i\,\omega)}\,e^{-\Omega\mu}$$

setzen, wenn $M_1^0$ aus $M$ dadurch entsteht, dass $u$ durch $\mu$ und $i$ durch $-i$ ersetzt wird. Wegen der ersten Gleichung (47) muss aber $M \cdot M_1^0 = 1$ sein; also ist $M$ eine Constante, und zwar eine solche, deren absoluter Betrag den Werth Eins hat, so dass

$$M = e^{i\nu},$$

wo $\nu$ eine willkürlich bleibende reelle Constante bedeutet. So ergeben sich schliesslich die drei einfachen Gleichungen:

$$x_2 + i x_3 = \frac{\Theta(u - i\omega)\Theta_1(o)}{\Theta(u)\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega u + i\nu},$$

(48) $$y_2 + i y_3 = i\,\frac{\Theta_1(u - i\omega)\Theta(o)}{\Theta(u)\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega u + i\nu} = (x_2 + i x_3)\cdot i \cdot \mathrm{dn}(u - i\omega)$$

$$z_2 + i z_3 = -i\,\frac{H(u - i\omega)H_1(o)}{\Theta(u)\Theta_1(i\omega)}\,e^{\Omega u + i\nu} = -(x_2 + i x_3)\cdot i \cdot \varkappa \cdot \mathrm{sn}(u - i\omega)$$

welche mit den entsprechenden Gleichungen bei Hermite und Jacobi übereinstimmen, wie man leicht erkennt, wenn man $i\omega$ durch $i\,\omega + i\,K'$ ersetzt. Die Constante $\nu$ bleibt nothwendig willkürlich, da das Coordinatensystem um die $\xi$-Axe gedreht werden kann, ohne dass sich etwas wesentliches ändert; eine solche Drehung nämlich wird gerade durch Multiplication von $\eta + i\,\zeta$ mit einer Constante $e^{i\nu}$ analytisch dargestellt.

## § 6. Die Herpolhodie.

In den Gleichungen (48) kommen die Functionen $\Theta$, $\Theta_1$ und $H$ in symmetrischer Weise vor; es fehlt die Function $H_1$. Auf den aus ihr in entsprechender Weise gebildeten Ausdruck wird man durch Betrachtung der Componenten der Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um die Axen $\xi$, $\eta$, $\zeta$ geführt. Nennen wir diese Componenten bez. $v_1$, $v_2$, $v_3$, so ist bekanntlich nach (45)

$$(49)\qquad \begin{aligned} v_1 &= x_1 p + y_1 q + z_1 r, \\ v_2 &= x_2 p + y_2 q + z_2 r, \\ v_3 &= x_3 p + y_3 q + z_3 r; \end{aligned}$$

und mit diesen Gleichungen kann man in derselben Weise weiter operiren, wie es Hermite a. a. O. thut. Aus (16), (17) und (20) folgt insbesondere

$$(50)\qquad v_1^2 = l(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \frac{h^2}{k}.$$

Die $\xi$-Axe ist also dadurch ausgezeichnet, dass die Componente der Drehungsgeschwindigkeit um sie constant bleibt.

Zur Berechnung von $v_2 + i v_3$ kann man auch den folgenden neuen Weg einschlagen. Zwischen den Coordinaten $\xi, \eta, \zeta$ und den Winkelgeschwindigkeiten $v_1, v_2, v_3$ müssen dieselben Relationen erfüllt sein, wie zwischen den Coordinaten $x, y, z$ und den Geschwindigkeiten $p, q, r$. Analog zu den Gleichungen (14) bestehen daher auch die Beziehungen

$$(51)\qquad \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= v_3 \eta - v_2 \zeta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= v_1 \zeta - v_3 \xi, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= v_2 \xi - v_1 \eta, \end{aligned}$$

und aus den letzten beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{d\eta}{dt} + i\frac{d\zeta}{dt} = -\xi(v_2 + i v_3) - i v_1(\eta + i\zeta).$$

Die Winkelgeschwindigkeiten sind unabhängig von der Lage des betrachteten Punktes im Raume; wir können also insbesondere $\xi = 1,\ \eta = \zeta = 0$ wählen und erhalten dadurch

$$\begin{aligned} v_2 + i v_3 &= -\left(\frac{d(\eta + i\zeta)}{dt}\right)_{\xi=1,\eta=0,\zeta=0} \\ &= -\left[x_1 \frac{d(x_2 + i x_3)}{dt} + y_1 \frac{d(y_2 + i y_3)}{dt} + z_1 \frac{d(z_2 + i z_3)}{dt}\right], \end{aligned}$$

oder nach (48)

$$v_2+i v_3=-\frac{d(x_2+i x_3)}{dt}[x_1+i y_1 \operatorname{dn}(u-i\omega)-i\varkappa z_1 \operatorname{sn}(u-i\omega)]$$
$$-i(x_2+i x_3)\left[y_1\frac{d \operatorname{dn}(u-i\omega)}{dt}-\varkappa z_1\frac{d \operatorname{sn}(u-i\omega)}{dt}\right].$$

Die Werthe von $x_1, y_1, z_1$ entnehmen wir aus (16) und bestimmen die auftretenden Constanten nach (20) und (36). Dann ergibt sich durch Anwendung des Additionstheorems

$$x_1+i y_1 \operatorname{dn}(u-i\omega)-i\varkappa z_1 \operatorname{sn}(u-i\omega)=0$$
$$y_1\frac{d \operatorname{dn}(u-i\omega)}{dt}-\varkappa z_1\frac{d \operatorname{sn}(u-i\omega)}{dt}=-\lambda\varkappa\cdot\operatorname{cn}(u-i\omega),$$

wo $\lambda$ wieder durch die zweite Gleichung (10) definirt ist. Es wird also schliesslich

$$\begin{aligned} v_2+i v_3 &= i\lambda\varkappa\cdot(x_2+i x_3)\cdot\operatorname{cn}(u-i\omega) \\ &= i\lambda\frac{H_1(u-i\omega)\cdot H_1(o)\cdot\Theta(o)^2}{\Theta(u)\cdot\Theta_1(i\omega)^2\,\Theta_1(o)^2}e^{\Omega u+i\nu}, \end{aligned} \tag{52}$$

wodurch auch die vierte, in (48) fehlende Function $H_1(u-i\omega)$ ihre Verwendung gefunden hat.

Die Lösungen des durch (51) gegebenen Systems von Differentialgleichungen sind uns übrigens durch die vorstehenden Untersuchungen von selbst bekannt; zusammengehörige particuläre Lösungen sind

für $\xi$: $x_1$, $y_1$, $z_1$,

" $\eta$: $x_2$, $y_2$, $z_2$,

" $\zeta$; $x_3$, $y_3$, $z_3$.

Die Differentialgleichungen (51) sind denjenigen an die Seite zu stellen, welche Hermite a. a. O. im § XXI aufstellt.

Die $\xi$-Axe, um welche der Körper nach (50) eine constante Winkelgeschwindigkeit besitzt, ist bekanntlich durch das Loth vom Anfangspunkte auf die invariable Ebene gegeben. Letztere fällt mit der Tangentenebene des Centralellipsoides im Punkte $x_0, y_0, z_0$ zusammen, hat also die Gleichung

$$A x_0 x+B y_0 y+C z_0 z-1=0.$$

Ihre Entfernung vom Anfangspunkte ist nach (4) und (7) gleich

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 x_0^2 + B^2 y_0^2 + C^2 z_0^2}} = \frac{h}{k},$$

und die Cosinus der Neigungen ihrer Normale gegen die Axen sind

$$\frac{h}{k} A x_0 = x_1, \quad \frac{h}{k} B y_0 = y_1, \quad \frac{h}{k} C z_0 = z_1,$$

woraus die Identität der $\xi$-Axe mit dieser Normalen hervorgeht. Das Ellipsoid rollt also auf dieser festen Ebene und der Berührungspunkt beschreibt in ihr eine Curve, die sogenannte Herpolhodie, deren Parameter-Darstellung für die Coordinaten $\eta_0, \zeta_0$ in dieser zur $\xi$-Axe senkrechten Ebene unmittelbar durch (49) vermittelt wird; man findet

$$\begin{aligned} \eta_0 &= x_2 x_0 + y_2 y_0 + z_2 z_0 = h(x_2 p + y_2 q + z_2 r) \\ \zeta_0 &= x_3 x_0 + y_3 y_0 + z_3 z_0 = h(x_3 p + y_3 q + z_3 r), \end{aligned}$$

also ist

$$\eta_0 + i\zeta_0 = h(v_2 + i v_3)$$

mittelst (52) zu berechnen. Auch hier sind wir zu den Hermite'schen Formeln gelangt, an welche die weitere Discussion der Curve angeschlossen werden kann.

Die Gestalt dieser Curve ist bekanntlich von Hess[1]) genauer untersucht.

## § 7. Drehung des starren Körpers unter Wirkung gewisser äusserer Kräfte.

Die Reciprocität, welche zwischen der Theorie der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit einerseits und dem Probleme der Drehung eines solchen Körpers um

[1]) Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariabeln Ebene, Inaugural-Dissertation, München 1880; vgl. auch Halphen: Traité des fonctions elliptiques, 2ième partie, p. 53 ff.

einen festen Punkt andererseits besteht, kommt auch bei Wirkung äusserer Kräfte in letzterem Probleme zur Geltung, wie das folgende Beispiel zeigt.

In der $\Xi$-$H$-Ebene, welche im Raume fest liegt, sei eine Masse $m_1$ auf einen Kreis vom Radius $r_0$, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte liegt, gleichmässig vertheilt; und die Masse $m_1$ wirke nach dem Newton'schen Attractionsgesetze auf die Masse des betrachteten starren Körpers. Mit $p, q, r$ seien wieder die Drehungsgeschwindigkeiten des letztern um die in ihm festen Haupt-Trägheitsaxen bezeichnet, mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ die Cosinus der Neigungen der $Z$-Axe gegen die Haupt-Trägheitsaxen; ferner werde

$$f' = \tfrac{3}{2}\frac{m_1 f}{r_0^3}$$

gesetzt, wo $f$ die Constante aus dem Attractions-Gesetze bezeichnet. Die Bestimmung der Drehung des starren Körpers um seinen im Anfangspunkte gelegenen Schwerpunkt hängt dann von den folgenden beiden Systemen von je drei Differentialgleichungen ab:[1])

$$(53)\qquad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,[q\,r + f'\,\gamma_2\,\gamma_3],\\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,[r\,p + f'\,\gamma_3\,\gamma_1],\\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,[pq + f'\,\gamma_1\,\gamma_2] \end{aligned}$$

und

$$(54)\qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q,\quad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r,\quad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p,$$

wobei das letztere System mit dem Systeme (14) identisch ist.

Drei erste Integrale, die aus dem Satze von der lebendigen Kraft und den Flächensätzen hervorgehen, sind von Voigt a. a. O. angegeben, das allgemeine Problem ist aber nicht weiter behandelt. Deshalb möge hier auf die allgemeine Lösung desselben kurz eingegangen werden.

[1]) Vgl. W. Voigt, Elementare Mechanik, Leipzig 1889, p. 243 f.

Die Differentialgleichungen (53) sind ein besonderer Fall eines Systemes solcher Gleichungen, das von Clebsch bei Gelegenheit einer hydrodynamischen Aufgabe behandelt und auf Quadraturen zurückgeführt ist.[1]) Es handelt sich um die Bewegung eines starren Körpers in einer incompressibeln Flüssigkeit, falls der Körper hinsichtlich seiner Gestalt und Massenvertheilung drei zu einander rechtwinklige Symmetrie-Ebenen besitzt.

Fällt das dadurch definirte Hauptaxensystem mit dem im Körper festen Coordinaten-Kreuze zusammen, so fürt das Problem auf die Differentialgleichungen[2])

$$(55)\qquad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} &= (B-C)\,qr + \frac{k^2(B_1-C_1)}{B_1C_1}\gamma_2\gamma_3\,, \\ B\frac{dq}{dt} &= (C-A)\,rp + \frac{k^2(C_1-A_1)}{C_1A_1}\gamma_3\gamma_1\,, \\ C\frac{dr}{dt} &= (A-B)\,pq + \frac{k^2(A_1-B_1)}{A_1B_1}\gamma_1\gamma_2\,, \end{aligned}$$



wozu noch die Gleichungen (54) kommen. Hierin bedeuten $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ wesentlich positive Constante, die von der Gestalt der Oberfläche des Körpers und von der Massenvertheilung im Körper abhängen. Die Constante $k$ ist willkürlich und hängt von den Anfangsgeschwindigkeiten ab. Die von Clebsch gegebene Integrationsmethode bezieht sich auf den Fall, wo zwischen den Constanten die Relation

$$(56)\qquad AA_1(B_1-C_1) + BB_1(C_1-A_1) + CC_1(A_1-B_1) = 0$$

erfüllt ist. Dieselbe Annahme macht Weber a. a. O., um die

[1]) Vgl. Clebsch, Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Annalen Bd. 3, p. 261, 1871.

[2]) Vgl. H. Weber: Anwendung der Thetafunctionen zweier Veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit, Math. Annalen Bd. 14, p. 173 ff., 1879. Im Texte sind Weber's Grössen $p, q, r$ durch $-p, -q, -r$ und die X-Axe durch die Z-Axe, also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ bez. durch $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ersetzt.

Integration mittelst der Theta-Functionen von zwei Variabeln vollständig durchzuführen.

Die Gleichungen (53) gehen offenbar aus den Gleichungen (55) hervor, wenn man in letzteren

$$\frac{1}{C_1} = C, \frac{1}{B_1} = B, \frac{1}{A_1} = A, k^2 = -f' \tag{57}$$

setzt, wodurch die Bedingung (56) von selbst erfüllt ist.

Da die Constante $f'$ des Newton'schen Anziehungs-Gesetzes wesentlich positiv ist, so beziehen sich die aus den Weber'schen Formeln durch die Substitution (57) abgeleiteten Resultate zunächst auf das entsprechende Problem für eine abstossende Kraft. Soll $f'$ positiv werden, so muss die Constante $k$ imaginär gewählt werden. Es hat dies zur Folge, dass in den Formeln (26) a. a. O., wenn $A < B < C$, mithin nach (57) $A_1 > B_1 > C_1$ gewählt wird, $\omega^2$ eine negative Grösse darstellt; das negative Zeichen auf beiden Seiten fällt fort, und die Argumente der Theta-Functionen werden rein imaginär.

Die Weber'sche Untersuchung des erwähnten hydrodynamischen Problems ist unter einer besonderen Voraussetzung über den Anfangs-Zustand durchgeführt. Von F. Kötter[1]) ist gezeigt, wie man für den allgemeinsten Fall die entsprechenden Entwicklungen durchzuführen hat. In gleicher Weise wird das von Voigt behandelte Rotations-Problem bei beliebiger Voraussetzung über den Anfangs-Zustand erledigt werden können.

---

[1]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 22. Jan. 1891 und Crelle's Journal Bd. 109.

# Beiträge zur Potentialtheorie.[1])

Von **Walther Dyck.**

*(Eingelaufen 1. Mai.)*

## III.

## Ueber die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen eines Systems von Functionen mehrerer Veränderlicher in einem gegebenen Bereiche und über die Berechnung der Werthe einer gegebenen Function in diesen Punkten.

### Einleitung.

Im ersten Teil der „Beiträge zur Potentialtheorie" [2]) habe ich eine Reihe von Darstellungen der Kronecker'schen Charakteristik eines Systems von $n+1$ reellen Functionen von $n$ reellen Veränderlichen durch bestimmte Integrale gegeben, in welcher die von Kronecker in seiner Abhandlung „Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln" [3]) entwickelte Integralformel als specieller Fall, die ebendort gegebene Summenformel als Grenzfall enthalten ist.

Man gelangt zu diesen Darstellungen auf Grund des von Gauss in der „Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum" im 6. Artikel[4]) gegebenen Integrals, welches auch

[1]) Vorgetragen in der Sitzung vom 5. März 1898.

[2]) Beiträge zur Potentialtheorie I. Diese Sitzungsberichte Bd. 25. Heft II. (1895).

[3]) Monatsberichte der Berliner Akademie vom März 1869.

[4]) Werke Bd. V, Seite 9.

Kronecker zu seinen Formulirungen geführt hat. Es lässt sich nämlich die Charakteristik eines Functionensystems definiren als diejenige Zahl, welche angiebt, wie oft eine gewisse geschlossene, im $n+1$-dimensionalen Raume gelegene Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen den Coordinatenanfangspunkt umgiebt. Benützt man dann weiter den Satz, dass jeder durch diesen Nullpunkt geführte $n-k$-dimensionale ebene Schnitt aus der Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen eine solche von $n-k-1$ Dimensionen ausschneidet, welche ebenso oft wie die $n$-dimensionale den Nullpunkt umgiebt,[1]) so erhält man die Charakteristik in der Gestalt eines $n-k-1$-fachen über jenen Schnitt ausgedehnten Integrals, welches speciell für $k=o$ in das Kronecker'sche Integral, für $k=n-1$ in die Kronecker'sche Summenformel übergeht.

Das erwähnte Gauss'sche Integral ergiebt sich durch eine Specialisirung aus der bekannten von Gauss im Artikel 10 seiner „Allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte“[2]) gegebenen Darstellung des Ausdruckes $\Delta\Pi$ für die Potentialfunction $\Pi$ einer dreidimensionalen Masse mit Hülfe eines zweifachen über die Begrenzung und eines dreifachen über das Innere der Masse ausgedehnten Integrales. Dieser Umstand führte Kronecker „auf die durch den Erfolg vollkommen bestätigte Vermuthung, dass die Potentialtheorie Anhaltungspunkte bieten dürfte, um zu einer allgemeinen Darstellung beliebiger Functionen der durch ein Gleichungssystem definirten Punkte und damit auch zu einer Verallgemeinerung des sogenannten Cauchy'schen Integrals zu gelangen“.[3]) Die Verallgemeinerung hat Kronecker in Formel A des VIII. Abschnittes seiner Abhandlung vom Jahre 1869 gegeben. Sie ermöglicht, die algebraische Summe aller Werthe zu berechnen, welche eine gegebene Function $\mathfrak{F}$ von $n$ reellen Variabeln im Innern eines von einer $n-1$-dimen-

[1]) Beiträge zur Potentialtheorie I, Seite 263 und 269.

[2]) Werke Bd. V, Seite 209.

[3]) Kronecker a. a. O., Abschnitt VI.

sionalen Mannigfaltigkeit begrenzten $n$-dimensionalen Gebietes annimmt an den Nullstellen eines Systems von $n$ Functionen dieser Variabeln; und zwar wird die Berechnung gegeben mit Hülfe eines $n$-fachen über das Innere und eines $n - 1$-fachen über den Rand des Gebietes hin erstreckten Integrals. Dabei sind aber die Werthe der Function $\mathfrak{F}$ an jenen Nullstellen noch versehen je mit dem Vorzeichen der Functionaldeterminante der $n$ Functionen des Systems an eben diesen Stellen.

Nun kann man sich einmal von dem Vorzeichen der Functionaldeterminante frei machen, wenn man die Function $\mathfrak{F}$ mit einem Factor versieht, welcher an den Nullstellen des Functionensystems den Wert $+1$ oder $-1$ annimmt je nachdem das Vorzeichen der Functionaldeterminante positiv oder negativ ist — wie ich dies in zwei kurzen Noten „Sur la determination du nombre des racines communes à un système d'équations simultanées et sur le calcul de la somme des valeurs d'une fonction en ces points“ [1]) dargelegt habe. Man kann damit die Fragen über die Bestimmung der Functionswerthe eines Functionensystems im Sinne des Cauchyschen Theorems vollständig erledigen. Speciell führt die Anwendung jener Formeln für den Fall eines constanten $\mathfrak{F}$ jetzt direct auf die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen des Functionssystems und zwar in einer

[1]) Comptes rendus vol. 119 S. 1254 u. vol. 120 S. 34, Paris, Dezember 1894 u. Januar 1895. Durch ein Versehen der Druckerei hat die zweite dieser Noten nur die Ueberschrift „Sur les racines communes à plusieurs équations“ erhalten und diesem Umstande mag es zuzuschreiben sein, dass in mehreren Referaten über diese beiden Noten (vergl. Revue semestrielle (Amsterdam) Bd. III, Theil 2, S. 58 1895, und Fortschritte der Mathematik, Bd. 25, S. 145) nur berichtet ist über die in jenen Noten gegebene Bestimmung der Anzahl der Nullstellen innerhalb eines gegebenen Bereiches. Der wesentliche Inhalt der beiden Noten bezieht sich aber auf die Entwicklung der Methode für die Bestimmung der Summe der Werthe einer gegebenen Function an diesen Nullstellen und geht gerade dadurch über die sogleich zu erwähnenden Picard'schen Untersuchungen, welche sich nur auf die Anzahlbestimmung beziehen, hinaus.

Darstellung, die zuerst Picard gegeben hat auf Grund einer Ableitung, in welcher derselbe die Kronecker'sche Charakteristikenformel zu Grunde legt und durch einen Grenzübergang umgestaltet.[1])

Die von mir in jenen Noten vom Jahre 1894/95 gegebene Methode ist im II. Abschnitte des Vorliegenden ausgeführt. Sie gestattet noch weiter die Abänderung der Grenzen des $n$-dimensionalen Gebietes, über welches die Integration zu erstrecken ist, insoferne sie die Bildung von Formeln ermöglicht, welche die Aufgabe der Functionswerthbestimmung innerhalb eines gegebenen Bereiches löst durch Ausführung von Integrationen, welche über einen den ersten willkürlich umfassenden Bereich sich erstrecken (§ 5 des gegenwärtigen Aufsatzes).

Aber noch eine zweite Bemerkung lässt sich einfügen: Analog wie man für die Darstellung der Kronecker'schen Charakteristik eines Functionensystems eine (in den Beiträgen I hergeleitete) Reihe von Formeln verwenden kann, von einem $n$-fachen, $n-1$-fachen, ... $n-k$-fachen Integral bis zu einer Summenformel, so lassen sich auch Formeln aufstellen, welche die Summe der Werthe jener Function $\mathfrak{F}$ an den Nullstellen unseres Functionensystems, statt durch eine Summe aus einem $n$-fachen und einem $n-1$-fachen Integrale, geben mit Hülfe eines $n-1$-fachen und eines $n-2$-fachen, ... eines $n-k$-fachen und eines $n-k-1$-fachen, ... eines 2-fachen und eines 1-fachen Integrales und endlich eines einfachen In-

[1]) Vergl. die beiden Noten Picard's vom 7. und 12. Nov. 1891 (Comptes rendus Bd. 113), sowie die Abhandlung „Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées" im Journal de Liouville, Série 4, Bd. 8, S. 5, endlich vergl. man noch Capitel IV, Abschnitt VII in Bd. I und Capitel VII in Bd. II von Picard's Cours d'Analyse. — Die von Kronecker in einer Note vom Dezember 1891 (Comptes rendus Bd. 113, S. 1006) gegebene Bestimmung dieser Anzahl ist insoferne unbefriedigend, als sie eine Integration durch das Innere des gegebenen Bereiches längs der durch Nullsetzen der Functionaldeterminante sich ergebenden Mannigfaltigkeit erfordert.

tegrals und einer Summe. Man hat dabei nur, statt, wie Kronecker, von der Betrachtung des Potentials einer $n$-dimensionalen Masse auszugehen, die Formeln für das Potential einer $n-k$-dimensionalen Masse zu Grunde zu legen, welche über einen ebenen ($n-k$-dimensionalen) Schnitt des ersteren ausgebreitet ist.

Die hierauf bezüglichen Formeln sind im I. Abschnitt der gegenwärtigen Abhandlung entwickelt. Es erscheint dabei nicht uninteressant, zu bemerken, dass sich dieselben Beziehungen auch ableiten lassen je durch einen Grenzübergang aus den für die nächsthöhere Mannigfaltigkeit geltenden Formeln. Es kommt dabei der Umstand zur Geltung, dass bei einer Zerlegung des ganzen ursprünglichen $n$-dimensionalen Integrationsbereiches in $\infty^n$, etwa parallelepipedisch begrenzte, Elementargebiete nur diejenigen Elemente für die Integration in Betracht kommen, welche die Nullstellen des Functionensystems umschliessen, insoferne sich nämlich die Summe der Functionswerthe von $\mathfrak{F}$ zusammensetzt aus den Werthen der über jene Nullstellen genommenen Begrenzungsintegrale. Man kann also die Integration beschränken auf einen beliebig aus der Gesammtheit herausgenommenen Bereich von $\infty^{n-k}$ dieser Elemente, wenn man nur jene wesentlichen Elemente in denselben einschliesst. Auf die hiemit angedeutete Entwickelung, bei welcher die Unabhängigkeit unserer Beziehungen von dem speciellen zu Grunde gelegten Potentialgesetz hervortritt, gehe ich indess an dieser Stelle nicht näher ein.[1])

---

[1]) Man vergleiche hierüber meinen Aufsatz „Ueber die Verallgemeinerungen des Cauchy'schen Satzes“ im 51. Bande der Mathematischen Annalen.

## I. Abschnitt.

### § 1.

### Die Kronecker'sche Transformation der Gauss'schen Formel für die Potentialgleichung.[1])

Die Kronecker'sche Darstellung geht aus von dem über das ganz im Endlichen angenommene, $n$-dimensionale Gebiet

$$F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) > 0$$

erstreckten $n$-fachen Integral:

1)
$$\Pi_n(\xi) = \frac{1}{n-2} \cdot \int\limits_{F_0>0} \frac{\Delta_0 \cdot \mathfrak{F}}{\left[(F_1-\xi_1)^2+(F_2-\xi_2)^2+\ldots+(F_n-\xi_n)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}} \cdot dz_1 dz_2 \ldots dz_n$$

in welchem $\mathfrak{F}$, $F_0$, $F_1$, $F_2$, ... $F_n$ im Integrationsbereiche eindeutige reelle Functionen der $n$ reellen Veränderlichen $z_1, z_2, \ldots z_n$ bezeichnen und $\Delta_0$ die Functionaldeterminante der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ bedeutet.

Das Integral geht durch die Substitution:

2)
$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(z_1, z_2, \ldots z_n)\,, \\ x_2 &= F_2(z_1, z_2, \ldots z_n)\,, \\ &\ldots \\ x_n &= F_n(z_1, z_2, \ldots z_n) \end{aligned}$$

über in das andere auf den Raum der $x_i$ bezogene:

[1]) Wir schicken hier des Zusammenhangs wegen die von Kronecker im VIII. Abschnitt seines Aufsatzes vom März 1869 entwickelten Formeln voraus. Man vergleiche hierzu noch die 16. Vorlesung (über das Potential) der (von Netto herausgegebenen) „Vorlesungen über die Theorie der einfachen und der vielfachen Integrale" von L. Kronecker. Leipzig 1894.

$$3) \qquad \Pi_n(\xi) = \frac{1}{n-2} \cdot \int \frac{\varrho}{\left[\sum_1^n (x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{n-2}{2}}} dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

in welchem an Stelle von $\mathfrak{F}$ die Function $\varrho$

$$\varrho(x_1, x_2, \ldots x_n) = \mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots z_n)$$

getreten ist.

Durch diese Formel 3 ist die Function $\Pi_n(\xi)$ als Potentialfunction einer über das Gebiet der Variabeln $x_i$ ausgebreiteten Masse definirt. In diesem erscheint indess die Dichtigkeitsfunction $\varrho$ im Allgemeinen als eine mehrdeutige Function des Ortes, so dass wir uns eine mehrblättrig über den Raum der $x_i$ ausgebreitete Masse, über welche sich die Integration zu erstrecken hat, zu denken haben. Als Begrenzung dieser Masse ergiebt sich dabei eine durch

$$F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) = \Phi(x_1, x_2, \ldots x_n) = o$$

gegebene Mannigfaltigkeit, die ihrerseits (nach bekannten Sätzen) umkehrbar eindeutig auf die Mannigfaltigkeit $F_0 = o$ bezogen ist.[1])

Für die Function $\Pi_n(\xi)$ hat man nun die der Gauss'schen Gleichung analog gebildete Darstellung von $\Delta\, \Pi_n(\xi)$:

---

[1]) Es sei hier erwähnt, dass im I. Theil dieser Beiträge die Variabeln $z_i$ als Parameter im Raume der $x_i$ gedeutet sind für die Mannigfaltigkeit $M_n$:

$$x_0 = F_0(z_1, z_2, \ldots z_n), \quad x_1 = F_1(z_1, z_2, \ldots z_n), \ldots x_n = F_n(z_1, z_2, \ldots z_n).$$

In der gegenwärtigen Abhandlung ist — in naturgemässer Auszeichnung der Function $F_0$ — von der durch die Gleichungen 2) vermittelten Abbildung des Raumes der $z_i$ in den Raum der $x_i$ Gebrauch gemacht, die auch Kronecker zu Grunde gelegt hat. Ich gedenke indess auf die erstere Deutung bei nächster Gelegenheit zurückzukommen. Man vergleiche noch die Anmerkungen auf Seite 269 und 274 der Beiträge I.

4)
$$\Delta\Pi_n(\xi) = -\int \frac{\varrho \cdot \cos(R_n N_n)}{\left[\sum_1^n (x_i - \xi_i^2)\right]^{\frac{n-1}{2}}} \cdot dO_{n-1} + \int \frac{\sum \varrho_i (x_i - \xi_i)}{\left[\sum_1^n (x_i - \xi_i)^2\right]^{\frac{n}{2}}} \cdot dO_n,$$

in welcher $\cos(R_n N_n)$ den Cosinus des Neigungswinkels der (in den Innenraum des Gebietes gerichteten) Normalen auf $\Phi = o$ gegen den (vom „Aufpunkt" $\xi$ nach dem Punkte $x$ gerichteten) Radius vector $R_n$ bedeutet, $\varrho_i$ die nach der $i^{\text{ten}}$ Variabeln genommene Ableitung der Dichtigkeitsfunction $\varrho$ bezeichnet, $dO_n$ bez. $dO_{n-1}$ endlich die Elemente im Raume der $x_i$, bez. auf der Mannigfaltigkeit $\Phi = o$. Dabei ist die Integration beim ersten Integral zu erstrecken über $\Phi = o$, beim zweiten über das dem Gebiete $F_0 > o$ entsprechende Gebiet im Raume der $x_i$.

Führt man nunmehr die Variabeln $z_i$ ein, und verlegt — was nur eine Vereinfachung der Schreibweise ergiebt, — den „Aufpunkt" in den Coordinatenanfangspunkt, so geht die Gleichung 4 über in die Kronecker'sche Formel:

5)
$$\Delta\Pi_n(o) = -W_{n-1} + W_n$$

in welcher

6a)
$$W_{n-1} = \int\limits_{F_0 = o} \frac{\mathfrak{F} \cdot \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \dots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum_1^n F_i^2\right]^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{do_{n-1}}{\left[\sum_1^n F_{0i}^2\right]^{\frac{1}{2}}},$$

6b)
$$W_n = \int\limits_{F_0 > o} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \dots & \mathfrak{F}_n \\ F_1 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ F_2 & F_{21} & F_{22} & \dots & F_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum_1^n F_i^2\right]^{\frac{n}{2}}} \cdot do_n$$

gesetzt ist. Hierbei ist

$$do_n = dz_1\, dz_2 \dots dz_n$$

das Element der „an sich“ betrachteten Mannigfaltigkeit $(z_1, z_2, \dots z_n)$, $do_{n-1}$ dagegen das Element der durch $F_0 = o$ aus dieser ausgeschnittenen Mannigfaltigkeit von $n-1$ Dimensionen, welches man bekanntlich in einer der Formen

7)
$$do_{n-1} = \frac{\left[\sum_1^n F_{oi}^2\right]^{\frac{1}{2}}}{F_{oj}}\, dz_1, dz_2 \dots dz_{j-1}\, dz_{j+1} \dots dz_n$$

(für beliebiges $j$) zu Grunde legen kann.

Für einen Bereich $F_0 > 0$, in welchen an keiner Stelle die Functionen $F_1, F_2, \dots F_n$ gleichzeitig verschwinden, hat man nun nach den bekannten Sätzen

8)
$$-W_{n-1} + W_n = 0,$$

während für die unmittelbare Umgebung eines Punktes, für welchen diese Functionen gleichzeitig verschwinden, das $n$-fache Integral $W_n$ verschwindet, das $n-1$ fache aber den Werth

9)
$$W_{n-1} = \tilde{\omega}_{n-1} \cdot \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$$

annimmt, in welchem $\tilde{\omega}_{n-1}$ die „Oberfläche" der $n$-dimensionalen Einheitskugel

$$z_1^2 + z_2^2 + \dots z_n^2 = 1$$

bedeutet.

Für einen ganz allgemeinen Bereich ergiebt sich sonach die Kronecker'sche Formel (A in No. VIII des genannten Aufsatzes):

$$10) \qquad - W_{n-1} + W_n = - \tilde{\omega}_{n-1} \cdot \Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F},$$

in welcher sich die Summation rechts auf alle Punkte bezieht, für welche

$$F_0 > o, \; F_1 = o, \; F_2 = o \dots F_n = o$$

ist.

## § 2.

### Neue Formeln zur Darstellung von $\Sigma$ sign $\Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$.

Statt die Formeln für das Potential der $n$-dimensionalen, im Raume $(x_1, x_2, \dots x_n)$ gelegenen Mannigfaltigkeit zu Grunde zu legen, beschränken wir uns nunmehr auf die Betrachtung einer durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 &= o, \\ x_2 &= o, \\ &\;\vdots \\ x_k &= o \end{aligned}$$

aus dieser Mannigfaltigkeit ausgeschnittenen Mannigfaltigkeit von $n - k$ Dimensionen. Für sie legen wir die Function

$$\varrho\,(o, o, \dots o, x_{k+1}, \dots x_n)$$

als neue Dichtigkeitsfunction zu Grunde und definiren für die so bestimmte $n - k$-dimensionale Masse eine neue Potentialfunction $\Pi_{n-k}(\xi)$ durch die Gleichung:

11)
$$\Pi_{n-k}(\xi_{k+1},\ldots\xi_n)=\frac{1}{n-k-2}\cdot\int\frac{\varrho}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-k-2}{2}}}\cdot dx_{k+1}dx_{k+2}\ldots dx_n\,.$$

Für dieselbe gilt zunächst die der Gleichung 4) analoge Formel:

12)
$$\Delta\,\Pi_{n-k}(\xi)=$$
$$=-\int\frac{\varrho\cdot\cos(R_{n-k}N_{n-k})}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-k-1}{2}}}\cdot dO_{n-k-1}+\int\frac{\sum\limits_{k+1}^{n}\varrho_i(x_i-\xi_i)}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n}(x_i-\xi_i)^2\right]^{\frac{n-k}{2}}}\,dO_{n-k}$$

in welcher $\cos(R_{n-k}\,N_{n-k})$ den Cosinus des Neigungswinkels der inneren Normalen auf das in der Mannigfaltigkeit $x_1=o$, $x_2=o$, $\ldots x_k=o$ gelegene $n-k-1$-dimensionale Element $d\,O_{n-k-1}$ von $\Phi=o$ gegen den ebendort vom „Aufpunkte" $\xi_1=o$, $\xi_2=o,\ldots\xi_k=o$, $\xi_{k+1},\ldots\xi_n$ nach dem Elemente gezogenen Radius vector bedeutet.

Nun transformiren wir diese Formeln, gemäss den Gleichungen:

13)
$$\begin{aligned} x_1 &= F_1\,(z_1,z_2,\ldots z_n)=o,\\ &\;\;\vdots\\ x_k &= F_k\,(z_1,z_2,\ldots z_n)=o;\end{aligned}$$

14)
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F_{k+1}\,(z_1,z_2,\ldots z_n),\\ &\;\;\vdots\\ x_n &= F_n\,(z_1,z_2,\ldots z_n)\end{aligned}$$

in den Raum der $z$ und erhalten dann durch eine einfache, der in den Beiträgen I gegebenen analog verlaufende Rechnung, eine der Gleichung 5) entsprechende Formel

$$15)\qquad \varDelta\, \Pi_{n-k}(o) = -\, W_{n-k-1} + W_{n-k}\,,$$

in welcher als „Aufpunkt" wieder der Coordinatenanfangspunkt angenommen ist und wobei $W_{n-k-1}$, bez. $W_{n-k}$ die folgenden Integrale bedeuten:

$$16a)\qquad W_{n-k-1} =$$

$$= \int \frac{\mathfrak{F}\cdot \begin{vmatrix} 0 & F_{01} & F_{02} & \ldots & F_{0n} \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \ldots & F_{1n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \ldots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+11} & F_{k+12} & \ldots & F_{k+1n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum\limits_{k+1}^{n} F_i^2\right]^{\frac{n-k}{2}}} \cdot \frac{do_{n-k-1}}{\left[\begin{Vmatrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & \ldots & F_{0n} \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \ldots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}}\,,$$

16b)

$$W_{n-k} = \int \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{F}_1 & \mathfrak{F}_2 & \dots & \mathfrak{F}_n \\ 0 & F_{11} & F_{12} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & F_{k1} & F_{k2} & \dots & F_{kn} \\ F_{k+1} & F_{k+1\,1} & F_{k+1\,2} & \dots & F_{k+1\,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_n & F_{n1} & F_{n2} & \dots & F_{nn} \end{vmatrix}}{\left[\sum_{k+1}^{n} F_i^2\right]^{\frac{n-k}{2}}} \cdot \frac{do_{n-k}}{\left[\begin{Vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \dots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \dots & F_{kn} \end{Vmatrix}^2\right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Dabei ist das erste Integral über die durch

$$F_0 = o; \quad F_1 = o,\, F_2 = o, \dots F_k = o$$

definirte Begrenzungsmannigfaltigkeit, das zweite Integral über den durch

$$F_0 > o; \quad F_1 = o,\, F_2 = o, \dots F_k = o$$

gegebenen Innenraum derselben zu erstrecken.

Durch die Matrixquadrate im Nenner der beiden Integralausdrücke ist in bekannter Abkürzung die Summe der Quadrate der Unterdeterminanten bezeichnet. Weiter sind $do_{n-k-1}$ bez. $do_{n-k}$ je die Elemente der Mannigfaltigkeiten, über welche sich die Integration erstreckt. Diese Elemente können in den Formen:

17a)
$$do_{n-k-1} = \frac{\begin{bmatrix} \left\| \begin{matrix} F_{01} & F_{02} & F_{03} & \ldots & F_{0n} \\ F_{11} & F_{12} & F_{13} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \ldots & F_{kn} \end{matrix} \right\|^2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}}{D_{j_{n-k}\ldots j_n}} \cdot dz_{j_1}\, dz_{j_2} \ldots dz_{j_{n-k-1}},$$

beziehungsweise

17b)
$$do_{n-k} = \frac{\begin{bmatrix} \left\| \begin{matrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & \ldots & F_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ F_{k1} & F_{k2} & F_{k3} & \ldots & F_{kn} \end{matrix} \right\|^2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}}{D_{j_{n-k+1}\ldots j_n}} \cdot dz_{j_1}\, dz_{j_2} \ldots dz_{j_{n-k}}$$

geschrieben werden, in welchen $D_{j_{n-k}\ldots j_n}$ bez. $D_{j_{n-k+1}\ldots j_n}$ irgend eine der Unterdeterminanten der Matrix des Zählers, $dz_{j_1}\ldots dz_{j_{n-k-1}}$, bez. $dz_{j_1}\ldots dz_{j_{n-k}}$ das „correspondirende“ Differential bezeichnet.

Für die beiden Integrale $W_{n-k-1}$ und $W_{n-k}$ gelten nun direct die den oben für $W_{n-1}$ und $W_n$ gegebenen analogen Sätze: Für einen Bereich

$$F_0 > o,\ F_1 = o \ldots F_k = o,$$

in welchem an keiner Stelle die übrigen Functionen $F_{k+1}\ldots F_n$ sämmtlich verschwinden, ist

18)
$$-W_{n-k-1} + W_{n-k} = 0.$$

Beschränkt man andererseits die Integration auf die unmittelbare Umgebung eines in $F_1 = o, \ldots F_k = o$ gelegenen Punktes, in welchem auch die Functionen $F_{k+1}, \ldots F_n$ je einfach verschwinden, so wird das Integral $W_{n-k}$ zu Null, während das Integral $W_{n-k-1}$ — in Uebereinstimmung mit Formel 26 der „Beiträge I“ — den Werth

$$19) \qquad W_{n-k-1} = \tilde{\omega}_{n-k-1} \cdot \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$$

annimmt, für welchen $\mathfrak{F}$ wieder den Werth der Dichtigkeitsfunction an der betr. Stelle, $\tilde{\omega}_{n-k-1}$ die Oberfläche der $n-k$-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Es folgt daher für die über den ganzen Bereich ausgedehnten Integrale die Formel

$$20) \qquad - W_{n-k-1} + W_{n-k} = - \tilde{\omega}_{n-k-1} \cdot \Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$$

in welcher das Summenzeichen genau dieselbe Bedeutung besitzt, wie in Formel 10.

Indem man nun der Zahl $k$ die Werthe von $k=0$ bis $k=n-2$ beilegt, gelangt man zu einer ganzen Reihe von Darstellungen des Ausdruckes

$$\Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F},$$

der mit den Vorzeichen der Functionaldeterminante gebildeten Summe der Werthe, welche eine Function $\mathfrak{F}$ im Innern des Bereiches $F_0 = o$ annimmt an den Stellen $F_1 = o$, $F_2 = o$; $F_n = o$, und zwar mit Hülfe eines $n-1$-fachen und eines $n$fachen, eines $n-2$-fachen und eines $n-1$fachen, schliesslich mit Hülfe eines einfachen und eines zweifachen Integrals.

Für die letzte dieser Formeln ist dabei vom logarithmischen Potential (im Raum der $x$) auszugehen.

Als Grenzfall dieser Darstellungen kann man endlich die für $k=n-1$ sich ergebenden Formeln betrachten, in welchen sich für den Ausdruck $2\,\Sigma \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{F}$ eine Summe und ein einfaches Integral ergiebt; man kann nach leichter Umformung der entstehenden Gleichung die Gestalt geben:

$$-\Sigma \operatorname{sign}((-1)^n F_n \Delta_n) \cdot \mathfrak{F} + \int \operatorname{sign}((-1)^n F_n) \cdot (\mathfrak{F}_1 dz_1 + \mathfrak{F}_2 dz_2 + \ldots + \mathfrak{F}_n dz_n) =$$
$$= -2\,\Sigma \operatorname{sign}(\Delta_0) \cdot \mathfrak{F},$$

in welcher die Summe links sich auf alle Punkte erstreckt, für welche

$$F_0 = o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_{n-1} = o$$

ist, das einfache Integral auf das Gebiet

$$F_0 > o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_{n-1} = o,$$

die Summe rechts aber (wie in allen Formeln) auf die Punkte, für welche

$$F_0 > o,\ F_1 = o,\ F_2 = o \ldots F_n = o.$$

Es kann diese nicht uninteressante Beziehung auch direct unter Benützung der elementaren Formel für das einfache bestimmte Integral zwischen gegebenen festen Grenzen (hier in $n$ durch die Gleichungen $F_1 = o, \ldots F_{n-1} = o$ verknüpften Variabeln geschrieben) hergeleitet werden.

## § 3.

## Allgemeine Bemerkungen zu den gewonnenen Formeln.

Für die in der Formel 20) gewonnenen Darstellungen unserer Functionswerthsumme gelten nun die schon in den Beiträgen I (Seite 275) für das Integral der Charakteristik — das sich als specieller Fall für $\mathfrak{F} = \text{const}$ aus 20) direct ergiebt — gemachten Bemerkungen.

Die Auflösung der Zählerdeterminanten in $W_{n-k-1}$ und $W_{n-k}$ nach Unterdeterminanten der $1^{\text{ten}}$ bis $k^{\text{ten}}$, bez. $2^{\text{ten}}$ bis $k^{\text{ten}}$ Reihe und Ersetzung der Elemente $do_{n-k-1}$ und $do_{n-k}$ durch die nach 17a) und 17b) jeweils entsprechenden Ausdrücke zeigt sofort, dass die für die Grenzen der Integration in Betracht kommenden, gleich Null gesetzten Functionen

$$F_0;\ F_1,\ F_2,\ \ldots\ F_k$$

in die Ausdrücke unter dem Integralzeichen nur scheinbar eingehen; dass diese letzteren vielmehr ausschliesslich von den Functionen

$$F_{k+1},\ F_{k+2}, \ldots F_n$$

und von der „Dichtigkeitsfunction" $\mathfrak{F}$ abhängen.

Dabei hat man es völlig in der Hand, welche $k$ Functionen $F_{i_1}, \ldots F_{i_k}$ man (unter den $n$ Functionen $F_1 \ldots F_n$) für die Grenzen der Integrale verwenden will, so dass für jeden Werth von $k$ noch $\binom{n}{k}$ Darstellungen möglich sind.

Es darf indess nicht ausser Acht gelassen werden, dass für die Auswerthung der hiermit eingeführten mehrfachen Integrale im Vergleich zu Integralen, welche über „ebene" Mannigfaltigkeiten („an sich betrachtete M." nach Kronecker's Ausdrucksweise) laufen, in noch höherem Grade die Bemerkungen gelten, welche Kronecker über die Werthermittelung des $(n-1)$-fachen Integrals der Charakteristik im Abschnitt XI seiner Untersuchungen vom März 1869 niedergelegt hat. Gleichwohl aber erscheint mir die hier gegebene Darstellung der Functionswerthsumme in ihren verschiedenen Formen von Interesse und Werth, weil sie den Charakter derartiger Fragestellungen nach einer ganz bestimmten Richtung kennzeichnet. Verbindet man mit der Gesammtheit der hier gegebenen Möglichkeiten für die Bestimmung jener Functionswerthsummen noch diejenigen Umformungen, welche einerseits die Functionen $F_1, \ldots F_n$, von denen ja nur die im Gebiete $F_0 > o$ gelegenen Nullstellen wesentlich sind, im Sinne der Analysis situs erleiden können, und beachtet andererseits, dass auch die Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ beliebig stetig so abgeändert werden kann, dass nur die Werthe derselben an den Nullstellen der $F_i$ erhalten bleiben, so ist damit eine bestimmte Gruppe von Darstellungsformen für unsere Functionswerthsumme bezeichnet.

Ueber eine Abänderung, welcher, abgesehen von den im Sinne der Analysis situs zulässigen, die Grenze $F_0 = 0$ des Gebietes unterzogen werden kann, soll im folgenden Abschnitte (§ 5) noch besonders gehandelt werden.

---

## II. Abschnitt.

### § 4.

### Einführung eines analytischen Ausdruckes für sign $\Delta_0$ und Anwendung desselben zur Aufstellung der Formeln zur Berechnung von $\Sigma\mathfrak{F}$.

Um uns von dem Vorzeichen der Functionaldeterminante $\Delta_0$ frei zu machen führen wir nunmehr eine Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ ein, welche an den Nullstellen der Functionen $F_1, F_2, \ldots F_n$ den Werth $+\mathfrak{F}$ beziehungsweise $-\mathfrak{F}$ annimmt, je nachdem dort die Functionaldeterminanten $\Delta_0$ positiv oder negativ ist.

Dies gelingt auf die einfachste Weise, denn es lässt sich — und zwar noch auf mannigfache Art — eine im Innern unseres Bereiches überall endliche und stetige Function bilden, welche an den Nullstellen der $F_i$ den Werth sign $\Delta_0 \cdot 1$ besitzt. Eine solche Function ist beispielsweise:

$$22)\qquad \frac{\lambda\,\Delta_0}{\sqrt{F_1^2+F_2^2+\ldots+F_n^2+\lambda^2\Delta_0^2}},$$

in welcher $\lambda$ irgend eine Constante bezeichnet, oder auch eine stetige Function der $z_i$, die an allen Nullstellen positiv ist und ebenso wie $\Delta_0$ [1]) nirgends im Gebiet zugleich mit allen Functionen $F_1, \ldots F_n$ verschwindet; sie besitzt nämlich, weil nach den getroffenen Voraussetzungen die Quadratwurzel im Nenner in unserem Gebiete unverzweigt ist überall das Vorzeichen von $\Delta_0$ und nimmt an den Nullstellen der $F_i$ den verlangten Werth sign $\Delta_0 \cdot 1$ an.

Ersetzt man also in den Entwickelungen des I. Abschnittes und speciell in den Formeln 10) und 20) durchweg die Function $\mathfrak{F}$ durch die neue Dichtigkeitsfunction

---

[1]) Vergl. die in den Beiträgen I S. 262 für die $F_i$ gegebenen Bedingungen.

23) $$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot \mathfrak{J}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \mathfrak{J} \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o\},$$

so ergeben sich Formeln, welche direct im Cauchy'schen Sinne die Aufgabe lösen:

Gegeben ist in einer Mannigfaltigkeit von $n$ Dimensionen ein $n-k$-dimensionales Gebiet

$$F_0 > o, \; F_1 = o, \; F_2 = o \ldots F_k = o$$

in welchem sich eine Anzahl von Nullstellen der Functionen

$$F_{k+1} = o \; F_{k+2} = o \ldots F_n = o$$

befinden. Man bestimme mit Hülfe eines $n-k$-fachen durch das Innere und eines $n-k-1$-fachen über den Rand des Gebietes geführten Integrales die Summe der Werthe einer Function $\mathfrak{J}$ in diesen Nullstellen.

Dabei haben wir (durch Aenderung der Gruppirung der Functionen und Wahl von $k$) es in der Hand, zu bestimmen, welche und wie viele der Functionen $F_1, \ldots F_n$ wir zur Begrenzung der Integration, bez. zur Festlegung der Nullstellen im Integrationsgebiete verwenden wollen.

Setzt man weiter, wie noch anschliessend bemerkt sein mag:

24) $$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot \frac{\mathfrak{J}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \mathfrak{J}^2}} \cdot \mathfrak{J}$$ [1])

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} \mathfrak{J} \cdot \mathfrak{J} \quad (\text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o)\}$$

so ergeben sich Formeln für die Bestimmung der Summe der absoluten Beträge der Function $\mathfrak{J}$ an den Nullstellen der $F_i$.

---

[1]) Oder auch

$$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 \mathfrak{J}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 \mathfrak{J}^2}} \cdot \mathfrak{J}.$$

## § 5.

## Weitere Anwendungen: Bestimmung der Anzahl und Lage der Nullstellen eines Functionensystems in einem gegebenen Gebiete. Abänderung der Integrationsgrenzen.

Die im vorangehenden Paragraphen entwickelte Methode gestattet nun mannigfache weitere Anwendungen.

Vor Allem lassen sich jetzt Formeln für die Bestimmung der Anzahl der Nullstellen des Functionensystems $F_1, F_2 \dots F_n$ im Innern von $F_0 = o$ gewinnen: Man braucht zu dem Ende nur in der Formel 23) $\mathfrak{F} = 1$ zu setzen, also in den Integralen des vorigen Abschnittes

25)
$$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot 1$$
$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot 1 \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \dots F_n = o\}$$

als Dichtigkeitsfunction einzuführen. Man gelangt damit zu den zuerst von Picard (auf anderem Wege) abgeleiteten Formeln.[1])

Andererseits lassen sich die Nullstellen selbst mit Hülfe unserer Integralformeln berechnen.

Setzt man nämlich

26)
$$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \dots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2}} \cdot z_\mu^\nu$$
$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \zeta_\mu^\nu \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \dots F_n = o\}$$

unter $\nu$ die Zahlen 1, 2, ... $p$ verstanden, wenn $p$ die Anzahl der Nullstellen im Innern unseres Bereiches ist, so ergeben sich der Reihe nach die Potenzsummen der Werthe $\zeta_\mu$, welche eine bestimmte Coordinate $z_\mu$ an jenen $p$ Stellen annimmt, und

[1]) Vergl. die in der Einleitung citirten Abhandlungen.

damit eine algebraische Gleichung $p^{\text{ten}}$ Grades zur Berechnung dieser Werthe.

Versteht man speciell unter $F_1, F_2, \ldots F_n$ algebraische Functionen der $z_i$, so bedarf es nach Bestimmung der Anzahl $p$ der Nullstellen des Bereiches überhaupt nur noch der Auswerthung der soeben bezeichneten auf **eine** bestimmte Coordinate $z_\mu$ bezüglichen $p$ Integralpaare, sowie der Auflösung einer Gleichung $p^{\text{ten}}$ Grades, um dann nach den bekannten Methoden alle übrigen Schnittspunktscoordinaten $\zeta_i$ und damit jede beliebige rationale Function der $\zeta_i$ auf rationalem Wege zu berechnen.

Endlich kann man innerhalb des Gültigkeitsbereiches der für die Functionen $F_i$ zu Grunde gelegten Bedingungen die Grenze $F_0 = o$ für die Integration ersetzen durch eine $F_0 = o$ umfassende aber sonst willkürlich vorzuschreibende Grenze $T = o$.

Die Mannigfaltigkeit $F_0 = o$ theilt nämlich das Gebiet $T > o$ in die Theile

$F_0 > o$, $T > o$, in welchem unsere $p$ Nullstellen $\zeta$ liegen,

und

$F_0 < o$, $T > o$, in welchem weitere $q$ Nullstellen $\zeta'$ sich befinden.

Nun führe man einerseits für die in den Formeln 23), 24) und 25) gegebenen Dichtigkeitsfunctionen die Integrationen über $T = o$ bez. $T > o$ aus, andererseits aber beziehungsweise für die folgenden:

27) $$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 F_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 F_0^2}} \cdot \mathfrak{F}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} F_0 \cdot \mathfrak{F} \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o \ldots F_n = o\},$$

28) $$\mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 F_0 \mathfrak{F}}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 F_0^2 \mathfrak{F}^2}} \cdot \mathfrak{F}$$

$$\{= \operatorname{sign} \Delta_0 \cdot \operatorname{sign} F_0 \cdot \operatorname{sign} \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F} \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o \ldots F_n = o\},$$

$$29)\qquad \mathfrak{F} = \frac{\lambda \Delta_0 F_0}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 + \lambda^2 \Delta_0^2 F_0^2}} \cdot 1$$

$\{= \text{sign}\, \Delta_0 \cdot \text{sign}\, F_0 \cdot 1 \quad \text{für } F_1 = o, F_2 = o, \ldots F_n = o\}$.

Dann ergeben sich beziehungsweise aus 23) und 27) die Werthsummen:

$$30)\qquad \left(\sum_{\zeta} (\mathfrak{F}) + \sum_{\zeta'} (\mathfrak{F})\right) \quad \text{und} \quad \left(\sum_{\zeta} (\mathfrak{F}) - \sum_{\zeta'} (\mathfrak{F})\right),$$

aus 24) und 28) die Summen:

$$31)\qquad \left(\sum_{\zeta} (\text{abs}\, \mathfrak{F}) + \sum_{\zeta'} (\text{abs}\, \mathfrak{F})\right) \quad \text{und} \quad \left(\sum_{\zeta} (\text{abs}\, \mathfrak{F}) - \sum_{\zeta'} (\text{abs}\, \mathfrak{F})\right),$$

endlich aus 25) und 29) die Anzahlen

$$32)\qquad (p + q) \quad \text{und} \quad (p - q)$$

für die durch $F_0 = o$ getrennten Nullstellen des Gebietes $T > o$, und daraus unmittelbar die auf das Gebiet $F_0 > o$ bezüglichen Functionswerthsummen.

Es gelingt also für die Berechnung aller in Frage stehenden Grössen auch noch die letzte Function $F_0$ der gegebenen $n+1$ Functionen $F_0, F_1, \ldots F_n$ als Grenzbedingung fortzuschaffen und statt dessen in dem Ausdruck **unter** dem Integralzeichen einzuführen. Es ist diese Bemerkung wichtig insbesondere für die Darstellung durch ein $n$-faches und ein $n-1$-faches Integral, insoferne sie gestattet neben dem $n$-fachen „an sich" betrachteten Integral auch noch für das $n-1$-fache, über $F_0 = o$ laufende Integral eine Summe „an sich" betrachteter $n-1$-fache Integrale einzuführen, indem man etwa für die Begrenzung eines neuen Integrationsgebietes $T > o$ lauter **ebene** $n-1$-fache Mannigfaltigkeiten $z_i = \text{const.}$ annimmt, welche — wenn nöthig in treppenförmigen Absätzen — das Gebiet $F_0 > o$ innerhalb des Gültigkeitsbereiches unserer Functionsbedingungen umschliessen.

Sitzung vom 4. Mai 1898.

Herr C. v. Kupffer hält einen Vortrag: „Ueber die Sternzellen der Leber.“ Derselbe wird an einem anderen Orte zur Veröffentlichung gelangen.

Sitzung vom 11. Juni 1898.

1. Herr Johannes Ranke hält den in der Maisitzung zurückgestellten Vortrag: „Ueber den Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Primaten."

2. Herr Emil Salenka spricht: „Ueber die erste Embryonalanlage der Menschenaffen." Die Abhandlung wird an einem anderen Orte veröffentlicht werden.

3. Herr Hugo Seeliger legt eine Abhandlung von Herrn Dr. K. Schwarzschild, Assistent der v. Kuffner'schen Sternwarte zu Wien, „Ueber die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus" vor.

4. Herr Hugo Seeliger überreicht eine Arbeit: „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne." Dieselbe wird in die Druckschriften aufgenommen.

5. Herr Alfred Pringsheim theilt zwei Abhandlungen mit:

a) „Ueber die Convergenz einer allgemeinen Classe von Kettenbrüchen,"

b) „Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von $e$ und $\pi$."

# Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Primaten.

Von **Johannes Ranke.**

(*Eingelaufen 18. Juni.*)

## I. Der Stirnfortsatz beim Menschen.

### a) Europäer.

Im Jahre 1875 erschien Herrn R. Virchow's Werk: „Ueber einige Merkmale niederer Menschenrassen am Schädel“,[1]) durch welches die Kraniologie einen neuen anhaltenden Impuls erhielt.

Unter anderem wurde in jenem Werke der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, Processus frontalis oss. temp., einer eingehenden Betrachtung unterzogen. Diese Bildung ist bei dem Menschen recht selten, erweckt aber dadurch ein höheres Interesse, weil die Mehrzahl der Autoren darin übereinkommt, das Vorkommen des Stirnfortsatzes beim Menschen für eine entschiedene Thierähnlichkeit zu erklären. Herr R. Virchow gibt folgende Darlegung der anatomischen Verhältnisse.[2])

„Es gibt bei einer grossen Anzahl von Säugethieren, und zwar überwiegend von höheren, eine Knocheneinrichtung am Schädel, welche nach der gewöhnlichen anatomischen Erfahrung sich beim Menschen nicht findet und daher dem Anschein nach

[1]) Denkschriften der Berliner Akademie der Wissensch. 4⁰. 1875. Mit 7 Tafeln.

[2]) l. c. S. 9.

einen durchgreifenden Unterschied dieser Thiere vom Menschen darstellt. Es ist das die Verbindung der Schuppe des Schläfenbeins mit dem Stirnbein durch einen besonderen Fortsatz, den Stirnfortsatz, Processus frontalis. Zuweilen geschieht diese Verbindung in einer so breiten Fläche, dass man ein Zusammenstossen der beiden Knochen selbst annehmen könnte. Durch diese Verbindung wird der grosse Flügel des Keilbeins von der Berührung mit dem vorderen unteren Winkel des Scheitel- oder Seitenwandbeines abgeschnitten. Beim Menschen dagegen erreicht der Keilbeinflügel nicht nur das Scheitelbein, sondern beide pflegen sich in einer verhältnissmässig langen Strecke an einander zu legen. Die Schläfenschuppe bleibt daher in einer beträchtlichen Entfernung vom Stirnbein. Unter den Säugethieren sind es besonders die Nager, die Dickhäuter, die Einhufer und die Affen und vor allem die anthropoiden Affen, deren Schädel die Verbindung der Schläfenschuppe mit dem Stirnbein zeigen. Indes geschieht die Verbindung in sehr wechselnder Form und keineswegs bei allen Gattungen der genannten Ordnungen. Herr W. Gruber sagt in seiner eingehenden Untersuchung über dieses Verhältniss, dass es zur Verbindung durch einen platten und gut abgegrenzten Fortsatz eigentlich nur bei den Affen komme. Von den anthropoiden Affen besitzen Gorilla und Schimpanse den Fortsatz konstant. Beim Orangutan vermisst man ihn häufiger, doch ist sein Vorkommen durch die Herren Owen, Brühl, Bischoff, Gruber und Trinchese auch für dieses Thier nachgewiesen worden. Herr Gruber sah ihn beim Orangutan unter 15 Fällen, von denen 3 wegen Verwachsung der Nähte keinen Aufschluss gaben, achtmal, während Herr Owen ihn unter 8 Fällen nur einmal beobachtete. Ebenso ist das Vorkommen inkonstant beim Hylobates. Diese Thatsachen erscheinen um so mehr bemerkenswerth, als eine ähnliche Verbindung bei den Halbaffen bis jetzt noch nicht beobachtet worden ist, letztere also in dieser Beziehung dem Menschen näher stehen."

In der Literatur fand sich bis dahin nur eine Angabe über das Vorkommen eines Schläfenfortsatzes an einem modernen deutschen Schädel;[1]) Herr Virchow selbst konnte auch nur eine einzige Beobachtung aus deutschem Gebiete mittheilen und zwar an einem sehr jugendlichen prähistorischen Schädel aus dem Gräberfelde von Camburg, wo er das Vorkommen von Cretinismus schon in jener alten Zeit constatirt hatte.[2])

Im Jahre 1877 begann ich mit der Veröffentlichung meiner Untersuchungen: Ueber die Schädel der altbayerischen Landbevölkerung.[3])

Unter **2421** Schädeln der altbayerischen Landbevölkerung fand ich: **43** mit theils einseitigem, theils doppelseitigem vollkommen trennendem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, es sind das je 1 Schädel auf $56,_3$ oder $17,_3$ Schädel auf je 1000.

Auch aus anderen Gegenden Deutschlands liefen nun Einzelangaben über das Vorkommen von Stirnfortsätzen der Schläfenschuppe ein, aus welchen soviel hervorzugehen scheint, dass überall in Deutschland das Vorkommen ziemlich gleich häufig rsp. selten ist. Auch für andere Europäische Völker gilt das Gleiche, für welche ich damals schon über **8000** Schädel, die von mir beobachteten eingerechnet, aus der Literatur vergleichen konnte. Unter 4000 Slavenschädeln hatte W. Gruber den Stirnfortsatz 60 mal gefunden = 15,0 pro mille, Virchow gibt für Slaven 16,6 p. m. an, Calori fand unter 1013 Italienerschädeln den Fortsatz zu 22 p. m. bei Frauen-, und nur zu 4 p. m. bei Männer-Schädeln. Im Mittel berechnete ich daraus die Häufigkeit des Stirnfortsatzes bei europäischen Völkern zu **16** pro mille.

---

[1]) J. Henle, Handbuch der Knochenlehre. Braunschweig 1855. S. 134.

[2]) R. Virchow. l. c. S. 40.

[3]) Beiträge zur Anthropologie und Urgeschichte Bayerns. Bd. I. S. 227 ff. und Beiträge zur physischen Anthropologie der Bayern. München, Th. Riedel Lexic. 8⁰ mit 16 Tafeln und 2 Karten.

Fünf Jahre später hat Herr Dimitrij Anutschin[1]) aus der Literatur und aus eigener Beobachtung die Gesammtzahl der darauf untersuchten Europäer-Schädel, unter Einrechnung der von mir untersuchten, auf nahezu **10** Tausend (9867) gebracht — Deutsche (vor allem meine Altbayern), Franzosen, Italiener, Russen, Oesterreicher. — Er fand in der Gesammtzahl den Stirnfortsatz ebenfalls zu 16 pro mille und bestätigte damit meine älteren Resultate.

Unbeschadet der Uebereinstimmung der statistischen Ergebnisse im Grossen konnte ich jedoch im Einzelnen enorme Differenzen der Anzahl der Schläfenfortsätze für lokal engbegrenzte Gruppen nachweisen.

Während in bayerischen Flachlandorten — mit und ohne slavische Beimischung — die Anzahl der Stirnfortsätze 16 pro mille betrug, stieg dieselbe in Gebirgsorten auf 44,8 pro mille. In dem kleinen Gebirgsorte Bergen am Chiemsee fand ich unter 8 Schädeln 1 mit vollständigem und 5 mit unvollständigem Schläfenbeinfortsatz zum Stirnbein, der vollständige Fortsatz fand sich dort sonach in 125 pro mille. In manchen meiner Untersuchungsreihen dagegen fand ich den Stirnfortsatz überhaupt gar nicht.

Aehnliche Beobachtungen machte Herr R. Virchow. Während Calori unter 1013 Italienerschädeln nur achtmal den vollständigen Stirnfortsatz zählte, sah ihn Virchow unter 5 Schädeln von St. Remo zweimal = 400 pro mille; unter 13 Finnenschädeln dreimal = 230 pro mille; unter 8 Ungarnschädeln zweimal = 250 pro mille.

Aus diesen Ergebnissen tritt uns die ausgesprochene „Erblichkeit" dieser seltenen Bildung mit Entschiedenheit entgegen: in eng abgeschlossenen kleinen Bevölkerungsgruppen, bei den sich in solchen ergebenden gleichartigen verwandtschaftlichen Beziehungen der Bewohner kleiner Ortschaften, kann sich das Moment der Erblichkeit in gesteigertem Masse geltend machen. Es gilt das, wie ich gefunden habe, für alle seltenen angeborenen Schädel- und sonstigen Körperanomalien.

---

[1]) Biol. Centralblatt. 1882, II. Band. S. 38 ff.

b) Aussereuropäische Völker.

Herr R. Virchow und ich hatten aus z. Thl. freilich kleineren statistischen Reihen, mit Benützung der älteren Literatur, statistisch festgestellt, dass der Stirnfortsatz bei aussereuropäischen Schädeln zum Theil weit häufiger sei, und zwar um etwa das Zehnfache als bei den Europäern. Herr R. Virchow hat das vor allem für Schädel aus Australien und den Philippinen sowie aus Celebes konstatirt, ich für Schädel der nordafrikanischen Mischbevölkerung, Papuas aus Neu-Guinea, Kalmücken und Neger.

Gestützt auf unsere Statistik und unter Zuziehung noch weit grösseren statistischen Materials als uns damals zur Verfügung war, hat in jener oben erwähnten verdienstvollen Untersuchung Herr Anutschin auch dieses unser Resultat für aussereuropäische Völker voll bestätigt. Seine Gesammt-Statistik umfasst ausser den schon besprochenen 9867 Europäer-Schädeln noch 5302 aussereuropäische Schädel. Unter der Gesammtzahl von 15169 Menschen-Schädeln verschiedener Rassen fanden sich 449 mit Stirnfortsatz d. h. im Mittel also 3% (genau 2,96%). Die Schwankungsbreite war nach Herrn Anutschin wie 1 : 10 nämlich:

| | | |
|---|---|---|
| minmum: | Europäer | 1,6% |
| maximum: | Australier | 16,0% (genau 15,7%). |

Die betreffenden Untersuchungen wurden seit dieser Zeit (1882) eifrig fortgesetzt. In den im Archiv für Anthropologie publizirten Catalogen der Anthropologischen Sammlungen Deutschlands[1]) ist nun ein weit grösseres statistisches Material zusammengebracht, als es früher Irgendjemandem zu benützen möglich war. Diese Mehrung kommt vor allem den Mongolen und Mongoloiden, den Malaien und Polynesiern, den Papua, Australiern[2]) und Negern, also den für unsere Betrachtungen

[1]) J. Ranke, Archiv für Anthropologie Bd. 1883 — Bd. 1897.

[2]) W. Krause: Zeitschr. f. Ethnologie Bd. XXIX. 1897. Verhandlungen der Berliner anthropol. Gesellschaft S. 575 ff.

wichtigsten Völkern und Rassen, zu gute. Im Ganzen umfasst meine folgende Statistik nun

20030 Menschenschädel,

und zwar 11000 Europäische Schädel
und 9020 Ausser-Europäische Schädel,
also eine Mehrung um 4861 Schädel im Ganzen. Um die älteren statistischen Ergebnisse Herrn Anutschin's mit den neuen hier gegebenen vergleichen zu können, wurden in die folgende Tabelle auch Herrn Anutschin's Zahlen eingestellt.

**Tabelle**

über das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe bei 20030 Menschen-Schädeln verschiedener Rasse.

| Gesammt-Anzahl der Schädel: | | Darunter solche mit Stirnfortsatz: | Bezeichnung der Schädel: | Anzahl der Schädel mit Stirnfortsatz in Procenten J. Ranke: | (Anutschin): |
|---|---|---|---|---|---|
| 11000 | : | 169 | Europäer (Deutsche, Oesterreicher, Italiener, Franzosen, Russen) | **1,53%** | ( 9867: 1,6 %) |
| 2520 | : | 43 | Amerikaner | **1,74** „ | ( 2335: 1,6 „ ) |
| 1200 | : | 24 | Asiaten nicht mongoloider Rasse (Kaukasier, Inder, Turkestaner, Turkofinnen) | **2,00** „ | ( 1194: 1,9 „ ) |
| 710 | : | 27 | Mongolen und Mongoloiden | **3,80** „ | ( 596: 3,7 „ ) |
| 1250 | : | 54 | Malaien und Polynesier | **4,32** „ | ( 946: 3,7 „ ) |
| 787 | : | 73 | Papua (Melanesier) | **9,28** „ | ( 697: 8,6 „ ) |
| 422 | : | 38 | Australier | **9,00** „ | ( 210:15,7 „ ) |
| 81 | : | 9 | Ceilonesen (Vedda 38 : 4; Tamilen 27 : 2; Singalesen 16 : 3) | **11,11** „ | ( — : — „ ) |
| 1231 | : | 146 | Neger | **11,86** „ | ( 884:12,4 „ ) |
| 830 | : | 47 | Nord-Afrikaner | **5,66** „ | ( — : — „ ) |
| S. 20030 | : | 637 | | **3,10%** | (15169: 2,96%) |

Unter den 20030 Schädeln von Menschen verschiedener Rasse fanden sich 637 mit theils einseitigem theils doppelseitigem vollkommen ausgebildetem (trennendem) Stirnfortsatz der Schläfenschuppe im Gesammtmittel sonach 3 auf 100.

Aber die Differenzen sind auch bei dieser reichen Statistik enorm. Wenn auch mit der steigenden Anzahl der zur Beobachtung beigezogenen Schädel der aussereuropäischen Rassen das procentische Vorkommen des Stirnfortsatzes nicht unwesentlich herabgedrückt erscheint, so bleibt doch unser älteres Resultat bestehen, dass, abgesehen von den Amerikanern, alle Ausser-Europäischen Völker und Rassen den Stirnfortsatz in grösserer relativer Häufigkeit aufweisen als die Europäer.

Bemerkenswerth erscheint es, dass die in fast verdoppelter Anzahl vorliegenden Australier-Schädel von ihrer letzten Stelle bei Anutschin mit 15,7% sich mit nun 9,0% ziemlich weit über die Neger mit c. 12% erhoben haben und den Papua (Melanesiern) mit 9,28% zunächst stehen. Aehnlich nah stehen sich die Mongolen (Mongoloiden) mit c. 4% (3,8%) und die Malaien (und Polynesier) mit 4,32%. Die gegenüber den Europäern etwas grössere Anzahl der Stirnfortsätze bei den „nicht-mongoloiden“ Asiaten mit 2%, lässt sich vielleicht durch Beimischung mongoloiden Blutes erklären; ähnlich erklärt sich wohl die relativ hohe Anzahl der Stirnfortsätze bei den Nord-Afrikanern mit 5,66% aus Zumischung von Negerblut. Bei den Ceilonesen mit 11% darf man, obwohl hier die Statistik noch keineswegs ausreicht, doch an australoiden oder Papua-Einfluss denken.

Aber vor allem ist es wichtig, dass, wie oben dargelegt, die lokalen Differenzen in Europa selbst noch weit beträchtlicher sind als die Differenzen zwischen den verschiedenen Menschenrassen.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes erscheint als eine erbliche Variation im Schädelbau der gesammten Menschheit.

Die grössere Häufigkeit des Stirnfortsatzes bei aussereuropäischen Völkern erscheint danach zunächst weniger als ein

Rassen-Merkmal, als ein Erfolg gesteigerter Inzucht, wie sie sich bei kleineren Stämmen und Inselbevölkerungen der Natur der Sache nach ergibt. Es würde nach unseren Erfahrungen möglich sein, auch bei Europäern ähnliche Häufigkeit des Stirnfortsatzes durch Isolirung und Inzucht zu erzielen. Die Bevölkerungen von Bergen oder St. Remo würden, isolirt und auf Inzucht angewiesen, in dieser Hinsicht bald Neger, Australier und Papua übertreffen.

Immerhin deutet aber die grössere Häufigkeit des Stirnfortsatzes bei allen engschädeligen schwarzen Rassen: Negern, Australier und Papua, gegenüber den weitschädeligen hellhäutigen Rassen: Mongoloiden (Mongolen, Malaien, Amerikaner) und Europäer, darauf hin, dass bei jenen schwarzen Rassen allgemeiner begünstigende Momente für die Entstehung des Schläfenfortsatzes bestehen, wie sie sich bei ersteren nur vereinzelt und lokal finden.

## II. Der Stirnfortsatz bei Affen und Halbaffen.

### a) Orangutan.

Mit den im Vorstehenden dargelegten Resultaten erscheint eine statistisch gesicherte Grundlage gewonnen zunächst zur Vergleichung zwischen Mensch und Anthropoiden sowie den übrigen Affen.

Hier hat Herr Anutschin zuerst ein grösseres statistisches Material zusammengebracht durch Untersuchungen in vielen europäischen Sammlungen, auch denen Münchens.

Unter 6 Orangutan-Schädeln hatte ich in der oben citirten Publication nur 1 mit Stirnfortsatz gefunden; zahlreiche alte Schädel mussten dabei wegen Verwachsung und Verstreichen der Nähte in der Schläfengegend von der statistischen Zählung ausgeschlossen werden. Aus der Literatur brachte ich noch 20 brauchbare Schädel zusammen. Unter der Gesammtzahl von 26 zeigten 10 Stirnfortsatz, was nahezu 40% ausmachen würde. Jedenfalls bestätigten aber meine Untersuchungen das

von Herrn R. Virchow angegebene[1]) inkonstante Vorkommen des Stirnfortsatzes beim Orangutan. Anutschin konnte 65 Schädel der Zählung unterziehen, er fand darunter 11 mit doppelseitigem und 7 mit einseitigem Stirnfortsatz = 27,7 %. Mit Einrechnung der obigen 26 meiner Zählung sind das 81 Orangutan-Schädeln, darunter 28 mit Stirnfortsatz = 34,5 %.

Meine neuen Ergebnisse habe ich der Hauptsache nach an der von Herrn E. Selenka der Münchener kgl. Akademie der Wissenschaften zur Aufstellung in der anthropologisch-prähistorischen Sammlung geschenkten Kollektion von Orangutanschädeln aus Borneo gewonnen.

Unter den 245 Orangutan-Schädeln aus Borneo der Selenka'schen Sammlung, welche von mir für diese Untersuchungen benützt werden konnten, waren bei 226 die anatomischen Verhältnisse der Schläfengegend deutlich genug, um Anwesenheit oder Abwesenheit des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, Processus frontalis oss. temp. constatiren zu können. Unter diesen fanden sich 76 mit entweder doppelseitigem oder einseitigem vollkommen trennenden Stirnfortsatz, das gibt 33,62 %, also fast genau ein Drittel der Gesammtsumme. Doppelseitig, rechts und links, zeigten den Fortsatz 54, einseitig, rechts oder links, 22 Schädel. Der doppelseitige Stirnfortsatz erscheint danach weit häufiger als der einseitige.

Die procentische Anzahl des Vorkommens des Stirnfortsatzes zu 33,62 % ist fast identisch mit der von mir oben aus der Zusammenfassung der älteren Zählungen berechneten 34,5 %. Mit Zuzählung jener oben erwähnten 81 Orangutan-Schädel meiner älteren Statistik zu den 226 der neuen Statistik erhebt sich die von mir verglichene Gesammtzahl der Orangutan-Schädel auf 307, davon 104 mit Stirnfortsatz = 33,8 %.

Das vortreffliche Material der Selenka'schen Sammlung erlaubt eine exakte Trennung der Schädel auch nach der Heimath der Thiere. Da tritt nun der gleiche Einfluss scheinbar des Lokals, in Wahrheit der Vererbung nicht

---

[1]) S. oben S. 228.

weniger deutlich hervor als bei unseren Untersuchungen am Menschen. In folgender kleinen Tabelle sind die Einzelresultate nach lokalen Gruppen geordnet, ohne Trennung nach Alter und Geschlecht.

**Tabelle**

über das Vorkommen des Stirnfortsatzes bei Orangutans aus verschiedenen Gegenden Borneo's.

| Herkunft der Schädel: | Anzahl der Schädel: | Schädel mit Processus frontalis: | Procentische Anzahl 100: |
|---|---|---|---|
| Kapuas u. Belaban | 3 | 3 | 100,0 % |
| Berantau | 5 | 4 | 80,0 " |
| Genepai | 17 | 7 | 41,2 " |
| Batangtu | 13 | 5 | 38,5 " |
| Rantei | 11 | 4 | 36,4 " |
| Dadap | 30 | 10 | 33,3 " |
| Bogau | 15 | 5 | 33,3 " |
| Batang Bara | 9 | 3 | 33,3 " |
| Ketungau | 3 | 1 | 33,3 " |
| Skalau | 106 | 31 | 29,2 " |
| Landak | 14 | 3 | 21,4 " |
| Summe: | 226 | 76 | 33,62% |

Die Schwankungsbreite geht von 100% bis 21,4%.

Ein so ausgesprochener Unterschied, wie ihn Calori für das weibliche und männliche Geschlecht beim Menschen (Italiener-Schädel) gefunden hat, findet sich bei den beiden Geschlechtern des Orangutan nicht. Ein besonderer Werth der Selenka'schen Sammlung liegt darin, dass alle Schädel nach dem Geschlecht bezeichnet wurden. Die Gesammtzahl von 226 Schädeln, welche für diese Untersuchungen brauchbar waren, setzt sich aus 92 männlichen und 134 weiblichen Schädeln zusammen, unter letzteren fanden sich 47 = 35,07%, unter den ersteren 92 dagegen 29 = 31,52% mit Stirnfortsatz. Der Unterschied = 3,55% grössere Häufigkeit bei den Weibchen — fällt noch in die Fehlergrenzen derartiger statistischer Aufnahmen.

Immerhin verdient Beachtung, dass bei den Weibchen ein nur einseitig ausgebildeter Stirnfortsatz 16 mal = 12%, bei den Männchen nur 6 mal = 6,5% beobachtet worden ist. Der einseitige Stirnfortsatz ist im Verhältniss zum Menschen bei unseren Orangutan's auffallend selten, noch seltener der bei dem Menschen so sehr häufig auftretende unvollständige Stirnfortsatz, Proc. frontalis oss. temp. incompletus. Bei den altbayerischen Schädeln fand ich unter 2421 den completen Stirnfortsatz 43 mal = 17,3 pro mille, den unvollständigen 146 mal = 60,3 pro mille, sonach letzteren mehr als dreimal so häufig als ersteren. Unter den 226 Orangutan-Schädeln dieser Statistik kam der unvollständige Stirnfortsatz der Schläfenschuppe nur zweimal, und zwar beide Male an männlichen Schädeln, vor.

Als Resultat der Untersuchung der Orangutanschädel ergibt sich:

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, Processus frontalis oss. temp. s. squamae, bildet bei dem Orangutan von Borneo keineswegs einen regelmässigen Befund, er findet sich nur etwa bei $^1/_3$ der Schädel und erscheint danach als eine individuelle Bildung, entsprechend wie bei dem Menschen.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes ist bei dem Orangutan von Borneo stets dreimal so häufig als bei den „Negern" (s. oben die Tabelle, die Zahlen sind 33,6% : 11,86%), und etwa 10 mal so häufig als in der „gesammten Menschheit" mit etwa 3% (genau 3,1%) und 21 mal häufiger als bei den europäischen Völkern mit 1,53%.

Bei dem Orangutan zeigt sich wie bei dem Menschen der Einfluss des Lokals rsp. der Vererbung auf die Häufigkeit des Stirnfortsatzes in der ausgesprochensten Weise, die Häufigkeit schwankt bei ersteren in den einzelnen lokalen Reihen von dem Minimum 21,4%, welches sich nur um einige Procente über das Mittel der Neger erhebt, und dem Maximum 80% rsp. 100%. Bei Europäern ergab sich als lokales Maximum 40%.[1])

[1]) Die Zahl der von Sumatra stammenden Orangutan-Schädel, welche ich untersuchen konnte, war nur 4, davon hatte nur 1 Schädel beiderseits stark ausgebildeten Stirnfortsatz = 25%.

### b) Gorilla, Schimpanse, Hylobates und die niederen Affen und Halbaffen.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes bei Gorilla und Schimpanse ist bis jetzt noch nicht an einer für eine statistische Aufnahme genügenden Anzahl geprüft. Es ist aber immerhin wichtig, dass man noch keinen Gorilla-Schädel ohne Stirnfortsatz gefunden zu haben scheint, sodass Virchow's dahin gehende Angabe sich bestätigt. Unter 35 Schädeln, z. Thl. nach der Literatur, z. Thl. von mir persönlich geprüft, fanden sich aber doch 3 = 8,5%, bei welchen der Fortsatz nur einseitig auftrat, zum Beweis, dass doch auch bei dem Gorilla das Vorkommen dieser Bildung nicht als eine absolute Baunothwendigkeit des Schädels angesprochen werden muss.

Am Schimpanse-Schädel wird der Stirnfortsatz selten vermisst; nach meinen und Anutschin's Zählungen an 70 Schädeln fand er sich bei 54 = 77%.

Das Vorkommen des Stirnfortsatzes bei den Schädeln von Hylobates verschiedener Species konnte von mir (10) und Anutschin (27), zusammen an 37 Schädeln, an welchen die Nahtverhältnisse in der Schläfengegend deutlich waren, geprüft werden, es fanden sich darunter 4 mit theils doppelseitigem, theils einseitigem Stirnfortsatz. Aus der Sammlung E. Selenka's hat G. Kirchner[1]) 36 Schädel von Hylobates concolor geprüft, er fand darunter 6 Schädel mit Stirnfortsatz. Im Ganzen fanden sich sonach unter 73 Schädeln 10 = 13,7%.

Die niederen Affen der alten Welt verhalten sich im Allgemeinen wie der Schimpanse; ich fand unter 83 Schädeln 60 mit theils doppelseitigem, theils einseitigem Stirnfortsatz = 72,3%.

Im Einzelnen kann ich die älteren Resultate der Autoren namentlich Anutschin's bestätigen: am häufigsten ist unter

---

[1]) Der Schädel des Hylobates concolor, sein Variationskreis und Zahnbau. Erlangen, Inaugural-Dissertation, 1895.

den niederen Affen der alten Welt der Stirnfortsatz bei den Makaken (Macacus und Inuus), A. fand bei 78 Schädeln 67 mit Fortsatz = 85,9%, ich bei 20 : 18 = 90,0%. Dann folgen bei uns beiden die Paviane, A. 81 : 63 = 77,8%, ich 20 : 16 = 80%; Meerkatzen (Cercopithecus, Cercocebus) A. 63 : 36 = 57%, ich 23 : 17 = 74,0%; Semnopithecus (mit Rhinopithecus, Colobus), A. 69 : 27 = 39,1, ich 21 : 9 = 42,3%.

Für alle 291 untersuchten Schädel von niederen Affen der alten Welt berechnen sich nach Anutschin 67,3%; mit Zuzählung der obigen 83 von mir geprüften Schädel stellt sich für die Gesammtsumme von 374 Schädeln das Vorkommen des Stirnfortsatzes zu 68,4%.

Bei diesen niederen Affen der alten Welt ist sonach das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe ein so häufiges, dass man dasselbe nahezu als typischen Befund betrachten darf, sie reihen sich hinsichtlich dieser Bildung dem Gorilla und dem Schimpanse an. Vielleicht macht die Gruppe Semnopithecus einen Uebergang zu der folgenden Reihe, als deren Repräsentant zunächst der Orangutan erscheint.

Bei Orangutan und Hylobates ist, im Gegensatz zu den letzt besprochenen Affen, das Vorkommen des Stirnfortsatzes so selten, dass es wie beim Menschen als eine individuelle Variation angesprochen werden muss: 33,6 und 10,8%.

Noch ausgesprochener hat der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe den Charakter der individuellen Variation bei den Affen und Krallenaffen der neuen Welt.

Ich habe 53 Schädel darauf geprüft (11 Mycetes = 0; 2 Ateles = 1 Stirnfortsatz; 3 Logothrix = 0; 17 Cebus = 0; 4 Pithecia = 2; 7 Callithrix = 0; 1 Chrysothrix = 0; 8 Hapole = 1), es fanden sich 3 mit Stirnfortsatz und 1 mit Anlagen des Schläfenbeins ans Stirnbein ohne Fortsatzbildung, im Ganzen also 4 = 7,5%.

Die Angabe Virchow's, dass den Halbaffen der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe fehle, konnte ich an 26 Schädeln prüfen; bei keinem derselben war mit Sicherheit ein Stirnfortsatz zu konstatiren; in 2 Fällen blieb wegen Nahtverwachsung

das Verhältniss zweifelhaft. Gewiss erscheint sonach das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe bei den Halbaffen nicht häufiger als bei den Affen der neuen Welt: er fehlt ganz oder ist, wenn er vorkommen sollte, eine seltene Variation.

Das Gesammtresultat der Untersuchung für das Vorkommen des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe bei den Primaten ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

**Tabelle**

über das procentische Vorkommen des Stirnfortsatzes bei den Primaten.

| | | Häufigkeit des Stirnfortsatzes |
|---|---|---|
| | 1. Menschen. | |
| 20030 | Menschenschädel verschiedener Rassen | 3,10 % |
| 11000 | Europäer | 1,53 „ |
| 1231 | Neger | 11,86 „ |
| | 2. Affen: | |
| 35 | Gorilla [1] | 100,0 % |
| 70 | Schimpanse | 77,0 „ |
| 374 | Niedere Affen der alten Welt | 68,4 „ |
| 307 | Orangutan (Borneo) | 33,6 „ |
| 73 | Hylabates verschiedener Species | 13,7 „ |
| 53 | Affen der neuen Welt | 7,5 „ |
| | 3. Halb-Affen: | |
| 26 | Halbaffen | 0,0 %. |

Bei dem Orangutan und bei dem Menschen konnte oben der Einfluss des Lokals, d. h. der Vererbung in einer örtlich enger abgeschlossenen Gruppe auf die Häufigkeit des Vorkommens des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe sicher gestellt werden. Im Grossen und Ganzen zeigt einen solchen Einfluss des Lokals (= Vererbung) auch die vorstehende Gesammtreihe sowohl für die niederen Affen als für die menschenähnlichen Affen im Allgemeinen. Bei den Afrikanischen Menschenaffen (Gorilla und Schimpanse) bildet das Fehlen des

[1] Darunter 3 = 8,5% mit nur einseitigem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe.

Stirnfortsatzes die seltene Ausnahme, umgekehrt ist es bei den Asiaten (Orangutan und Hylobates), bei welchen das Vorkommen des Stirnfortsatzes die Ausnahme bildet; bei nahezu Dreiviertel aller niederen Affen der alten Welt findet sich der Stirnfortsatz. In Amerika dagegen fehlt der Stirnfortsatz den Affenschädeln so gut wie ganz.

Als Resultat ergibt sich:

Die direkte Verbindung der Schläfenschuppe mit dem Stirnbein durch einen Stirnfortsatz gehört sonach bei dem Gorilla und auch bei dem Schimpanse, wie bei fast allen niederen Affen der alten Welt, zur typischen Schädelbildung, das Fehlen dieser Verbindung erscheint als individuelle Ausnahme, Variation.

Bei Orang, Hylobates sowie den niederen Affen der alten Welt, einschliesslich den Krallenaffen, lässt das Vorkommen des Stirnfortsatzes entweder mehr oder weniger häufige Ausnahmen zu oder wird selbst zu einer seltenen oder sehr seltenen individuellen Variation. Letzteres gilt auch für den Menschen. Den Halbaffen fehlt der Stirnfortsatz nach den bisherigen Untersuchungen.

Der Mensch reiht sich bezüglich des Vorkommens dieser bemerkenswerthen Bildung am Schädel zwischen die Halbaffen und die Affen der neuen Welt ein.

Sehen wir von den niederen Affen ab, so steht der Mensch nach unserer obigen Tabelle zwischen Halbaffen und Hylobates, Neger und Hylobates stehen fast vollkommen gleich.

Der Mensch trennt sich sonach in dieser Hinsicht von den grossen menschenähnlichen Affen im engeren Sinne, an deren Spitze sich der Gorilla stellt. —

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe ist ein Beispiel für die eine Seite der individuellen Variation:

In den gesetzmässigen Bauverhältnissen des Schädels aller Primaten ist die Möglichkeit zur Ausbildung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe gegeben, aber nur individuell erfolgt diese mögliche Ausbildung auch faktisch.

## III. Die Entstehung und Bedeutung des Stirnfortsatzes.

Aber die Betrachtung darf sich nicht nur auf die Primaten beschränken.

Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe ist eine für den Schädel nicht nur der Primaten, sondern wahrscheinlich aller Säuger im Typus des Schädelbaus begründete mögliche und thatsächlich weit verbreitet vorkommende Bildung.

Wie oben schon erwähnt, zeigt sich als regelmässiger Befund eine Verbindung der Schläfenbeinschuppe mit dem Stirnbein nach W. Gruber u. A. bei: „Nagern, Einhufern und Dickhäutern.“

Die Art der Verbindung ist bei den einzelnen genannten Gruppen etwas verschieden, und vielfach findet sich auch, was ich gegen W. Gruber's gegentheilige Bemerkung (s. oben) hervorheben möchte, ein gut ausgebildeter wahrer Stirnfortsatz.

Bei Hippopotamus und Elephas berührt das Stirnbein das Schläfenbein in relativ geringer Ausdehnung, bei Equus ist das Stirnbein mit dem Schläfenbein in breiter Berührungslinie verbunden, dagegen findet sich bei Sus, Tapir und Hyrax meist ein gut ausgebildeter Stirnfortsatz der Schläfenschuppe ähnlich dem bei den Primaten, und vor allem bei dem Menschen, typischen Verhältnisse. Bei letzterem kommen übrigens die anderen, eben genannten Arten der Verbindung der beiden Knochen: von der schmalen bis zur ausgedehnten Berührung und von der Bildung eines kleinen bis zu der eines extrem grossen eigentlichen Stirnfortsatz als individuelle Variation bekanntlich ebenfalls vor. Bei Nagern sah ich einen zum Theil gut ausgebildeten Stirnfortsatz der Schläfenschuppe z. B. bei Arctomys, Sciurus, Pteromys, Erethizon u. a., während bei Hystrix eine breite Verbindung der beiden Knochen gewöhnlich erscheint, was übrigens gelegentlich auch bei Arctomys (A. empetra) zur Beobachtung kam.

Die Erklärungsversuche des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe beim Menschen dürfen daher, nach dem eben Gesagten, nicht auf den Menschen allein, und etwa noch auf die menschen-

ähnlichen Affen, zugeschnitten sein. Wir haben es mit einer Frage zu thun, welche eine Berücksichtigung des Baues des Säugethierschädels im Allgemeinen nothwendig macht.

Lediglich die menschlichen Schädelverhältnisse berücksichtigt die älteste Theorie der Bildung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, welche in der neuesten Zeit wieder mehrfach z. B. von Graf Spee und W. Krause u. A., gleichsam als die einzig mögliche, vorgetragen wird. Diese Erklärung wurde schon von Joh. Friedr. Meckel[1]) angedeutet im Zusammenhang mit einer von ihm gelieferten Beschreibung der in der Schläfenfontanelle und in deren nächster Nachbarschaft auftretenden atypischen Verknöcherungscentren, deren häufigste Form als Fontanellknochen der Schläfenfontanelle, temporelle Schaltknochen, Os epiptericum, bezeichnet wird.

Henle und Hyrtel schlossen sich an die von Meckel geäusserte Meinung an, dass es sich bei dem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe beim Menschen eigentlich um einen dieser atypischen Fontanellknochen handle, der jedoch mit der Schläfenschuppe verschmelze.[2]) Bei der Beschreibung eines Schaltknochens der Schläfenfontanelle an einem Schädel der Wiener Anatomischen Sammlung sagt z. B. Hyrtl:[3]) „Verwachsung dieses Schaltknochens mit der Schläfenschuppe bedingt jene bei allen Rassen ausnahmsweise vorkommende und deshalb irrthümlicher Weise als charakteristisches Zeichen einzelner derselben angesprochene Nahtverbindung zwischen Schläfenschuppe und Stirnbein.“ Auf diesen mehrfach an verschiedenen Orten wiederholten Ausspruch Hyrtl's gehen die meisten Wiederholungen dieser Meinung vor allem zurück. Herr W. Krause sagt in seiner neuesten vortrefflichen Publikation über 180 von ihm studirter Australier-Schädel:[4]) „Verwächst der Schläfen-

---

[1]) Die ältere Literatur s. bei R. Virchow l. c. S. 41 ff.

[2]) R. Virchow, l. c. S. 41.

[3]) Jos. Hyrtl, Vergangenheit und Gegenwart des Museums für menschliche Anatomie an der Wiener Universität. Wien 1869. S. 64. Nr. 73.

[4]) Zeitschrift für Ethnologie Bd. XXIX. 1897. Verhandlungen der Berliner anthropologischen Gesellschaft S. 515.

fontanellknochen (Os epiptericum) mit der Squama temporalis, so entsteht ein Processus frontalis der letzteren, verwächst er mit dem Os parietale, was die Norm ist, so verbindet sich letzterer durch die Sutura parieto-sphenoidalis mit der Ala magna."

Herr Virchow hat sich in der oft citirten Abhandlung mit Entschiedenheit wenigstens gegen die allgemeine Giltigkeit dieser Erklärung der Entstehung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe ausgesprochen. Es kann ja nicht verkannt werden, dass unter Umständen eine derartige Verwachsung eines solchen atypischen temporalen Fontanellknochens mit der Schläfenschuppe eintreten kann, da im späteren Lebensalter, mit all den anderen Schädelnähten, auch die, nicht weniger zäh wie die normalen Nähte sich erhaltenden, Grenznähte der Fontanellknochen gegen die Nachbarknochen verstreichen. Ein Beweis aber dafür, dass durch eine solche Verwachsung thatsächlich ein typischer wahrer Stirnfortsatz gebildet worden sei, ist, wie mir scheint, noch niemals erbracht worden, die blosse Möglichkeit darf nicht als Beweis augesprochen werden. Die senile Verwachsung der Fontanellknochen der Schläfenfontanelle findet auch gewöhnlich unregelmässig und an allen Grenznähten ziemlich gleichzeitig statt.

Herr Virchow führt gegen die Verwachsungstheorie noch weitere gewichtige Gründe an. Am ausschlaggebendsten erscheint, dass der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe an ganz jugendlichen Menschen-Schädeln beobachtet worden ist, bei welchen von einer solchen hypothetischen, wie gesagt, gewöhnlich erst im senilen Alter erfolgenden Nahtverstreichung nicht die Rede sein kann. Herr Virchow hat gut ausgebildete Stirnfortsätze der Schläfenschuppe an dem oben erwähnten Schädel eines $1^1/_2$ jährigen Kindes beobachtet.[1] Unter den zahlreichen von mir beobachteten Fällen beim Menschen zeigten sich in der überwiegenden Anzahl die Schädelnähte der Schläfengegend noch offen. Von Affen, vor allem vom Orangutan, stehen mir zahlreiche Beispiele von Stirnfortsatz aus dem allerersten Jugendalter zur Verfügung.

[1]) Aus dem Gräberfelde von Kamburg.

Noch auf ein anderes Verhältniss macht Herr Virchow[1]) aufmerksam. Wenn der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe seine Entstehung der Verwachsung eines temporalen Schaltknochens mit einem der nachbarlich anliegenden Knochen rsp. mit der Schläfenschuppe verdankt, ist kein Grund abzusehen, warum eine solche Verwachsung nicht auch mit einem der anderen Nachbarknochen, namentlich mit dem Stirnbein, erfolgen sollte, da die Fontanellknochen doch auch dem Stirnbein dicht anliegen und senil thatsächlich mit allen drei benachbarten Knochen (meist gleichzeitig) verschmelzen. Aus einer hypothetischen einseitigen Verwachsung eines Fontanellknochens mit dem Stirnbein würde dann kein Processus frontalis squamae temporalis, sondern „ein Processus temporalis ossis frontis entstehen.“ „Aber ein solcher ist, sagt Herr Virchow, meines Wissens niemals beobachtet worden.“[2])

Danach muss es zunächst scheinen, als würde die Entdeckung eines Processus temporalis ossis frontis die alte Theorie Meckel's und Hyrtl's bestätigen. Ich werde sogleich zeigen, dass das doch nicht im strengen Sinn zutrifft.

Den von Herrn Virchow für die Begründung der Verwachsungstheorie Hyrtl's geforderten Schläfenfortsatz des Stirnbeins, als Widerspiel des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, habe ich thatsächlich an Menschenschädeln entdeckt. In meiner Statistik der altbayerischen Schädel konnte ich unter den 2421 Schädeln, deren Schläfengegend eine genaue Untersuchung zuliess, 2 mit gut entwickeltem Processus temporalis ossis frontis nachweisen. Diese Auffindung des offenbar an Europäerschädeln ausserordentlich seltenen Vorkommens eines Schläfenfortsatzes des Stirnbeins hat Herr Brösike einige Jahre später (1880) in dem Katalog der Berliner kraniologischen Sammlung der Anatomie (Archiv für Anthropologie, 1880) durch Auffindung eines dritten derartigen Falles bestätigt.[3])

---

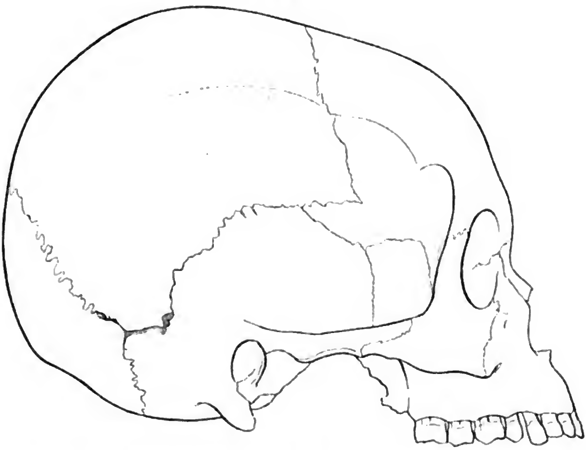
[1]) l. c. S. 45, 46. [2]) l. c. S. 46.

[3]) Ob die der Angabe nach aus Verwachsung von Schläfenschaltknochen mit dem Stirnbein entstandenen „Schläfenfortsätze“ der Strass-

In neuester Zeit hatte ich Gelegenheit, diesen Schläfenfortsatz des Stirnbeins noch mehrfach zu beobachten und zwar an **Schädeln aus dem Bismarckarchipel.** Das Münchener anthropologische Institut bewahrt 6 solcher Schädel, alle vortrefflich erhalten, aber ohne passende Unterkiefer.

Diese Schädel zeigen eine überraschend grosse Anzahl von sonst, wie im Vorstehenden statistisch nachgewiesen, sehr seltenen individuellen Bildungen in der Schläfengegend.[1])

Fig. 1 a.



**Schläfenfortsatz des Stirnbeins.** Schädel aus dem Bismarck-Archipel (rechte Seite).

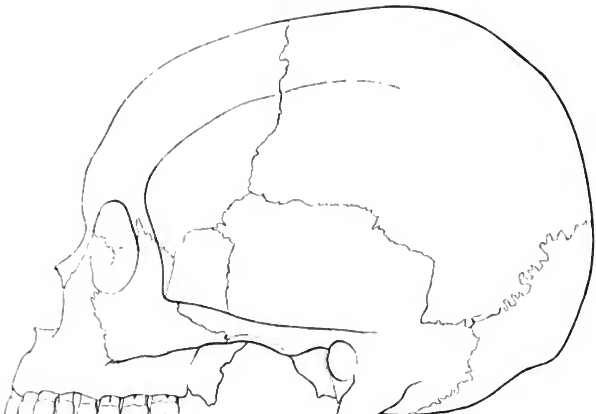
burger Sammlung Arch. f. Anthr. unseren Schläfenfortsätzen entsprechen, wage ich nicht zu entscheiden.

[1]) Ein Schädel aus Neuguinea (Nr. 7 der Sammlung) zeigt dagegen annähernd normale Verhältnisse in der Schläfengegend; die Entfernung der Schläfenschuppe vom Stirnbein beträgt aber rechts nur 3, links 2,5 Millimeter, die beiden Knochen zeigen sonach doch eine beträchtliche Annäherung begründet auf einer Reduction und Schmalheit der Spitze des grossen Keilbeinflügels (s. unten).

Einer dieser 6 Schädel aus dem Bismarckarchipel zeigt links einen zwar rel. kleinen aber vollkommen ausgebildeten Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, rechts erreicht ein kleinerer solcher Fortsatz das Stirnbein nicht vollkommen (Processus frontalis squamae temporalis incompletus). Dieser eine Schädel besitzt sonach rechts noch eine kurze Spheno-Parietalnaht und nähert sich hierin allein normalen Verhältnissen an.

Drei andere dieser Schädel weisen doppelseitige Stirn-

Fig. 1 b.



**Stirnfortsatz der Schläfenschuppe.** Der gleiche Schädel aus dem Bismarck-Archipel (linke Seite).

fortsätze der Schläfenschuppe auf, zum Theil in extremer, ganz an die bei dem Orangutan beobachteten Verhältnisse erinnernder, Ausbildung.

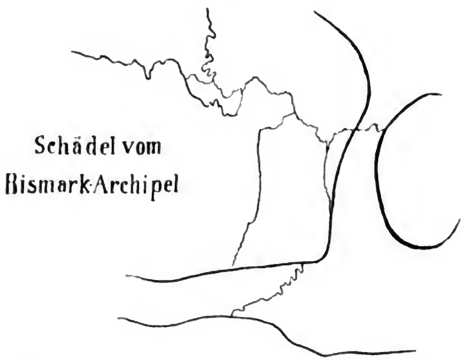
Ein Schädel besitzt doppelseitig grosse **Schläfenfortsätze des Stirnbeins,** Processus temporalis ossis frontis.

Der letzte Schädel dieser Gruppe zeigt links einen mächtig ausgebildeten Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, (Fig. 1 b). rechts einen rel. kolossalen **Schläfenfortsatz des Stirnbeins**(Fig. 1 a).

Dieses gleichzeitige vicarirende Vorkommen von Stirnfortsatz der Schläfenschuppe und Schläfenfortsatz des Stirnbeins weist darauf hin, dass beide Bildungen als nächst verwandt betrachtet werden müssen.

Aber das ist gewiss, dass bei den eben beschriebenen Schädeln aus dem Bismarckarchipel, ebenso wie bei den Schädeln der Primaten, Nichts dafür spricht, dass hier einseitige Verwachsungen einmal gebildeter atypischer temporaler Schaltknochen, das eine Mal mit der Schläfenbeinschuppe, das andere Mal mit dem unteren Winkel des Stirnbeins, stattgefunden habe. Die Nähte in der Nachbarschaft sind offen, eine senile Verwachsung ausgeschlossen. Die 6 Schädel bringen aber auch noch einen positiven Beweis dafür, dass temporale Schaltknochen und die beiden besprochenen Fortsätze prinzipiell auseinander gehalten werden müssen:

Fig. 2 a.




einer der Schädel zeigt hinter einem breiten stark in das Stirnbein einspringenden Stirnfortsatz der Schläfenschuppe noch einen länglichen Schaltknochen zwischen Stirnbein, Scheitelbein und Schuppe des Schläfenbeins, welcher die Fontanelle ganz ausfüllt (Fig. 2 a), also einen wahren Schläfen-

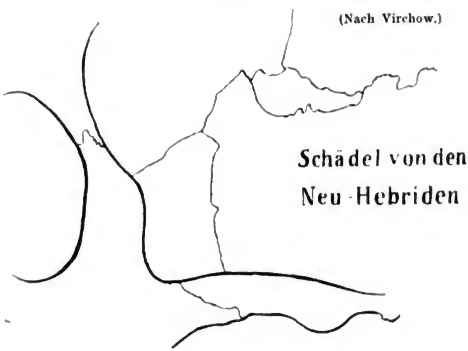
fontanellknochen mit allseitig offenen Nähten, welcher die Schläfenfontanelle ganz erfüllt. Auch Herr R. Virchow hat einen grossen, die Fontanelle ganz ausfüllenden Schläfenfontanellknochen neben einem Stirnfortsatz (Fig. 2b) beobachtet.[1])

Hiedurch erscheint der direkte Beweis erbracht, dass, da beide gleichzeitig an derselben Schläfe auftreten können, Schläfenfontanellknochen und Stirnfortsatz der Schläfenschuppe, und sein Widerspiel: der Schläfenfortsatz des Stirnbeins, nicht im Prinzip dasselbe sein können.

Thatsächlich ist der bei dem Menschen so häufig auftretende temporale Schaltknochen, in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle, eine atypische, der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe und der Schläfenfortsatz des Stirnbeins dagegen eine typische Bildung am Schädel. Das gilt nicht nur

Fig. 2 b.

(Nach Virchow.)




für die Schädel der Affen und die oben genannten niederen Säugethiere, sondern auch für den Menschen. Der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe des Menschenschädels ist in allen

[1]) Zeitschr. f. Ethnologie, 1884, Bd. XVI. S. (157) Figur 1.

Beziehungen vollkommen entsprechend gebildet wie der des Orangutan und der übrigen anthropoiden Affen, sodass für den Menschen keine andere Entstehungsgeschichte desselben angenommen werden darf als für jene.

Graf Spee sagt in seinem ausgezeichneten Werke über den Schädel S. 160[1]) (Varietäten): „Vom vorderen Schuppenrande aus schiebt sich zuweilen ein Knochenfortsatz (Processus frontalis squamae [Gruber]) zwischen Parietale und Ala temporalis des Keilbeins durch bis zum Stirnbein vor. Derselbe findet sich bei manchen Säugethieren, Nagern, anthropoiden Affen, typisch. Beim Menschen entsteht er dadurch, dass ein Schaltknochen der vorderen Seitenfontanelle mit dem Schuppentheil allein verwächst, anstatt den vorderen unteren Winkel des Os parietale zu bilden.“[2])

Aus dieser Darstellung ergibt sich, dass Graf Spee den Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bei den Affen u. a. für eine typische, bei dem Menschen dagegen für eine atypische d. h. pathologische Bildung hält, welche jene typische Affenbildung imitirt.

Eine verschiedene Erklärung der Entstehung dieser ganz gleichartigen Bildungen bei dem Menschen und den Anthropoiden und anderen Säugethieren erscheint mir aber, wie gesagt, unzulässig. Der Versuch einer Trennung zwischen einem typischen Stirnfortsatz der Schläfenschuppe der Affen und einem atypischen solchen Fortsatz beim Menschen wird lediglich durch die für den Menschen adaptirte hypothetische Erklärung der Entstehung des Stirnfortsatzes der Schläfenschuppe, durch einseitige Verwachsung eines atypischen Fontanellknochens mit der letzteren, nahe gelegt. Das ist sicher, dass diese Erklärungshypothese augenscheinlich für die Affen und die anderen Säugethiere, welche Processus frontalis squamae besitzen, nicht passt. Für den Menschen bietet die geläufige Erklärung der Entstehung des Stirnfortsatzes doch nur dadurch eine grössere Wahrscheinlichkeit, weil in der menschlichen

[1]) l. c. — vergl. auch l. c. S. 326.

[2]) cf. auch oben S. 244, W. Krause.

Schläfenfontanelle in so beträchtlicher Anzahl und in so wechselnden Formen Schaltknochen vorkommen. Je häufiger solche sind, desto leichter könnte ja, so hat man geschlossen, eine zufällige einseitige Verwachsung mit der Schuppe des Schläfenbeins eintreten.

Aber bei den Affen gehören Fontanellknochen in der Schläfenfontanelle zu den allerseltensten Vorkommnissen und sind speziell weit seltener als die Stirnfortsätze der Schläfenschuppe.

Unter den Orangutanschädeln der Selenka'schen Sammlung, welche eine Prüfung dieser Verhältnisse zuliessen, zählte ich:

1. Unter 226 Orangutan-Schädeln:

| | |
|---|---|
| Schädel mit Processus frontalis squamae | 76 = 100 |
| Schädel mit temporalen Fontanellknochen | 3 = 4 % |

Ganz anders zeigen sich die entsprechenden Verhältnisse an Menschenschädeln. Ich zählte

2. Unter 2421 Menschen-Schädeln,
(Schädel der altbayerischen Landbevölkerung):

| | |
|---|---|
| Schädel mit Processus frontalis squamae | 43 = 100 |
| Schädel mit temporalen Fontanellknochen | 251 = 581 % |

Von diesen 251 Menschenschädeln mit temporalen Fontanellknochen zeigten 123 auf einer oder auf beiden Seiten vollkommen trennende, die Ala magna von der Berührung mit dem Seitenwandbein abschneidende Schaltknochen; fast gleich viele, nämlich 128, hatten unvollständig trennende Schaltknochen d. h. solche, welche entweder das Stirnbein nicht erreichen (Os epiptericum posterius) oder die Schuppe nicht erreichen (Os epiptericum anterius). Beide Formen sind als, dann gemeinschaftlich vollkommen trennende, Fontanellknochen, nicht selten gleichzeitig vorhanden; der sonst einheitliche Fontanellknochen erscheint in solchen Fällen durch eine Mittelnaht in einen vorderen und einen hinteren Abschnitt getrennt.

Ganz ähnlich wie bei Europäern ist das Verhältniss der Schläfenfontanellknochen bei anderen Menschenrassen, auch bei den Australiern, (s. R. Virchow l. c.).

Von den 3 Orangutan-Schädeln, an welchen ich temporale Fontanellknochen fand, zeigt einer beiderseits vollkommen trennende Schaltknochen (Nr. 129 ♂). Der zweite (Nr. 231 ♀) hat rechts normale Schläfen, links wird das Seitenwandbein von der Ala magna durch zwei Schaltknochen vollkommen abgetrennt, durch ein kleineres Os epiptericum anterius und ein grösseres Os epiptericum posterius. Bei dem dritten Schädel (Nr. 287 ♂) finden sich links und rechts Stirnfortsätze der Schläfenschuppe, rechts neben einem solchen Stirnfortsatz noch ein Schläfenfontanellknochen.

Nach diesen Erfahrungen kann an die Hyrtl'sche Hypothese für die Erklärung der Entstehung der Stirnfortsätze der Schläfenschuppe für die Affen, speziell für Orangutan, der sich ja sonst in den fraglichen Beziehungen relativ menschenähnlich verhält, nicht mehr gedacht werden, da ja der Schläfenfontanellknochen bei ihnen eine weit seltenere Erscheinung ist als der Stirnfortsatz.

Noch weniger möglich ist das für die übrigen oben genannten Säugethiere, bei welchen der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe als eine regelmässig auftretende Baueinrichtung des Schädels erscheint. Bei den betreffenden Thieren waren an normalen Schädeln, so viel mir bekannt, bis jetzt überhaupt Fontanellknochen der Schläfenfontanelle noch niemals beobachtet worden.

In neuester Zeit habe ich jedoch einen hierher gehörenden Fall thatsächlich gesehen. Bei dem Schädel eines Sciurus caucasicus, bei welchem einseitig ein wohlbegrenzter, annähernd viereckiger Stirnfortsatz der Schläfenschuppe bestand, zeigte sich auf der anderen Schädelseite anscheinend die gleiche Bildung, jedoch war der „Stirnfortsatz" an seiner Grenze gegen die Schläfenschuppe durch eine Naht vollkommen abgetrennt. Dadurch entsteht „eine Art von Fontanellknochen", welcher in diesem Fall zweifelsohne für den Stirnfortsatz vicarirt.

Derartige Beobachtungen, welche auch an Menschenschädeln gelegentlich entgegentreten, mahnen an den Satz des Herrn Virchow, welchen er als Schlussergebniss seiner bezüglichen Untersuchung formulirte:[1])

Die temporalen Schaltknochen sind verwandte, aber nicht gleichartige Bildungen, wie der Stirnfortsatz.“

Unsere neuen Beobachtungen gestatten es, diesen Satz nun näher zu begründen und das verwandtschaftliche Verhältniss zwischen den beiden Bildungen darzulegen.

Die Bildungen, welche uns als Fontanellknochen der Schläfenfontanelle entgegentreten, haben eine verschiedene Entstehung und für den typischen Schädelbau verschiedenen Werth. Es werden unter den gemeinsamen Namen prinzipiell verschiedene Gebilde zusammengefasst. Die einen Schaltknochen der Schläfenfontanelle sind pathologische, atypische Verknöcherungen, die anderen sind **Individualisirungen typischer**, regelmässig entwickelungsgeschichtlich gesondert angelegter, aber normal mit Nachbarknochen zu einem Knochen-Complex verschmolzener **Elementar-Knochen.**

Bisher wurden gewöhnlich nur die ersteren atypischen Formen beachtet. So sagt z. B. Herr Virchow:[2]) „es ist nicht zu übersehen, dass die Fontanellknochen relativ späte Bildungen sind. Wir nennen Fontanellen die zur Zeit der Geburt noch offenen (oder genauer, häutigen) Stellen am Schädel, und wir denken uns daher unter dem Namen von Fontanellknochen solche knöcherne Gebilde, welche in der Regel erst nach der Geburt in diesen offenen Stellen entstehen.“ Diese hier von Herrn Virchow genauer beschriebenen „Fontanellknochen“ sind solche, welche soeben als atypische, pathologische Bildungen in der Schläfenfontanelle bezeichnet worden sind.

Von diesen müssen, wie oben angedeutet, jene viel selte-

---

[1]) l. c. S. 59.

[2]) l. c. S. 47.

neren, aber auch in der Schläfengegend gelegene, Schaltknochen getrennt werden, welche aus typischen Verknöcherungspunkten des Schädels sich entwickeln, und welche gewöhnlich schon in sehr früher Zeit, meist schon vor dem vierten Fötalmonat, mit grösseren Nachbarknochen verschmelzen. In manchen Fällen tritt jedoch diese normale Verschmelzung mit dem betreffenden Hauptknochen nicht ein, sodass aus solchen typischen Knochenpunkten individualisirte Knochen entstehen, ebenfalls ringsum durch Nähte von den Nachbarknochen getrennt.

Die in der Schläfenfontanelle zusammenstossenden Knochen zeigen an der Grenze der Fontanelle zwei solche typische, normal mit grösseren Nachbarknochen verschmelzende, Verknöcherungscentren, von welchen der eine schon seit längerer Zeit bekannt und näher beschrieben ist.

Das Stirnbein hat in der Schläfengegend je ein solches besonderes Ossifikations-Centrum, welches gesondert von den übrigen Theilen dieses grossen Knochens entsteht. Herr Virchow hat[1]) auf diesen unteren Knochenkern des Stirnbeins hingewiesen. Derselbe wurde zuerst von Serres, dann genauer von den Herren Rambaud und Renault sowie von Herrn von Ihering[2]) beschrieben und als Apophysis orbitaria externa, als Postfrontale oder Frontale posterius bezeichnet. Dieser Knochentheil liegt dicht an und vor der Schläfenfontanelle, nach rückwärts von dem Processus zygomaticus des Stirnbeins und obwohl seine Verschmelzung mit dem Mittelstück des Stirnbeins schon sehr früh beginnt, und im dritten oder vierten Monat des Fötallebens grossentheils vollzogen ist, so finden sich Spuren seiner Trennung doch nicht ganz selten noch bei Neugeborenen. Herr R. Virchow bildet einen sehr characteristischen Fall der Art in der oft genannten Abhandlung ab,[3]) bei welchem sich der betreffende sonst mit dem Stirnbein verschmelzende Elementarknochen vollkommen individualisirt, rings durch Nähte getrennt, zeigt.

---

1) l. c. S. 42 f.

2) Reichert und du Bois-Reymont, Archiv f. Anatomie 1872. S. 649.

3) l. c. S. 43; Tafel III. Fig. 6.

An Schädeln aus dem dritten und dem Anfang des vierten Embryonalmonats ist die Trennung noch eine vollkommene und ich habe dieselbe mehrfach constatirt.

Eine vollkommene Trennung bei älteren Schädeln habe ich aber bisher noch nicht gesehen. Im Uebrigen kann ich jedoch die Angaben des Herrn von Ihering und R. Virchow bestätigen. Unter 162 Schädeln von menschlichen Embryonen und Neugeborenen, vom dritten Embryonal-Monat durch alle Monate bis zur normalen Geburt, welche ich auf dieses Verhältniss geprüft habe, vermisste ich nur an sieben (jüngeren) Schädeln deutlichere Spuren der Abtrennung der Apophysis orbitaria externa (Postfrontale), bei allen übrigen waren diese Spuren unverkennbar und drei Schädel aus dem 9. und 10. Monat zeigten die von von Ihering beschriebenen offenen Nahtreste annähernd senkrecht auf den unteren Verlauf der Kranznaht in das Stirnbein gegen die Augenhöhle zu einspringend.[1]

Dieses untere hintere selbständige Verknöcherungs-Centrum des Stirnbeins kann, da es jederseits im Stirnbein selbst, nicht in der Fontanelle, liegt, zur Entstehung eines Stirnfortsatzes des Schläfenbeins oder eines Schläfenfortsatzes des Stirnbeins keine Veranlassung geben, ein Verhältniss, welches die beigegebenen Abbildungen (Fig. 4—12) direkt deutlich machen.

Ein ähnlicher typischer Knochenkern findet sich an dem Schläfenfontanellrand der Schuppe des Schläfenbeins nicht.

Dagegen haben es schon ältere Beobachtungen, vor allem die Hannover's,[2]) wahrscheinlich gemacht, dass der grosse Keilbeinflügel ein oberes Ergänzungsstück besitzt, welches als Deckknochen, Hautknochen, entsteht, während sich bekanntlich der grosse Keilbeinflügel seiner Hauptausdehnung nach aus knorpeliger Anlage als Primordialknochen entwickelt.

---

[1]) S. die folgenden Abbildungen von Schädeln von Neugeborenen und Embryonen Fig. 5—12, bei letzterer offner Nathrest.

[2]) Primordialbrusken og dens forbening, Det kgl danske vidensk. selskab Skrifter. Naturw. mathem. Afdel. 11. Band. Kopenhagen. 1888. citirt nach Graf Spee l. c.

Meine Beobachtungen erheben diese Vermuthung[1]) zur Gewissheit: wir haben ein Hauptknochen-Ergänzungsstück an dem oberen Ende der Ala magna von dem durch primordiale Verknöcherung entstandenen Haupttheile zu unterscheiden.

Dieses Hautknochen-Ergänzungsstück der Ala magna, welches man nicht, wie vielfach geschehen, mit den atypischen Formen der Schläfenfontanellknochen verwechseln und zusammen werfen darf, hat genetisch als Deckknochen mit der, dem knorpelig vorgebildeten Schädelskelet als Primordialknochen zugehörenden, Ala magna nichts zu thun. Die Ala magna zeigt sich, wie das Hinterhauptsbein und das Schläfenbein, als ein Complex principiell differenter Skelettheile, welche sich auf verschiedene Weise und sonach anfänglich gesondert bilden.

Eine ganz ähnliche Bildung, wie das Deckknochen-Ergänzungsstück der Ala magna ist bekanntlich das Interparietale der Säuger. Das Interparietale erscheint als Hautknochen-Ergänzungsstück des Occipitale posterius, welche zusammen beim Menschen die Schuppe des Hinterhauptsbeines bilden.

Hier sind auch die Schicksale, welche diese beiden zu einem Knochenkomplex verschmolzenen differenten Elementarbestandtheile des Skelets erfahren können, festgestellt. Es ist bekannt, dass sie im Ganzen vollkommen oder theilweise von einander getrennt bleiben können, sodass eine, beide Elementarknochen — das Interparietale und das Occipitale superius — trennende Quernaht, die fötale Hinterhauptsquernaht, (Sutura occipitalis transversa fötalis R. Virchow) während des erwachsenen Lebens persistirt. Besonders bemerkenswerth erscheint es aber, dass sich das Interparietale, welches als Hautknochen-Ergänzungsstück des Occipitale superius beim Menschen und den meisten Säugethieren, wenn es nicht dauernd individualisirt bleibt, mit dem Oberrand des Occipitale superius

[1]) Graf Spee, l. c. S. 142, citirt nach Hannover (s. S. 141): „Von der Ala magna (Alisphenoid) werden wahrscheinlich auch die oberen Theile des Randes zwischen Frontale, Parietale und Squama als Deckknochen ausgebildet". S. auch l. c. S. 282 und S. 326.

verwächst und mit seinen Aussenrändern den Haupttheil der Lambdanaht bildet, bei einer ganzen Anzahl von Säugethieren nicht mit dem letzteren Knochen sondern mit den Parietalia verbindet. Es bleibt dann die fötale Naht zwischen Interparietale und Occipitale superius dauernd offen, während die Grenznaht (Lambda-Naht) zwischen dem Interparietale und den Parietalia (resp. dem vereinigten Parietale) so vollkommen verschwinden, dass bei Erwachsenen keine Spur mehr auf die ehemalige Trennung hindeutet. Sehr charakteristisch zeigt sich dieses Verhältniss an Hirsch-Schädeln. Bei solchen zeigen auch noch ältere Embryonen und ganz junge Thiere das Interparietale, ähnlich in der Form wie das des Menschen, rings von Nähten gegen die Nachbarknochen abgegrenzt. Bei etwas älteren Schädeln sind die oberen Grenznähte gegen das Parietale verstrichen und eine gerade quere Grenznaht (die fötale Hinterhauptsquernaht) scheidet scheinbar die Parietalia, in Wahrheit das Interparietale, vom Hinterhauptsbein.

Nach den Angaben der vergleichenden Anatomie[1]) findet sich die Verwachsung des Interparietale mit den Parietalia bei Nagern und Wiederkäuern. Es ist leicht diese Beobachtungen zu bestätigen, ich möchte aber daran erinnern, dass, wie mehrfach schon constatirt, bei manchen Nagern, auch an Schädeln von erwachsenen Thieren, das Interparietale unverbunden, frei, durch Nähte vollkommen getrennt, zwischen den Parietalia und dem Occipitale superius zu liegen pflegt. Es gilt das z. B. für Castor fiber, bei welchem mir drei Schädel ein freies, individualisirtes Interparietale zeigten. Gelegentlich scheint bei derselben Säuger-Gruppe doch auch eine Verwachsung des Interparietale mit dem Occipitale superius vorzukommen, wie es, wie gesagt, für den Menschen und die Mehrzahl der Säuger typisch ist.

Nach meinen Beobachtungen kann das Hautknochen-Ergänzungsstück der Ala magna in Bezieh-

[1]) C. Gegenbauer, Grundriss der vergleichenden Anatomie. II. Aufl. 1878. S. 488, 489.

ung auf seine Verbindung mit Nachbarknochen ganz ähnliche Schicksale, wie das Hautknochen-Ergänzungsstück des Occipitale superius, das Interparietale, erfahren.

Es ist doch wohl zweckmässig, das Hautknochen-Ergänzungsstück der Ala magna — entsprechend der Benennung des Interparietale — auch mit einem eigenen Namen zu bezeichnen, da die Bezeichnungen: Fontanellknochen der Schläfenfontanelle, temporaler Schaltknochen, Os epiptericum schon für die atypischen Formen festgelegt sind. Ich schlage für den neu gefundenen typischen Elementarknochen den indifferenten Namen Os Intertemporale oder Intertemporale vor. Diese Bezeichnung hat einerseits den Vortheil, über den vergleichend-anatomischen Werth, dieses elementaren Hautknochengebildes Nichts zu präjudiciren, anderseits erinnert sie an den Namen des, wie gesagt, nächst verwandten Hautknochens, das Interparietale.

Das Intertemporale verbindet sich beim Menschen in der weit überwiegenden Mehrzahl der Fälle so vollkommen mit dem oberen Ende der Ala magna, deren obere Partie es dann bildet, dass kein Rest einer Trennungsnaht beobachtet werden kann.

Bei voller Ausbildung erscheint dann der obere Theil der Ala magna im Ganzen und namentlich nach hinten gegen die Schläfenschuppe verbreitert, woraus die bekannte Flügelform beim Menschenschädel entsteht. Die ganze Ala magna ist dabei auch relativ lang und überhaupt wohl ausgebildet. (Fig. 3.)

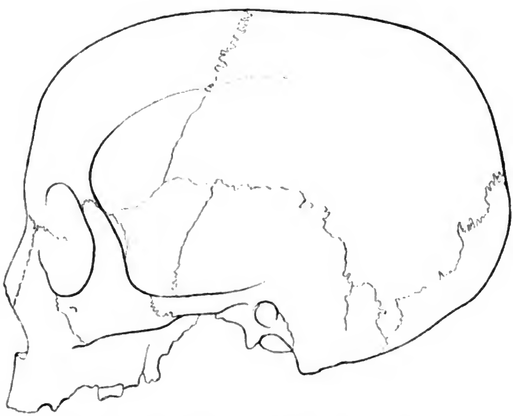
Ebenso wie das Interparietale vollkommen individualisirt und durch Grenznähte gegen die Nachbarknochen abgegliedert sein kann, so kann sich auch das Intertemporale durch eine vollkommen trennende Quernaht von der übrigen Ala magna abgliedern. Ein solcher Fall ist der oben an einem Schädel von Sciurus caucasicas beschriebene scheinbare Schläfenfontanellknochen, welcher für einen Stirnfortsatz der anderen Schädelseite vikarirt.

An Menschen-Schädeln ist entwickelungsgeschichtlich das

Verhalten der beiden betreffenden Abschnitte des grossen Keilbeinflügels: das aus primordialer Verknöcherung hervorgehende Hauptstück zu dem Hautknochen-Ergänzungsstück, Intertemporale, nicht schwer zu konstatiren. Ich habe 200 Embryonen-Schädel, vom 3. Monat bis zum Geburtsalter, darauf untersucht.

An macerirten Schädeln von Embryonen aus dem vierten Monat sitzt das Hautknochenergänzungsstück auf der schmalen,

Fig. 3.

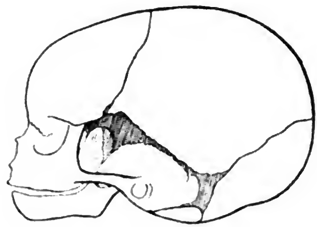


Gut ausgebildete Schläfengegend bei einem Neger-Schädel (Pare).

nach oben sich zuspitzenden, durch primäre Knorpelverknöcherung entstandenen Ala magna wie eine Haube schief auf, wobei sich das lockere Gefüge der Hautverknöcherung, wie das gelegentlich auch noch bei älteren Früchten (Fig. 4) zu sehen ist, scharf von dem dichteren Gefüge der eigentlichen Ala magna unterscheidet. In der Richtung gegen die Schläfenbeinschuppe ist die Hautverknöcherung etwas breiter und greift tiefer nach abwärts. So innig in dieser Periode beide Bestandtheile der

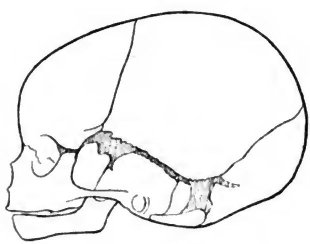
Ala magna schon verschmolzen zu sein pflegen, so findet man doch Fälle, wie der in Fig. 4 abgebildete, welche die Trennung nach erkennen lassen, die beiden Abschnitte greifen in einer feinen Zackenlinie in einander ein.

Fig. 4.



Reste und Spuren einer Trennungsnaht sind bei jüngeren und älteren Embryonen häufig genug, die nebenstehenden Abbildungen (Fig. 5 – 8) geben einige Beispiele. Der Oberrand der Ala magna erscheint manchmal zweilappig, durch einen seichten Einschnitt getrennt. Fig. 5.

Fig. 5.



In anderen Fällen geht eine tiefe Spalte, manchmal fast senkrecht, in dem grossen Keilbeinflügel vom Oberrand aus nach abwärts Fig. 6 und 7.

Besonders charakteristisch sind aber solche Bildungen, in welchen eine Naht schief von oben und vorn nach hinten und

Fig. 6.

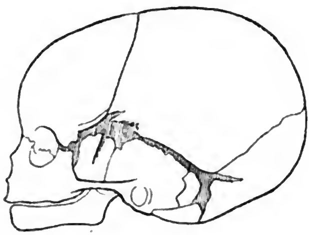
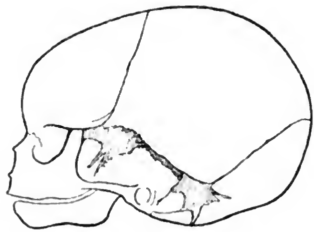
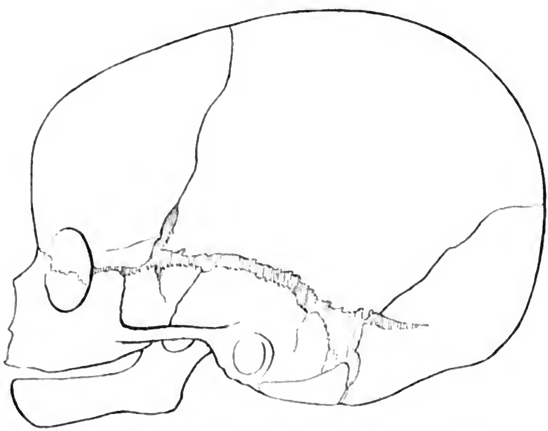


Fig. 7.



unten einspringt und die hintere obere Ecke des Keilbeinflügels mehr oder weniger weit abtrennt wie in Fig. 8.

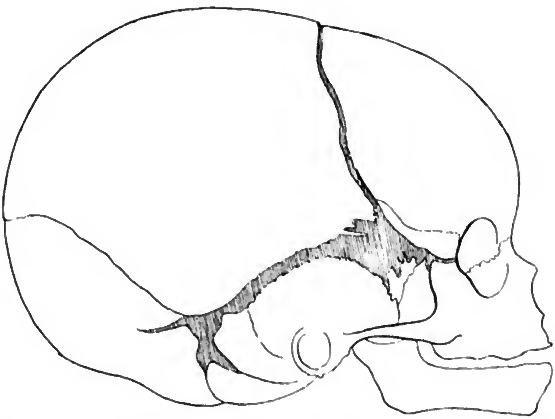
Fig. 8.



In zwei Fällen ist es mir gelungen, an menschlichen Embryonen-Schädeln aus dem 10. Monate eine vollkommene Ab-

trennung der hinteren oberen Spitze der Ala magna resp. des Intertemporale zu constatiren, sodass hier das Intertemporale vollkommen individualisirt erscheint, ganz entsprechend der bekannten Individualisirung des Interparietale. Die von der Ala magna abgetrennten Stücke sind an den menschlichen Embryonen-Schädeln verschieden gross. Bei dem einen Schädel, bei welchem beiderseitig das Intertemporale selbständig besteht (Fig. 9 und Fig. 10), zeigen sich rechts und links be-

Fig. 9.

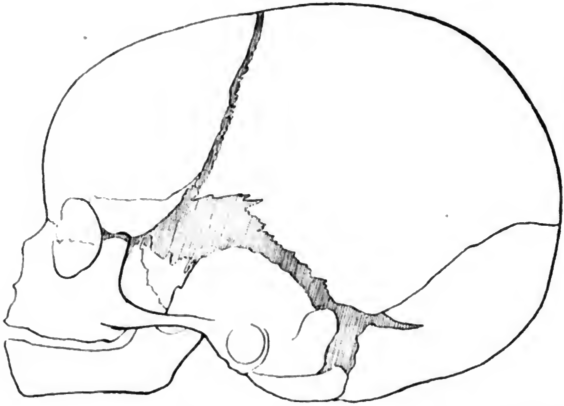


trächtliche Grössenunterschiede desselben: rechts grösste Länge 9—11 mm, grösste Breite 8—9 mm. An dem zweiten Schädel (Fig. 11) findet sich die Abtrennung des Intertemporale nur einseitig (rechts) und im Ganzen etwas kleiner, die Masse sind grösste Länge: 9 mm, grösste Breite: 7 mm.

Wenn ich nicht irre, kann auch durch eine annähernd quer verlaufende Naht der obere Abschnitt der Ala magna, das Intertemporale, von dem unteren Abschnitt abgetrennt werden. In einem derartigen Fall mass das in der rechten

Schläfe abgetrennte Stück 12 mm in der Länge und an der Ala magna 5 mm in der Breite, und war annähernd viereckig gestaltet;[1]) an einem zweiten Schädel war das durch eine Quernaht abgetrennte Stück, durch senkrechte Nähte in der einen Schläfe, in zwei, in der anderen in drei Theilstücke zerfallen. Auch eine für die Ränder der Hautknochen in früheren Perioden so charakteristische Auffaserung des Intertemporale kann sich erhalten. (Fig. 12.)

Fig. 10.



Diese in der Gegend der Schläfenfontanelle liegenden, letztere aber in Wahrheit begrenzenden und ihr daher niemals eigentlich angehörenden, typischen Bildungen des Intertemporale sind bisher im Allgemeinen mit den atypischen Fontanellknochen der Schläfenfontanelle zu-

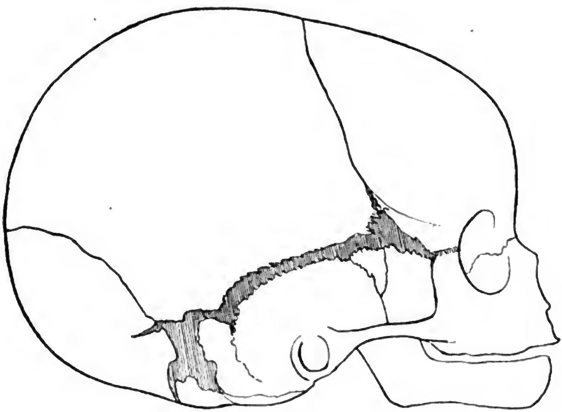
---

[1]) Die Ala magna ist auf der rechten Seite um 5 mm verkürzt im Verhältniss zur linken Seite, an der sich keine Abspaltung findet. S. unten.

sammengeworfen, ihr prinzipieller Unterschied wenigstens nicht genügend hervorgehoben worden. Sie sind aber, was sich schon aus der oben gegebenen Beschreibung der atypischen Fontanellknochen ergibt, meist sicher von letzteren zu trennen.

Die atypischen Fontanellknochen, indem sie sich als neue Formelemente zwischen die vier in der Gegend der Schläfenfontanelle zusammenstossenden Knochen: Stirnbein, Scheitelbein, Schläfenbein und grossen Keilbeinflügel, hinein-

Fig. 11.



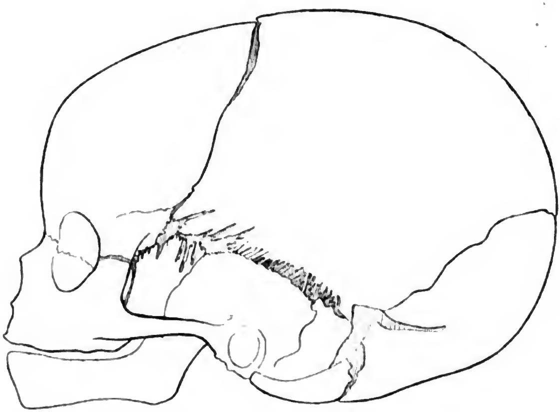
legen, beeinträchtigen die volle Ausbreitung aller vier Knochen. Diese Beeinträchtigung ist jedoch, da sie sich, wie gesagt, auf alle Nachbarknochen in ziemlich gleicher Weise bezieht, im Allgemeinen meist eine unbedeutende.

Ganz anders ist das Verhältniss bei dem Intertemporale. Das individualisirte Intertemporale, der Zwischenschläfenknochen, ist gleichsam von dem grossen Keilbeinflügel oben weggeschnitten, nur letzterer wird daher in seiner Ausbildung

beeinträchtigt: er wird um das abgetrennte individualisirte oder mit anderen Nachbarknochen verschmolzene Ergänzungsstück verkürzt.

Für den Nachweis dieser Verkürzung bieten die Orangutan-Schädel der Selenka'schen Sammlung ein vortreffliches Material. Unter ihnen findet sich, wie oben gesagt, eine nicht unbeträchtliche Anzahl solcher, welche nur auf der einen Schädelhälfte einen Stirnfortsatz besitzen, während die andere Schläfe davon frei ist. Bei solchen Schädeln mit ein-

Fig. 12.



seitigem Stirnfortsatz kann man sonach an demselben Individuum die verschiedene Höhe der Ala magna mit und ohne Stirnfortsatz der Schläfenschuppe messen.

In der folgenden Tabelle habe ich die Messungs-Ergebnisse an zehn solcher Schädel zusammengestellt.

**Tabelle**

über die Höhe der Ala magna bei 10 Orangutanschädeln mit einseitigem Stirnfortsatz der Schläfenschuppe.

| Bezeichnung der Schädel: | Höhe der Ala magna in den Schläfen mit Stirnfortsatz: | ohne Stirnfortsatz: | Differenz: |
|---|---|---|---|
| 1. Nr. 83 ♀ | 23 mm | 28 mm | + 5 mm |
| 2. „ 207 ♂ | 22 „ | 28 „ | + 6 „ |
| 3. „ 119 ♀ | 20 „ | 23 „ | + 3 „ |
| 4. „ 109 ♀ | 22 „ | 31 „ | + 9 „ |
| 5. „ 115 ♀ | 20 „ | 30 „ | + 10 „ |
| 6. „ 140 ♀ | 22 „ | 25 „ | + 3 „ |
| 7. „ 40 ♂ | 21 „ | 31 „ | + 10 „ |
| 8. „ 247 ♀ | 22 „ | 26 „ | + 4 „ |
| 9. „ 200 ♂ | 26 „ | 33 „ | + 7 „ |
| 10. „ 179 ♂ | 23 „ | 33 „ | + 10 „ |
| 10 Schädel | 22,1 mm : | 28,8 mm | = + 6,7 mm. |

Die Ala magna ist danach im Durchschnitt um $^1/_4$ verkürzt auf der Seite des Stirnfortsatzes.

Da das Intertemporale die obere flügelförmige Verbreiterung der Ala magna bildet, wird durch seine Abgliederung letztere nicht nur verkürzt, sondern auch entsprechend verschmälert. Der obere Rand der Ala magna zeigt sich dann meist nach oben vielfach abgerundet, was an die ursprünglich nach oben sich zuspitzende oder wenigstens verschmälernde Form der primordialen Knochenanlage der Ala magna erinnert.

Speziell soll noch einmal direkt darauf hingewiesen werden, dass das Intertemporale, wie das Interparietale und manche andere typische Elementar-Bestandtheile des Hirnschädels, soweit sie normal zu Knochencomplexen verschmelzen, diese Verschmelzung schon sehr bald, beim Menschen meist schon vor dem 4. Embryonalmonat, erfahren. Im Gegensatz gegen das Verhalten dieser typischen Elementarknochen verwachsen die atypischen Fontanellknochen, welche überhaupt vielfach weit später als erstere entstehen, meist erst im späteren, senilen Lebensalter mit den Nachbarknochen.

K. von Bardeleben[1]) hat das Epiptericum als „Postfrontale“ bezeichnet. Abgesehen davon, dass eine solche Bezeichnung nicht für die grosse Mehrzahl der atypischen Fontanellknochen der Schläfe, sondern nur für das Intertemporale in Frage kommen könnte, so ist für die menschliche Anatomie die Bezeichnung „Postfrontale“ schon für das oben Beschriebene Apophysis orbitaria externa durch von Ihering[2]) belegt. Die vergleichend-anatomische Würdigung der betreffenden Elementarknochen des Menschenschädels kann nur im Zusammenhang der Betrachtung aller entsprechenden Bildungen erfolgen.

## Resultate.

Wie das Interparietale, welches beim Menschen und der Mehrzahl aller Säuger gesetzmässig mit dem Oberrand des Occipitale verschmilzt, doch bei einigen Säugergruppen (Nagethiere und Wiederkäuer) sich nicht mit dem Occipitale superius sondern mit den Parietalia zu einem, für diese Thiere auch typischen und gesetzmässigen Knochen-Komplex verbindet, so kann sich auch das Intertemporale, anstatt mit dem oberen Theil der Ala magna, mit einem der anderen Nachbarknochen zu einem Knochenkomplex vereinigen.

Bei dem Menschen findet eine solche Vereinigung in seltenen Fällen

1. mit dem vorderen oberen Rand der Schläfenschuppe statt: daraus entsteht der

Stirnfortsatz der Schläfenschuppe,

der Processus frontalis squamae temporis.

2. mit dem unteren hinteren Winkel des Stirnbeins, daraus entsteht der von mir entdeckte

Schläfenfortsatz des Stirnbeins,

der Processus temporalis ossis frontis.

---

[1]) K. von Bardeleben, Anatomischer Anzeiger. Bd. XII. 1896. Ergänz.-Heft S. 153—154.

[2]) v. Ihering l. c. und oben S. 255.

3. Eine Verwachsung des Intertemporale mit dem vorderen unteren Winkel des Scheitelbeins habe ich beim Menschen bisher noch nicht sicher nachweisen können.

4. Ganz ähnlich wie bei dem Menschen sind die typischen Verwachsungsverhältnisse des Intertemporale bei der Mehrzahl der Affen.

Auch bei diesen, so namentlich bei Orangutan und Hylobates, ist die Verschmelzung des Intertemporale mit dem oberen Ende der Ala magna das Gewöhnliche.

Daneben findet sich aber gelegentlich bei diesen Menschenaffen, und zwar bei Hylobates kaum häufiger als bei dem Menschen, auch eine Verschmelzung des Intertemporale mit der Schläfenschuppe zu einem Stirnfortsatz.

Ein Schläfenfortsatz des Stirnbeins ist bei den Affen bisher noch nicht beschrieben.

Dagegen fand ich mehrfach an Orangutanschädeln eine doppelte Verschmelzung des Intertemporale, unten mit der Ala magna, oben mit dem vorderen unteren Winkel des Scheitelbeins, sodass eine zusammenhängende Knochenbrücke zwischen Stirnbein und Schläfenschuppe gebildet wird.

Bei Gorilla und Schimpanse und jenen oben genannten niedrigeren Säugethieren ist der Stirnfortsatz der Schläfenschuppe das gewöhnliche Vorkommniss. Bei ihnen verschmilzt fast ausnahmslos das Intertemporale nicht mit der Ala magna sondern mit der Schläfenschuppe zur Bildung des Stirnfortsatzes derselben.

Dieses Wechselverhältniss der Verschmelzung mit verschiedenen Nachbarknochen entspricht im Principe jenem oben von dem Interparietale erwähnten.

5. Da das Intertemporale durch Verschmelzung mit der Schläfenschuppe den Stirnfortsatz derselben bildet, so lässt sich bei den Schläfen mit Stirnfortsatz eine entsprechende Verkürzung und Verkümmerung der Ala magna, deren oberes verbreitertes Endstück das Intertemporale sonst bildet, nachweisen.

---

## Beschreibung der Abbildungen im Texte.

Figur 1a und b (S. 246 und 247): Männlicher, jugendlicher Schädel aus dem Bismarckarchipel.

Fig. 1a: Rechte Schläfenansicht.

Fig. 1b: Linke Schläfenansicht.

Figur 1a: Schläfenfortsatz des Stirnbeins. Vom Stirnbein springt unten beinahe senkrecht nach hinten gewendet ein breiter Fortsatz vor und verbindet sich mit dem vorderen oberen Rande der Schläfenschuppe. Die Ala magna ist entsprechend verkürzt und von der Berührung mit dem Scheitelbein vollkommen ausgeschlossen.

Figur 1b: Stirnfortsatz der Schläfenschuppe. Von dem vorderen oberen Rand der Schläfenschuppe springt, ganz dem Schläfenfortsatz des Stirnbeins in Figur 1a entsprechend, ein grosser breiter Stirnfortsatz der Schläfenschuppe gegen das Stirnbein vor. Derselbe schliesst ebenfalls die entsprechend verkürzte Ala magna von der Berührung mit dem Scheitelbein aus.

Figur 2a und b (S. 248 und 249): Die Schläfenansicht zweier Schädel, bei welchen gleichzeitig grosse Stirnfortsätze der Schläfenschuppe und Schläfen-Fontanellknochen vorhanden sind.

Figur 2a: Rechte Schläfenansicht eines Schädels vom Bismarckarchipel. Ein breiter an seiner Basis etwas eingezogener Stirnfortsatz des Schläfenbeins erhebt sich von dem vorderen oberen Rande der Schläfenschuppe und trennt die entsprechend verkürzte Ala magna von der Berührung mit dem Scheitelbein ab. Hinter dem Stirnfortsatz zwischen dem Oberrand der Schläfenschuppe und dem vorderen unteren Winkel des Scheitelbeins zeigt sich ein länglicher unregelmässig gestalteter Schläfen-Fontanellknochen.

Figur 2b: Schläfenansicht eines Schädels von den Neuhebriden nach R. Virchow. Das Verhältniss entspricht ganz dem vorhin (Fig. 2a) beschriebenen.

Figur 3 (S. 259): Linke Schläfenansicht eines Negerschädels (Pare) mit wohlausgebildetem grossen Keilbeinflügel, dessen Oberrand sich breit vorn an den unteren Rand des Scheitelbeins anlegt.

Figur 4–12. Abbildung von Schädeln von Embryonen und Neugeborenen der Münchener Stadtbevölkerung. Fig. 4–7 Schädel aus dem 5. bis 6. Entwickelungsmonat.

Figur 4 (S. 260): An der nach oben sich verschmälernd und abgerundet zugehenden Ala magna erkennt man noch die Trennung der beiden Abschnitte der letzteren, das I n t e r t e m p o r a l e zeigt die Hautknochenstruktur und ist durch eine feine Zackenlinie (Fötalnaht) abgegrenzt.

Figur 5 (S. 260): Der Oberrand der Ala magna zeigt hier wie bei Fig. 6, 7 und 8 Spuren der Abtrennung des Intertemporale. Bei Fig. 4 ist der Oberrand des grossen Keilbeinflügels durch einen seichten Einschnitt gleichsam gelappt.

Figur 6 (S. 261): Die Trennungsspalte (Rest der Fötalnaht) schneidet annähernd senkrecht von oben nach unten in den grossen Keilbeinflügel ein und halbirt denselben nahezu.

Figur 7 (S. 261): Die Verlaufsrichtung der Trennungsspalte (Rest der Fötalnaht) geht schief von hinten nach vorn.

Figur 8 (S. 261): Schädel aus dem 10. Entwickelungsmonat. Die Trennungsspalte (Fötalnaht) schneidet von der Mitte des Oberrandes der Ala magna, schief nach unten und hinten gerichtet, tief ein, das Intertemporale fast vollkommen abtrennend.

Figur 9 und 10 (S. 262 und 263): Rechte und linke Schläfenansicht eines Neugeborenen-Schädels mit doppelseitiger vollkommener Abtrennung und Individualisirung des Intertemporale von der übrigen Ala magna. Die offen gebliebene Fötalnaht schneidet wie bei Fig. 8 nahe dem vorderen Rand der Ala magna in diese schief nach unten und hinten ein. Der Rand des dadurch abgetrennten Intertemporale zeigt noch die charakteristische Auffaserung der Hautknochen, das obere Ende der übrigen Ala magna spitzt sich in der charakteristischen Weise zu, wie es der ursprünglichen embryonalen Form der Ala entspricht. Rechts ist das Intertemporale kleiner als links.

Figur 11 (S. 264): Rechte Schläfenansicht eines Schädels aus dem 10. Entwickelungsmonat mit vollkommen abgetrenntem und individualisirtem Intertemporale, die linke Schläfe zeigt keine Trennungsspuren (Fötalnahtreste) des letzteren. Die offen gebliebene fötale Naht zwischen der übrigen Ala magna und dem Intertemporale schneidet nahezu senkrecht ein, etwa der theilweisen Trennung in Abbildung No. 6 S. 261 entsprechend.

Figur 12 (S. 265): Linke Schläfenansicht eines Schädels aus dem 10. Entwickelungsmonat, welcher das Intertemporale ohne Trennungsspur in der für die Hautknochen charakteristischen Weise gleichsam aufgefasert zeigt, ebenso den unteren Scheitelbein-Rand.

In Fig. 5 bis 12 ist durch eine von dem unteren Ende der Kranznaht in das Stirnbein einschneidende Linie die Trennungsspur des Postfrontale vom Stirnbein angedeutet, s. S. 254 und 255.

# Die Beugungsfigur im Fernrohr weit ausserhalb des Focus.

Von **K. Schwarzschild.**

(*Eingelaufen 11. Juni.*)

(Mit Tafel I.)

§ 1. Die Beugungsfigur einer punktförmigen Lichtquelle im idealen, aplanatischen Fernrohr ist unter Benutzung der Theorie der Bessel'schen Funktionen von H. Struve[1]) und ausführlicher von E. v. Lommel[2]) behandelt worden. Nur in einem Punkte erscheinen diese Untersuchungen noch der Ergänzung fähig. Sie beziehen sich nämlich nur auf Einstellungen in ziemlicher Nähe des Focus. Das Interesse des Gegenstandes für den Mathematiker, wie für den Optiker, und die Rücksicht auf die verschiedenen Anwendungen des Fernrohrs, bei welchen Einstellungen weiter ausserhalb des Focus in Betracht kommen, machen es aber wünschenswert, die Theorie auch für letztere Fälle näher auszuführen. Das ist im Folgenden geschehen. Es zeigt sich, dass die Lichtintensität im Beugungsbilde weiter ausserhalb des Focus einer Darstellung durch semikonvergente Reihen fähig ist, auf deren erste Glieder man sich in Praxis beschränken kann. Der anscheinend so verwickelte Verlauf der Lichtintensität längs jedes Radius des kreisförmigen Beugungsbildes stellt sich dann dar als Uebereinanderlagerung

[1]) Die allgemeine Beugungsfigur im Fernrohr. Mémoires de l'Ac. d. Sc. de St. Pétersbourg. 1886.

[2]) Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens. Abhandlungen der math.-phys. Klasse der bayer. Akad. d. Wissenschaften. 1886.

zweier Wellen, welche angenähert die Form von Sinuskurven, aber verschiedene Wellenlänge und Amplitude haben, über diejenige konstante mittlere Intensität, welche bei geradliniger Fortpflanzung des Lichts auftreten würde.

§ 2. Trifft eine ebene Welle, welche von einem unendlich fernen Punkte in der Axe eines fehlerlosen Objektivs kommt, auf dieses auf und wird von ihm gebrochen, so verwandelt sich die ebene Welle in eine kugelförmige, welche zum Centrum den Brennpunkt des Objektivs hat und unmittelbar hinter dem Objektiv über das ganze durchgetretene Bereich der Wellenfläche hin mit gleicher Amplitude schwingt. Aus dem Huyghens'schen Prinzipe erhält man dann für die Lichtintensität $J$ in irgend einem Punkte $P$ hinter dem Objektiv den Ausdruck:

$$J = S^2 + T^2 \qquad 1)$$

wo $S$ und $T$ definiert sind als reeller und imaginärer Teil des Integrals:

$$W = S + iT = \int d\sigma\, e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}(\Delta + \delta)} \qquad 2)$$

Hierin bezeichnet $d\sigma$ ein Element der Wellenfläche, $\Delta$ die Distanz des Punktes $P$ von diesem Elemente, $\lambda$ die Wellenlänge und $\delta$ eine beliebige reelle Konstante, die aus dem Werte $J$ der Norm von $W$ offenbar herausfällt. Das Integral ist dabei über sämtliche Elemente der Wellenfläche zu erstrecken.

Nun lege man ein rechtwinkliches Coordinatensystem durch den Brennpunkt, dessen x-Axe in die Axe des Objektivs falle. Die Coordinaten des Elementes $d\sigma$ der Wellenfläche seien $\xi$, $\eta$, $\zeta$, die des Punktes $P$ seien $u$, $v$, 0. Wir dürfen die dritte Coordinate des Punktes $P$ null setzen, weil offenbar die ganze Beugungsfigur zur Objektivaxe symmetrisch ist und durch Rotation der in einem Schnitte durch die Axe erhaltenen Figur um die Axe geliefert wird. Es ist dann:

$$\Delta^2 = (\xi - u)^2 + (\eta - v)^2 + \zeta^2$$

Führt man weiter Polarkoordinaten mit dem Brennpunkt als Pol ein durch die Gleichungen:

$$\xi = f \cos\vartheta \qquad \eta = f \sin\vartheta \cos\varphi \qquad \zeta = f \sin\vartheta \sin\varphi$$

wobei $f$ die Brennlänge bezeichnet, so erhält man:

$$\Delta^2 = (f-u)^2 + 4fu\sin^2\frac{\vartheta}{2} + v^2 - 4fv\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos\varphi$$

Setzt man noch:

$$2\sin\frac{\vartheta}{2} = \varrho$$

und entwickelt bis auf Glieder dritter Ordnung in $\varrho$ genau, so folgt[1]):

$$\Delta = f - u + \frac{fu}{2(f-u)}\left\{\varrho^2 - 2\varrho\frac{v}{u}\cos\varphi + \frac{v^2}{uf}\right\} \qquad 3)$$

Das Flächenelement $d\sigma$ hat den Ausdruck:

$$d\sigma = f^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = f^2 \varrho\, d\varrho\, d\varphi \qquad 4)$$

Man nenne nun $\vartheta_1$ den halben Oeffnungswinkel des Objektivs und führe die Abkürzungen ein:

$$2\sin\frac{\vartheta_1}{2} = \varrho_1 \quad r = \frac{\varrho}{\varrho_1} \quad p = \frac{v}{u}\frac{1}{\varrho_1} \quad m = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{fu}{f-u}\varrho_1^2 \qquad 5)$$

Durchläuft man die Wellenfläche von der Axe bis zum Rande, so wächst $r$ von 0 bis 1. Die Grösse $p$ andrerseits ist dem Abstande $v$ des Punktes $P$ von der Axe proportional und wird nahezu 1 in der Grenze des geometrischen Schattens der Kugelwelle. Denn man hat an dieser Grenze offenbar:

$$\frac{v}{u} = \sin\vartheta_1$$

mithin:

$$p = \frac{\sin\vartheta_1}{2\sin\frac{\vartheta_1}{2}}$$

ein Ausdruck, der für kleines $\vartheta_1$, ein Objektiv von mässigem Oeffnungswinkel, nahezu den Wert 1 hat. Die Grösse $m$ ist eine Konstante für konstantes $u$, für jede zur Axe senkrechte

[1]) Darüber, dass die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt werden dürfen, vgl. Kirchhoff, Optik pag. 52 und 86, sowie Strehl, Theorie des Fernrohrs (Leipzig 1894), p. 55.

Ebene, also für jedes einzelne Beugungsbild. Um uns einen Ueberblick über ihre Werte zu verschaffen, wollen wir Licht von der Wellenlänge 0.0005 mm und ein Objektiv von 30 cm Durchmesser und 3 m Brennweite zu Grunde legen. Für eine Verschiebung von $u$ Millimetern aus dem Focus wird dann genähert:

$$m = 31.4\, u$$

Beträgt also $u$ nur wenige Millimeter, so wächst $m$ bereits über 100. Derartig grosse Werte von $m$ werden wir im Folgenden voraussetzen.

Wählt man nun noch für die Konstante $\delta$ den Wert:

$$\delta = u - f + \frac{v^2}{2\,u} \tag{6}$$

und führt die Ausdrücke 3) bis 6) in 2) ein, so erhält man für das auszuführende Integral:

$$W = f^4 \varrho_1^2 \int_0^1 \int_0^{2\pi} e^{-\frac{im}{2}(r^2 - 2pr\cos\varphi + p^2)}\, r\, dr\, d\varphi$$

Da es hier gleichgültig ist, welche Einheit wir für die Lichtintensität wählen, so dürfen wir $W$ mit einem beliebigen Faktor multiplizieren. Wir nehmen hierfür:

$$\frac{m\,i}{2\,\pi f^4 \varrho_1^2}$$

und spalten das hiermit multiplizierte $W$ gleich in zwei Teile, indem wir setzen:

$$W = W_1 - W_2 \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= \frac{m\,i}{2\,\pi} \int_0^K \int_0^{2\pi} e^{-\frac{im}{2}(r^2 - 2pr\cos\varphi + p^2)}\, r\, dr\, d\varphi \\ W_2 &= \frac{m\,i}{2\,\pi} \int_1^K \int_0^{2\pi} e^{-\frac{im}{2}(r^2 - 2pr\cos\varphi + p^2)}\, r\, dr\, d\varphi \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Dabei soll $K$ eine Konstante bedeuten, welche wir später ins Unendliche wachsend denken wollen.

§ 3. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Integral $W_1$. Fasst man $r$ und $\varphi$ als Polarkoordinaten eines Punktes in einer Ebene auf, nennt $df$ das Flächenelement dieser Ebene und $s$ die Entfernung des beliebigen Punktes $r$, $\varphi$ vom Punkte mit den Coordinaten $r = p$, $\varphi = 0$, so erhält man für $W_1$ den Ausdruck:

$$W_1 = \frac{m\,i}{2\,\pi} \int e^{-\frac{im}{2} s^2}\, df$$

und dabei ist das Integral über einen mit dem Radius $K$ um den Nullpunkt beschriebenen Kreis zu erstrecken. Führt man jetzt Polarkoordinaten $s$, $\psi$ mit dem Punkte $p$, 0 als Pol ein, die also mit $r$ und $\varphi$ durch die Gleichungen zusammenhängen:

$$r^2 = s^2 - 2\,s\,p \cos\psi + p^2 \qquad r \sin\varphi = s \sin\psi$$

so geht das Integral über in:

$$W_1 = \frac{m\,i}{2\,\pi} \int e^{-\frac{mi}{2} s^2}\, s\, d\, s\, d\, \psi$$

und hierbei ist der Grenzkreis der Fläche, über die das Integral zu erstrecken ist, durch die Gleichung:

$$K^2 = s^2 - 2\,s\,p \cos\psi + p^2 \tag{9}$$

bestimmt. In dieser Form lässt sich aber die Integration nach $s$ ausführen:

$$W_1 = -\frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} d\,\psi \left[e^{-\frac{mi}{2} s^2} - 1\right] = 1 - \frac{1}{2\,\pi} \int_0^{2\pi} d\,\psi\, e^{-\frac{mi}{2} s^2} \tag{10}$$

Hierin ist für $s^2$ der aus 9) folgende Wert einzuführen.

Derselbe ist:

$$s^2 = K^2 + p^2 \cos 2\,\psi + 2\,p \cos\psi \sqrt{K^2 - p^2 \sin^2\psi}$$

oder, wenn $q$ eine für alle grossen Werte von $K$ endliche Grösse bezeichnet:

$$s^2 = K^2 + 2\,p\,K \cos\psi + p^2 \cos 2\,\psi + \frac{q}{K}$$

Für das Integral in 10) folgt somit:

$$\int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-\frac{mi}{2}s^2} = e^{-\frac{mi}{2}K^2} \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-\frac{mi}{2}\left(2pK\cos\psi + p^2\cos 2\psi + \frac{q}{K}\right)}$$

Der entstehende Integrand enthält den Faktor:

$$e^{-mipK\cos\psi} = \cos(mpK\cos\psi) - i\sin(mpK\cos\psi)$$

dessen reeller, wie imaginärer Teil mit wachsendem $K$ immer rascher, für immer geringere Aenderungen von $\psi$, zwischen den Grenzen $\pm 1$ oscilliert. Man beweist unschwer nach bekannten Mustern, dass infolge dieses Umstandes für $\lim K = \infty$ das ganze Integral verschwindet, und erhält dann aus 10):

Für $\lim K = \infty$:

$$W_1 = 1 \tag{11}$$

§ 4. Um weiter das Integral $W_2$ auszuführen, erinnere man sich der Integraldarstellung der Bessel'schen Funktion:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi}\, d\varphi$$

Mit ihrer Hülfe kann man in 8) die Integration nach $\varphi$ ausführen und erhält, wenn man zugleich $K$ ins Unendliche wachsen lässt:

$$W_2 = mi \int_1^{\infty} e^{-\frac{im}{2}(r^2+p^2)} J_0(mpr)\, r\, dr \tag{12}$$

Das hier erscheinende Argument der Bessel'schen Funktion $mpr$ wird, da $r > 1$ ist und es sich für uns um grosse Werte von $m$ handelt, gross, so lange nicht $p$ sehr klein ist, so lange es sich nicht um Punkte nahe der Axe, dem Centrum des Beugungsbildes handelt. Man wird daher, von letzterem Fall abgesehen, mit Vorteil von der bekannten semikonvergenten Entwicklung der Bessel'schen Funktion für grosses Argument[1]) Gebrauch machen können, die sich in der Form schreiben lässt:

[1]) Vgl. Lommel, Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 58.

$$J_0(x) = \frac{e^{ix - \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} A(x) + \frac{e^{-ix + \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} A(-x)$$

wo $A(x)$ durch die semikonvergente Reihe geliefert wird:

$$A(x) = 1 + \frac{1^2}{1!} \frac{1}{(8ix)} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!} \frac{1}{(8ix)^2} + \dots \qquad 13)$$

Indem wir das erste Glied dieser Entwicklung von den übrigen abtrennen, schreiben wir:

$$J_0(x) = \frac{e^{ix - \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} + \frac{e^{-ix + \frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi x}} + J_0'(x)$$

Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in 12) erhält man:

$$\begin{aligned} W_2 = {} & \frac{m i e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi \cdot m p}} \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr \\ & + \frac{m i e^{+\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2\pi m p}} \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \sqrt{r}\, dr + m i \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r^2+p^2)} J_0'(mpr) \cdot r\, dr \end{aligned} \qquad 14)$$

Die beiden ersten Integrale lassen sich durch partielle Integration in folgender Art umformen:

$$\begin{aligned} m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr = {} & \left[ - e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \frac{\sqrt{r}}{r-p} \right]_1^\infty \\ & + \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\sqrt{r}}{r-p} \right) \cdot dr \end{aligned} \qquad 15)$$

$$\begin{aligned} m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \sqrt{r}\, dr = {} & \left[ - e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \frac{\sqrt{r}}{r+p} \right]_1^\infty \\ & + \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r+p)^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{\sqrt{r}}{r+p} \right) dr \end{aligned} \qquad 16)$$

Die hier rechts auftretenden Integrale sollen mit $W_3$ und $W_4$ bezeichnet werden. In $W_3$ und $W_4$ würde man eine ähnliche partielle Integration ausführen und so fortfahren können und dabei offenbar jedes Mal von Neuem den Faktor $m$ in den Nenner treten sehen. Ein ähnliches Verfahren liesse sich aber auch auf die aus den folgenden Gliedern der Entwicklung 13) entspringenden Integrale anwenden. Was man so im Ganzen schliesslich erhielte, wäre eine semikonvergente Entwicklung von $W_2$ nach negativen Potenzen von $m$. Wir begnügen uns damit, die ersten Glieder dieser Entwicklung explicit aufzustellen und eine Formel für den Rest anzugeben.

Die eben erhaltenen Formeln geben:

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, d r = \frac{e^{-\frac{im}{2}(1-p)^2}}{1-p} + W_3$$

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r+p)^2} \sqrt{r}\, d r = \frac{e^{-\frac{im}{2}(1+p)^2}}{1+p} + W_4$$

und, wenn man dies in 14) einsetzt:

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1-p} + \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} + R \tag{17}$$

worin $R$ die Summe der drei Integrale ist:

$$R = m i \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r^2+p^2)} J_0'(m p r)\, r\, d r$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{r}}{r-p}\right) d r$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r+p)^2 + \frac{\pi i}{4}} \frac{d}{dr}\left(\frac{\sqrt{r}}{r+p}\right) d r$$

Eine obere Grenze für diesen Rest $R$ habe ich nun auf folgende Weise gewonnen. Ich habe zunächst ähnlich, wie

in 15) und 16), in allen drei Integralen einmal partiell integriert, so dass der Faktor $m$ in den Nenner trat. Ferner habe ich die Maxima und Minima der Integranden aufgesucht und nach den Mittelwertsätzen Grenzen für die Integrale über die dazwischen liegenden Intervalle aufgestellt. Für das erste Integral habe ich dabei von dem Satze Gebrauch gemacht, dass der Modul des Restes der Entwicklung 13) kleiner ist als der Modul des ersten ausgelassenen Gliedes. So fand sich für den Rest $R$ ein Ausdruck von der Form:

$$\text{Mod } R < \frac{K_1}{\sqrt{m^5}} + \frac{K_2}{\sqrt{m^3}} \tag{18}$$

in welchem $K_1$ und $K_2$ die nachstehenden Funktionen von $p$ bedeuten:

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{27}{64} \frac{1}{p^{5/2}} \frac{1}{1-p^2}$$

$$K_2 = \frac{1+6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\, p^{3/2}(1+p)^3} + \frac{1-6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\, p^{3/2}(1-p)^3}$$

$$\text{für: } 0 < p < \frac{1}{5+\sqrt{24}}$$

$$K_2 = \frac{1+6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\, p^{3/2}(1+p)^3} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(5+\sqrt{24})^{1/2}(4+\sqrt{24})^2} \frac{1}{p^3}$$

$$\text{für: } \frac{1}{5+\sqrt{24}} < p < \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 \tag{19}$$

$$K_2 = \frac{1+6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\, p^{3/2}(1+p)^3} - \frac{1-6p-3p^2}{4\sqrt{2\pi}\, p^{3/2}(1-p)^3}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{(5+\sqrt{24})^{1/2}(4+\sqrt{24})^2} \frac{1}{p^3}$$

$$\text{für: } \sqrt{\frac{4}{3}} - 1 < p < 1$$

Die Werte dieser Funktionen sind folgender kleiner Tafel zu entnehmen:

| $p$ | $\frac{1}{100} K_1$ | $K_2$ | $p$ | $\frac{1}{100} K_1$ | $K_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 168 | 199 | 0.50 | 0.0 | 6.4 |
| 0.02 | 29.7 | 70.3 | 0.60 | 0.0 | 12.5 |
| 0.03 | 10.8 | 37.9 | 0.65 | 0.0 | 18.5 |
| 0.05 | 3.0 | 17.3 | 0.70 | 0.0 | 29.5 |
| 0.10 | 0.5 | 5.3 | 0.75 | 0.0 | 51.1 |
| 0.20 | 0.1 | 2.1 | 0.80 | 0.0 | 99.9 |
| 0.30 | 0.0 | 2.7 | 0.85 | 0.0 | 237 |
| 0.40 | 0.0 | 3.9 | 0.90 | 0.0 | 798 |

Mit dem aus der Tafel und Gleichung 18) zu entnehmenden maximalen Reste $R$ erhält man nach 17), 11) und 7) für das gesuchte Integral $W$ den einfachen Ausdruck:

$$W = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1-p} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} \qquad \text{A)}$$

§ 5. Die Formel 18) verbunden mit 19) und die Tafel lassen erkennen, dass der Rest $R$ gross wird, sobald sich $p$ der Null oder der 1, dem Centrum oder dem Rande des Beugungsbildes nähert, dass mithin die Formel A) nur für einen mittleren ringförmigen Streifen des Beugungsbildes anwendbar ist, der übrigens bei vorgeschriebener Genauigkeit um so breiter wird, je mehr $m$ wächst. Es soll daher eine andere Darstellung von $W$ abgeleitet werden, welche auch für grösseres $p$, für Randpunkte brauchbar bleibt.

Man schreibe an Stelle von 15):

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr \qquad 20)$$

$$= m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} (\sqrt{r} - \sqrt{p})\, dr + m i \sqrt{p} \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2}\, dr$$

und integriere nur das erste Integral partiell:

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} (\sqrt{r} - \sqrt{p})\, dr$$

$$= \left[ - e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \frac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{p}} \right]_1^\infty + \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{\sqrt{r}+\sqrt{p}}\right) dr \qquad 21)$$

Man nenne das hier rechts stehende Integral $W_5$. Man bemerkt, dass $W_5$ nicht wie $W_3$, einen Nenner $r - p$ im Integranden hat, der an dem grossen Werte des obigen Restes $R$ für $p$ in der Nähe von 1 schuld ist. Aus 20) und 21) findet man:

$$m i \int_1^\infty e^{-\frac{im}{2}(r-p)^2} \sqrt{r}\, dr = \frac{e^{-\frac{im}{2}(1-p)^2}}{1+\sqrt{p}} + m i \sqrt{p} \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2} dr + W_5$$

und durch Einsetzen in 14):

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} + \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1+\sqrt{p}}$$
$$+ i \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} dr + R' \qquad 22)$$

wobei sich $R'$ von $R$ dadurch unterscheidet, dass $W_5$ an Stelle von $W_3$ tritt. Für $R'$ habe ich nun ähnliche Ueberlegungen ausgeführt, wie sie oben für $R$ geschildert worden sind, und erhalten:

$$\text{Mod } R' < \frac{K_1'}{\sqrt{m^5}} + \frac{K_2'}{\sqrt{m^3}} \qquad 23)$$

wobei $K_1'$ und $K_2'$ die folgenden Funktionen von $p$ sind:

$$K_1' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{27}{128} \frac{1}{p^{5/2}} \frac{1}{1+p}$$
$$K_2' = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \frac{1}{4p} \left\{ \frac{9}{16p} + \frac{1+6p-3p^2}{(1+p)^3} + \frac{1+3\sqrt{p}}{(1+\sqrt{p})^3} \right\} \qquad 24)$$

deren Werte nachstehendem Täfelchen entnommen werden können:

| $p$ | $K'_1$ | $K'_2$ | $p$ | $K'_1$ | $K'_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 24.1 | 24.1 | 0.70 | 0.1 | 0.4 |
| 0.20 | 3.8 | 5.2 | 0.80 | 0.1 | 0.3 |
| 0.30 | 1.2 | 2.2 | 0.90 | 0.1 | 0.2 |
| 0.40 | 0.6 | 1.3 | 1.00 | 0.0 | 0.2 |
| 0.50 | 0.3 | 0.8 | 1.10 | 0.0 | 0.1 |
| 0.60 | 0.2 | 0.5 | 1.20 | 0.0 | 0.1 |

Mit dem aus dieser Tafel und Formel 23) zu entnehmenden maximalen Rest $R'$ erhält man nach 22), 11) und 7) für $W$ den Ausdruck:

$$W = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}}}{1+\sqrt{p}}$$

$$- i\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int\limits_1^{\infty} e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \, d r \qquad \text{B)}$$

Dass hier in dem Ausdruck von $W$ für Randpunkte gerade dieses Integral stehen bleibt, entspringt nicht einer Unvollkommenheit unsrer Behandlungsweise, sondern ist eine Notwendigkeit. Denn die Beugungsfigur im idealen Fernrohr ist identisch mit der Beugungsfigur einer kreisförmigen Oeffnung[1]) und zwar einer Oeffnung von um so grösserem Radius, je grösser $m$ ist. Für grosses $m$ wird daher der Rand der kreisförmigen Oeffnung streckenweise nahezu durch einen geradlinigen ersetzt werden können, und es wird als Hauptglied dieses Integral auftreten müssen, welches von 1 abgezogen das für die Beugungserscheinung eines geradlinigen Randes geltende $W$ ergiebt. Letzteres ist z. B. der Abhandlung von E. v. Lommel: „Ueber die Beugungserscheinungen geradlinig

[1]) Vgl. Kirchhoff, Optik p. 83 ff.

begrenzter Schirme"[1]) zu entnehmen, in welcher ausserdem Tafeln für das Integral gegeben sind, von denen wir Gebrauch zu machen haben. Um ganz auf die Lommel'sche Form zu kommen, setze man:

$$\frac{m}{2}(r-p)^2 = x \qquad \frac{m}{2}(1-p)^2 = q$$

Läuft $r$ von 1 bis $\infty$, so läuft $x$, falls $p$ kleiner als 1 ist, von $q$ bis $\infty$, falls aber $p$ grösser als 1 ist, zunächst von $q$ nach 0 und erst dann von 0 bis $\infty$. In Rücksicht auf diese Verschiedenheit folgt:

Für $p < 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx - \frac{i}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx\right\}$$

Für $p > 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}}\int_1^\infty e^{-\frac{mi}{2}(r-p)^2-\frac{\pi i}{4}}\,dr = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{2}}\left\{\frac{1}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx + \frac{1}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx + \frac{i}{2}\int_0^q\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx\right\}$$

Mit Hülfe der folgenden Formeln, die man § 34 und 76 der Lommel'schen Abhandlung entnimmt:

$$\int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\,dx = \int_0^\infty\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx = 1$$

$$\frac{1}{2}\int_0^x\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x\,dx = \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{1}{2}}[2x]\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}V_{\frac{3}{2}}[2x]\cos x$$

[1]) Abhandlungen der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften 1886.

$$\frac{1}{2}\int_0^x \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{1}{2}}[2x] \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} V_{\frac{3}{2}}[2x] \sin x$$

ergiebt sich hieraus:

Für $p < 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} dr$$

$$= e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] \right\}$$

Für $p > 1$:

$$i\sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_1^\infty e^{-\frac{m i}{2}(r-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} dr$$

$$= 1 - e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] \right\}$$

Die Funktionen $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$ sind es, welche mit dem Argumente $m(1-p)^2$ von 0 bis 100 Tafel XXII. der Lommel'schen Abhandlung entnommen werden können.

Führt man diese Ausdrücke nun in B) ein, so erhält man:

Für $p < 1$:

$$\begin{aligned} W = 1 &- \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} \\ &- e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] \right. \\ &\left. + \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}(1+\sqrt{p})} \right\} \end{aligned} \qquad \text{C)}$$

Für $p > 1$:

$$\begin{aligned} W = &- \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{e^{-\frac{m i}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}}{1+p} \\ &+ e^{-\frac{m i}{2}(1-p)^2 - \frac{\pi i}{4}} \left\{ \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \frac{i}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] \right. \\ &\left. - \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+\sqrt{p}} \right\} \end{aligned} \qquad \text{D)}$$

§ 6. Um die Darstellungen A) und C) von $W$ auf dieselbe Form zu bringen und die Norm $J$ von $W$ einfach bilden zu können, setze man:

im Bereiche der Anwendung von Formel A):

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1-p} \qquad k = 0 \qquad L = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+p} \qquad \text{I}$$

im Bereiche der Anwendung der Formeln C) und D):

$$\left.\begin{aligned} K \cos k &= \frac{1}{2} V_1 [m(1-p)^2] \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+\sqrt{p}} \\ K \sin k &= \frac{1}{2} V_2 [m(1-p)^2] \qquad L = \frac{1}{\sqrt{2\pi m p}} \frac{1}{1+p} \end{aligned}\right\} \quad \text{I}'$$

wobei im Ausdruck von $K \cos k$ für $p < 1$ das positive, für $p > 1$ das negative Zeichen zu nehmen ist.

Dann wird:

Für $p < 1$:

$$W = 1 - K e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2 - ki - \frac{\pi i}{4}} - L e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}$$

Für $p > 1$:

$$W = \qquad K e^{-\frac{mi}{2}(1-p)^2 - ki - \frac{\pi i}{4}} - L e^{-\frac{mi}{2}(1+p)^2 + \frac{\pi i}{4}}$$

Die Abtrennung des reellen Teiles $S$ vom imaginären $T$ und die Bildung von $S^2 + T^2$ liefert nun leicht:

Für $p < 1$:

$$\left.\begin{aligned} J = 1 + K^2 + L^2 &- 2K \cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + k + \frac{\pi}{4}\right] \\ &- 2L \cos\left[\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}\right] \\ &+ 2KL \sin[2mp - k] \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

Für $p > 1$:

$$J = K^2 + L^2 - 2KL \sin[2mp - k] \qquad \text{II}'$$

**Die Formeln I, I′ und II, II′ stellen das Resultat unserer Untersuchung dar.** Mit ihrer Hülfe kann für grosses $m$ angenähert $J$ berechnet werden — von dem einen Falle abgesehen, dass $p$ sehr klein ist, dass es sich um Punkte in nächster Nähe des Centrums des Beugungsbildes handelt. In diesem Falle führen aber die bekannten Formeln, welche von H. Struve und Lommel in den eingangs citierten Arbeiten aufgestellt sind, schon bei Beschränkung auf die ersten Glieder zum Ziel:

$$\left.\begin{aligned} P &= J_0(mp) - p^2 J_2(mp) + p^4 J_4(mp) - \dots \\ Q &= p J_1(mp) - p^3 J_3(mp) + p^5 J_5(mp) - \dots \\ J &= 1 + P^2 + Q^2 - 2P\cos\left[\frac{m}{2}(1+p^2)\right] \\ &\qquad\qquad - 2Q\sin\left[\frac{m}{2}(1+p^2)\right] \end{aligned}\right\} \text{III}$$

Auch diese Formeln lassen sich in die Gestalt II überführen, wenn man bedenkt, dass für kleines $p$: $k = 0$ ist und setzt:

$$\left.\begin{aligned} K\cos 2mp &= P\sin\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) - Q\cos\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) \\ L\cos 2mp &= P\sin\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) + Q\cos\left(\frac{\pi}{4} - mp\right) \end{aligned}\right\} \text{IV}$$

Die Werte der in diesen Formeln auftretenden Funktionen sind den folgenden Tafeln zu entnehmen.

| | I. | | | II. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+p)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+\sqrt{p})}}$ | $m(1-p)^2$ | $\frac{1}{2}V_{\frac{1}{2}}$ | $\frac{1}{2}V_{\frac{3}{2}}$ |
| 0.01 | 3.95 | 4.03 | 3.62 | 0.00 | +0.354 | −0.354 |
| 0.02 | 2.77 | 2.88 | 2.47 | 0.01 | 0.352 | 0.315 |
| 0.03 | 2.24 | 2.37 | 1.96 | 0.04 | 0.347 | 0.281 |
| 0.05 | 1.70 | 1.88 | 1.46 | 0.09 | 0.341 | 0.250 |
| 0.10 | 1.15 | 1.40 | 0.96 | 0.2 | 0.328 | 0.209 |
| 0.20 | 0.74 | 1.11 | 0.62 | 0.4 | 0.310 | 0.167 |

| I. | | | | II. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+p)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1-p)}}$ | $\frac{1}{\sqrt{2\pi p(1+\sqrt{p})}}$ | $m(1-p)^2$ | $\frac{1}{2} V_1$ | $\frac{1}{2} V_2$ |
| 0.30 | 0.56 | 1.04 | 0.47 | 0.6 | +0.295 | −0.141 |
| 0.40 | 0.45 | 1.05 | 0.39 | 0.8 | 0.281 | 0.122 |
| 0.50 | 0.38 | 1.13 | 0.33 | 1 | 0.270 | 0.107 |
| 0.60 | 0.32 | 1.29 | 0.29 | 2 | 0.228 | 0.066 |
| 0.65 | 0.30 | 1.41 | 0.27 | 3 | 0.201 | 0.046 |
| 0.70 | 0.28 | 1.59 | 0.26 | 4 | 0.181 | 0.034 |
| 0.75 | 0.26 | 1.84 | 0.25 | 7 | 0.144 | 0.018 |
| 0.80 | 0.25 | 2.23 | 0.24 | 10 | 0.123 | 0.011 |
| 0.85 | 0.23 | 2.89 | 0.23 | 15 | 0.102 | 0.006 |
| 0.90 | 0.22 | 4.21 | 0.22 | 20 | 0.089 | 0.004 |
| 0.95 | 0.21 | 8.19 | 0.21 | 40 | 0.063 | 0.002 |
| 1.00 | 0.20 | ∞ | 0.20 | 60 | 0.051 | 0.001 |
| 1.10 | 0.18 | | 0.19 | 80 | 0.045 | 0.001 |
| 1.20 | 0.17 | | 0.17 | 100 | 0.040 | 0.000 |
| 1.30 | 0.15 | | 0.16 | | | |

Tafel II. bildet für die ganzzahligen Argumente einen Auszug aus der Tafel XXII. von Lommel's Abhandlung über die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme, für die kleineren Argumente sind die Werte nach den am selben Orte § 77 angegebenen Formeln berechnet. Tafeln für die Bessel-schen Funktionen findet man so vielfach, dass ich sie hier nicht zu wiederholen brauche.

§ 7. Bevor wir die Rechnung nach diesen Formeln für einen Fall numerisch durchführen, wollen wir uns an ihrer Hand allgemein den Charakter des Beugungsbildes weit ausserhalb des Focus klar machen.

Nicht einfach zu übersehen ist die Beugungserscheinung in unmittelbarer Nähe des Centrums. Im Centrum selbst, für $p = 0$, hat man in Formel III:

$$J_0 = 1 \qquad P = 1 \qquad Q = 0$$

und hiermit den bekannten Ausdruck:

$$J = 4 \sin^2 \frac{m}{4}$$

Es hängt also vom Werte von $m$ ab, ob im Centrum Dunkelheit oder möglicher Weise eine maximale Helligkeit herrscht, und geringe Aenderung der Einstellung führt schon einen Wechsel zwischen diesen Extremen herbei. Um das Centrum lagern sich dann eine Reihe heller und dunkler Ringe, die nach III zu berechnen sind und wesentlich durch das Oscillieren der Funktion $J_0(m\,p)$ bestimmt werden.

Von welcher Grenze an sind nun die Formeln I und II zu verwenden? Da das Auge Helligkeitsdifferenzen unter 1% unter den hier in Betracht kommenden Verhältnissen keinesfalls unterscheiden kann, genügt es, wenn man $J$ auf 0.01 genau berechnet, was erreicht ist, wenn man den Wert von $W$ auf 0.005 richtig bestimmt hat. Man entnimmt den obigen Tafeln und Formeln für die Reste $R$ und $R'$, dass diese Genauigkeit von den Formeln I resp. I' und II resp. II' geliefert wird innerhalb der Grenzen:

Formel I und II.

| | | |
|---|---|---|
| für $m = 100$ | von $p = 0.11$ | bis $p = 0.44$ |
| 300 | „ „ $= 0.04$ | „ „ $= 0.68$ |
| 900 | „ „ $= 0.01$ | „ „ $= 0.82$ |

Formel I', II und II'.

| | | |
|---|---|---|
| für $m = 50$ | und | $p > 0.35$ |
| 100 | „ | $p > 0.21$ |
| 300 | „ | $p > 0.10$ |

Man bemerkt weiter, dass, soweit für $K$ und $k$ die Formeln I verwendbar sind, die quadratischen Glieder in II den Nenner $m$, die linearen Glieder nur den Nenner $\sqrt{m}$ erhalten. Erstere Glieder werden also klein gegen letztere und man erhält für das mittlere Gebiet der Beugungsfigur die Näherungsformel:

$$J = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi m p}}\,\frac{1}{1-p}\cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + \frac{\pi}{4}\right] - \sqrt{\frac{2}{\pi m p}}\,\frac{1}{1+p}\cos\left[\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}\right] \qquad \text{V}$$

Aus dieser Formel liest man den Satz ab, der schon in § 1 hervorgehoben wurde: Ueber die mittlere Intensität 1 lagern sich zwei Wellenzüge, deren einzelne Windungen nahezu die Form von Sinuskurven haben.[1]) Denn die Argumente wachsen (ausser für die hier ausgeschlossenen Werte von $p$ in der Nähe von 1 beim ersten Glied) nahezu proportional mit $p$, die Wellenlänge ist

für die erste Welle $\quad\quad$ für die zweite Welle

$$\Delta p = \frac{2\pi}{m(1-p)} \qquad \Delta p = \frac{2\pi}{m(1+p)} \tag{25}$$

und die Amplituden ändern sich für das vorausgesetzte grosse $m$ nur wenig innerhalb dieser Wellenlängen. Die Anzahl der Maxima und Minima zwischen $p = 0.1$ und $p = 0.5$ wird

| | bei der ersten Welle | | und | | bei der zweiten Welle |
|---|---|---|---|---|---|
| für | $m = 100$ | 9 | | für $m = 100$ | 17 |
| | $m = 900$ | 81 | | $m = 900$ | 163 |

Die Amplitude der Schwingungen nimmt von innen nach aussen bei der ersten Welle anfangs ab, dann zu, bei der zweiten ständig ab. Im halben Radius des Beugungsbildes ($p = 0.5$) beträgt sie:

| | 1. Welle | 2. Welle |
|---|---|---|
| für $m = 100$ : | $\pm 0.23$ | $\pm 0.08$ |
| „ „ 900 : | $\pm 0.08$ | $\pm 0.03$ |

Für $m = 900$, was einer Verschiebung von 3 cm aus dem Focus bei einem Fernrohr von 30 cm Oeffnung und 3 cm Brennweite entspricht, betragen also die Schwankungen der Intensität um den Mittelwert in der Nähe des halben Radius des Beugungsbildes nur mehr 11%.

Die Erscheinung, die sich aus der Uebereinanderlagerung dieser beiden Wellen von verschiedener Wellenlänge ergiebt, ist sehr verwickelt und wechselt in allen ihren Einzelheiten rasch mit jeder Aenderung von $m$.

---

[1]) Man überzeugt sich leicht, dass die Intensität 1 diejenige Intensität bedeutet, welche bei geradliniger Ausbreitung der Lichtstrahlen gleichförmig über die ganze extrafokale Lichtscheibe herrschen würde.

Stärkere Schwankungen der Intensität bleiben, auch für beliebig grosses $m$, am Rande des Beugungsbildes bestehen. Denn es tritt hier — das liess sich, wie erwähnt, voraussehen — dieselbe Erscheinung auf, wie am Rande eines gradlinigen Schirms. Der Wert von $L$ und der Wert des zweiten Gliedes von $K \cos k$ in Formel I′ sinkt am Rande des Beugungsbildes ($p = 1$) schon für $m = 100$ auf 0.02. Man erhält also eine sehr genäherte Darstellung der Erscheinung am Rande, wenn man:

$$L = 0$$

$$K \cos k = \frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] \qquad K \sin k = \frac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2]$$

setzt. Hieraus folgt aber durch einfache Umstellungen in II und II′:

Für $p < 1$:

$$J = \left\{\frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2] - \cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + \frac{\pi}{4}\right]\right\}^2$$
$$+ \left\{\frac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2] + \sin\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + \frac{\pi}{4}\right]\right\}^2$$

Für $p > 1$:

$$J = \left\{\frac{1}{2} V_{\frac{1}{2}}[m(1-p)^2]\right\}^2 + \left\{\frac{1}{2} V_{\frac{3}{2}}[m(1-p)^2]\right\}^2$$

Diese Ausdrücke stimmen, wenn man $x = m(1-p)^2$ setzt, überein mit den von Lommel a. a. O. § 127 gegebenen und in Tafel XXI. und XXII. tabulierten Ausdrücken für die Beugung an einem gradlinigen Rande. Diesen Tafeln ist folgendes zu entnehmen (was man auch leicht aus den Formeln in Verbindung mit den obigen kleinen Tafeln für $V_{\frac{1}{2}}$ und $V_{\frac{3}{2}}$ ableitet).

Am Rande des geometrischen Bildes ($p = 1$) beträgt die Intensität $\frac{1}{4}$ der Durchschnittsintensität 1. Sie sinkt dann nach aussen, in den geometrischen Schatten hinein, beständig und schnell ab. Nach innen hingegen wächst sie und erreicht ein Maximum von 1.37 für:

$$m(1-p)^2 = 4.65 \qquad p = 1 - \frac{2.2}{\sqrt{m}}$$

sinkt dann wieder auf 0.78 für:

$$m(1-p)^2 = 11.0 \qquad p = 1 - \frac{3.3}{\sqrt{m}}$$

um hierauf weitere kleinere Schwankungen auszuführen.

Die ganze Beugungsfigur erscheint demnach umgeben von einem hellen, durch einen relativ dunkeln Zwischenraum abgetrennten Ring, welcher übrigens noch ganz innerhalb der Grenze des geometrischen Bildes zu liegen kommt.

Wir wollen uns schliesslich klar machen, welche scheinbare Breite (vom Objektiv aus gesehen) die hier auftretenden Ringe haben, welcher Winkelwert ihnen entspricht.

Die scheinbare Grösse $\chi$ des Radius des geometrischen Bildes ist, wenn $v$ den Abstand eines Randpunktes desselben von der Axe bezeichnet, bestimmt durch:

$$\sin\chi = \frac{v}{f-u}$$

Für einen Punkt im geometrischen Rande war aber in § 2:

$$\frac{v}{u} = \sin\vartheta_1$$

wo $\vartheta_1$ der halbe Oeffnungswinkel des Objektivs ist. Demnach:

$$\sin\chi = \frac{u}{f-u}\sin\vartheta_1$$

Die Einheit der Wellenlängen, wie sie die Gleichungen 25) geben, war der Radius des geometrischen Bildes. Der Winkelwert dieser Grössen ist daher, wenn man Sinus durch Bogen ersetzt:

$$\Delta p\cdot\chi = \frac{2\pi u}{m(f-u)}\,\frac{\sin\vartheta_1}{1-p} \qquad \text{resp.}\quad \Delta p\cdot\chi = \frac{2\pi u}{m(f-u)}\,\frac{\sin\vartheta_1}{1+p}$$

und wenn man den Wert von $m$ nach 5) einführt:

$$\Delta p\cdot\chi = \frac{\lambda}{f\sin\vartheta_1}\,\frac{\cos^2\frac{\vartheta_1}{2}}{1-p} \qquad \text{resp.}\quad \Delta p\cdot\chi = \frac{\lambda}{f\sin\vartheta_1}\,\frac{\cos^2\frac{\vartheta_1}{2}}{1+p}$$

Bedenkt man, dass $2f \sin \vartheta_1$ gleich dem Objektivdurchmesser $d$ ist und dass $\cos^2 \frac{\vartheta_1}{2}$ gleich 1 gesetzt werden kann, so erhält man für die scheinbare Breite der Ringe, wie sie in dem mittleren Gebiete der Beugungsfigur auftreten:

$$\varDelta p \cdot \chi = \frac{\lambda}{d} \frac{2}{1-p} \qquad \text{resp.} \quad \varDelta p \cdot \chi = \frac{\lambda}{d} \frac{2}{1+p}$$

d. h. die scheinbare Breite dieser Ringe ist unabhängig von der Grösse der Verschiebung aus dem Focus. Für die oben vorausgesetzten Grössenverhältnisse des Fernrohrs und $p = 0.5$ erhält man:

$$1''\!.4 \qquad \text{resp.} \quad 0''\!.5$$

Diese Grössen bedeuten die Breite eines hellen Rings und des auf ihn folgenden dunkeln Rings zusammengenommen, also den Abstand auf einander folgender heller Ringe.

Anders steht es mit den Ringen am Rande der Beugungsfigur. Betrachtet man als Breite des äussersten Rings den Abstand des ersten Minimums $\left(p = 1 - \frac{3.3}{\sqrt{m}}\right)$ vom geometrischen Rande, also die Grösse:

$$b = \frac{3.3}{\sqrt{m}}$$

so ist der Winkelwert dieser Grösse:

$$b\,\chi = \frac{3.3}{\sqrt{m}} \frac{u}{f-u} \sin \vartheta_1$$

und hierfür erhält man mit Hülfe der Gleichungen 5):

$$b\,\chi = \frac{3.3}{2\pi} \frac{\sqrt{m} \cdot \lambda}{f \sin \vartheta_1} \cos^2 \frac{\vartheta_1}{2}$$

oder ähnlich, wie oben:

$$b \cdot \chi = 1.1 \sqrt{m} \cdot \frac{\lambda}{d}$$

Die Ringe am Rande der Beugungsfigur nehmen also mit wachsendem $m$ an scheinbarer Breite und hiermit an Deutlichkeit zu.

§ 8. Es soll schliesslich die Beugungsfigur für $m = 100$ (3 mm Verschiebung aus dem Focus eines Fernrohrs von 30 cm Oeffnung und 3 m Brennweite) ausgeführt werden. Man sieht an diesem Beispiel am besten, wie sich die drei verschiedenen Darstellungen der Intensität für Centrum, mittleren Ring und Rand des Beugungsbildes ablösen und wie sich die Grössenordnung der einzelnen Glieder dieser Ausdrücke zu einander verhält.

Es wurden zunächst $K$, $k$ und $L$ von $p = 0.1$ bis $p = 0.5$ (vgl. den vorigen Paragraphen) nach Formel I, von $p = 0.5$ an nach Formel I′ gerechnet und die Werte von $K^2 + L^2$ und $KL$ abgeleitet. Es fand sich (die Querstriche bezeichnen das Anwendungsbereich der einzelnen Formeln):

| $p$ | $K$ | $L$ | $k$ | $K^2+L^2$ | $KL$ | $p$ | $K$ | $L$ | $k$ | $K^2+L^2$ | $KL$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.10 | 0.140 | 0.115 | | 0.03 | 0.02 | 0.970 | 0.441 | 0.021 | −34°6 | 0.19 | 0.01 |
| 0.20 | 0.111 | 0.074 | | 0.02 | 0.01 | 0.980 | 0.465 | 0.020 | 37.2 | 0.22 | 0.01 |
| 0.30 | 0.104 | 0.056 | | 0.01 | 0.01 | 0.990 | 0.489 | 0.020 | 40.1 | 0.24 | 0.01 |
| 0.40 | 0.105 | 0.045 | | 0.01 | 0.00 | 1.000 | 0.516 | 0.020 | −43.4 | 0.27 | 0.01 |
| 0.50 | 0.112 | 0.038 | − 1°6 | 0.01 | 0.00 | 1.010 | 0.458 | 0.020 | −43.5 | 0.21 | 0.01 |
| 0.60 | 0.128 | 0.032 | 2.7 | 0.02 | 0.00 | 1.020 | 0.433 | 0.020 | 40.5 | 0.19 | 0.01 |
| 0.70 | 0.156 | 0.028 | 4.6 | 0.02 | 0.00 | 1.030 | 0.407 | 0.019 | 37.8 | 0.17 | 0.01 |
| 0.80 | 0.207 | 0.025 | 9.4 | 0.04 | 0.01 | 1.045 | 0.373 | 0.019 | 34.2 | 0.14 | 0.01 |
| 0.827 | 0.228 | 0.024 | 11.6 | 0.05 | 0.01 | 1.063 | 0.333 | 0.018 | 29.9 | 0.11 | 0.01 |
| 0.859 | 0.260 | 0.023 | 14.7 | 0.07 | 0.01 | 1.100 | 0.273 | 0.018 | 23.1 | 0.07 | 0.00 |
| 0.900 | 0.312 | 0.022 | 20.2 | 0.10 | 0.01 | 1.141 | 0.219 | 0.018 | 17.5 | 0.05 | 0.00 |
| 0.937 | 0.372 | 0.021 | 26.7 | 0.14 | 0.01 | 1.173 | 0.191 | 0.017 | 14.0 | 0.04 | 0.00 |
| 0.955 | 0.407 | 0.021 | −30.8 | 0.17 | 0.01 | 1.200 | 0.167 | 0.017 | −11.7 | 0.03 | 0.00 |

Dann wurden alle Werte von $p$ berechnet, für welche die Argumente $\frac{m}{2}(1-p)^2 + k + \frac{\pi}{4}$ und $\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}$ ein Vielfaches von $\frac{\pi}{4}$ wurden, wobei für ersteres Argument zunächst nur Werte von $p$ unter 0.8 in Betracht gezogen wurden. Die zugehörigen Werte der Ausdrücke:

$$A = 2K\cos\left[\frac{m}{2}(1-p)^2 + k + \frac{\pi}{4}\right]$$

und: $$B = 2\,L \cos\left[\frac{m}{2}(1+p)^2 - \frac{\pi}{4}\right]$$

wurden dann graphisch aufgetragen und durch eine Curve von der Form der Windungen einer Sinuscurve verbunden. Für die Werte von $p$ über 0.8, wo das Argument von $A$ langsamer wächst, wurde $A$ für alle in der vorstehenden Tafel angegebenen Werte $p$ direkt berechnet. Auf diese Weise sind die Curven $A$ und $B$ (Figurentafel I.) entstanden.

Die Curve $C$ giebt die Werte von:

$$C = 1 + K^2 + L^2$$

Das letzte Glied des Ausdrucks II (resp. II')

$$2\,K\,L \sin(2\,m\,p - k)$$

welches nicht über 0.03 steigt und aus Wellen von der Länge 0.032 in $p$ besteht, habe ich nicht berücksichtigt, weil es bei der Kürze der Wellen verbunden mit der geringen Amplitude für den Anblick der Beugungsfigur im Fernrohr bedeutungslos bleiben muss.

Die (graphisch ausgeführte) Superposition der Wellen $A$ und $B$ über $C$ liefert die Curve $J$, die Darstellung der Lichtintensität für einen Radius des Beugungsbildes, von $p = 0.1$ an. Für $p$ unter 0.1 habe ich in Intervallen von 0.005 in $p$ fortschreitend die Werte von $J$ nach den Formeln III direkt berechnet, dieselben eingetragen und durch eine Curve verbunden. Für $p$ über 1 wurde $J$ unmittelbar durch die Summe $K^2 + L^2$ geliefert.

Man bemerkt, dass für $p > 0.1$ der Charakter der Beugungsfigur in groben Zügen bereits durch die Curve $A$ dargestellt wird. Die Beugungsfigur besteht im Wesentlichen aus acht hellen Ringen. Der innerste ist besonders schmal und hell, dann folgen Ringe mit abnehmender Intensität und zunehmender Breite. Besonders hell wird wieder der äusserste Ring, der sich zugleich durch seine Breite, wie durch die Dunkelheit des Zwischenraums, welcher ihn von den übrigen Ringen trennt, auszeichnet.

# Ueber die Convergenz unendlicher Kettenbrüche.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 25. Juli.*)

Für die Beurtheilung der Convergenz von Kettenbrüchen mit beliebigen reellen oder complexen Gliedern besitzt man bisher, soweit mir die betreffende Literatur bekannt ist, keinerlei allgemeine Kriterien. In dem folgenden Aufsatze sollen einige Formen hinreichender Convergenz-Bedingungen von sehr einfachem Charakter und verhältnissmässig grosser Allgemeinheit mitgetheilt werden. Ich benütze diese Gelegenheit, um zunächst das Wesen der beiden verschiedenen Convergenz-Charaktere, die ich als unbedingte und bedingte Convergenz eines Kettenbruches bezeichne, genauer festzustellen (§ 2). Da bei dieser Untersuchung das eventuelle Vorkommen von sinnlosen Näherungsbrüchen (d. h. solchen mit dem Nenner 0) eine eingehende Berücksichtigung erfordert, so schicke ich zunächst einige Bemerkungen über die Natur und eventuelle Häufigkeit derselben voraus (§ 1). Sodann wird ein allgemeines Kriterium für die unbedingte Convergenz eines Kettenbruches mit beliebigen Gliedern aufgestellt, welches sich als eine directe Verallgemeinerung eines bekannten Kriteriums für Kettenbrüche mit lauter reellen negativen Gliedern erweist (§ 3). Nach einer Digression über eine durch jenes Kriterium ermöglichte Verallgemeinerung des Legendre'schen Irrationalitäts-Satzes (§ 4), werden mit Hülfe von sehr einfachen Transformationen zunächst für zwei speciellere Kettenbruch-Formen, schliesslich aber auch wieder für ganz beliebige Kettenbrüche noch andere Convergenz-Bedingungen von wesentlich verschiedenem Charakter abgeleitet (§ 5).

## § 1.

Zur Bezeichnung des $n$-gliedrigen Kettenbruches:

(1)
$$\pm b_0 \pm \cfrac{a_1}{b_1 \pm \cfrac{a_2}{b_2 \pm \cdots \pm \cfrac{a_n}{b_n}}}$$

bediene ich mich der gedrängteren Schreibweise:

(2)
$$\pm b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \ldots \pm \frac{a_n|}{|b_n}$$

oder auch der Symbole:

(3)
$$\left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n\,(\nu)}, \qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_1}{b_1}, \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{n\,(\nu)},$$

wofür ich im Falle $b_0 = 0$ kürzer schreibe:

(4)
$$\left[\pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{n\,(\nu)}, \qquad \left[\pm \frac{a_1}{b_1}, \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{n\,(\nu)}.$$

Analog bezeichne ich den entsprechenden unendlichen Kettenbruch durch:

(5)
$$\pm b_0 \pm \frac{a_1|}{|b_1} \pm \frac{a_2|}{|b_2} \pm \ldots \pm \frac{a_\nu|}{|b_\nu} \pm \ldots$$

oder:

(6)
$$\left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty\,(\nu)}, \qquad \left[\pm b_0;\ \pm \frac{a_1}{b_1}, \ldots \pm \frac{a_m}{b_m},\ \pm \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty\,(\nu)}.$$

Dabei pflege ich in (3), (4) und (6) die ausdrückliche Hervorhebung des *laufenden* Index $\nu$ durch das beigesetzte Zeichen $(\nu)$ überall da wegzulassen, wo ein Missverständniss ausgeschlossen erscheint (also: $\left[\pm b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n$ etc.).

Die $a_\nu$, $b_\nu$ sollen im folgenden beliebige (reelle oder complexe) Zahlen bedeuten, mit der einzigen (gewissermaassen selbstverständlichen) Beschränkung, dass die $a_\nu$ durchweg als von Null verschieden angenommen werden. Wegen der Willkürlichkeit der $a_\nu$, $b_\nu$ kann daher das oben beliebig gelassene Vorzeichen $\pm$ überall wegfallen, da derselbe Grad von Allgemeinheit erzielt wird, wenn man statt $\pm b_0$, $\pm a_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) lediglich $b_0$, $a_\nu$ schreibt. Es genügt also, für die folgenden Betrachtungen einen Kettenbruch von der Form:

$$(7) \qquad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m \quad \text{bezw.} \quad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$$

zu Grunde zu legen.

Wird sodann ein System von Zahlen $A_\nu$, $B_\nu$ durch die Gleichungen definirt:

$$(8) \begin{cases} \text{(a)} \ A_0 = b_0 & B_1 = 1 \\ \text{(b)} \ A_1 = b_1 b_0 + a_1 & B_1 = b_1 \\ \text{(c)} \ A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2} & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2} \ (\nu \geqq 2), \end{cases}$$

so bezeichne ich den zunächst rein formal definirten Ausdruck $\frac{A_m}{B_m}$ ($m = 1, 2, 3 \ldots$) als den $m^{\text{ten}}$ Näherungsbruch der Kettenbrüche (7), gleichgültig, ob $\frac{A_m}{B_m}$ eine bestimmte Zahl vorstellt oder nicht. Ersteres findet offenbar allemal statt, wenn $|B_m| > 0$ ist, und dieser Fall tritt sicher dann ein, wenn der Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen bestimmten Sinn besitzt; zugleich wird hierbei:

$$(9) \qquad \left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = \frac{A_m}{B_m}.$$

Es kann aber auch $\frac{A_m}{B_m}$ eine bestimmte Zahl vorstellen, ohne dass das gleiche für den betreffenden Kettenbruch gilt.[1])

---

[1]) Vgl. Stolz, Vorl. über Allg. Arithm. Bd. II, S. 269.

In diesem Falle sehe ich den Werth des Kettenbruches als durch Gl. (9) definirt an, so dass ich also $\frac{A_m}{B_m}$ schlechthin als den Werth des Kettenbruches bezeichne, sofern nur $B_m$ von Null verschieden ausfällt.

Ist dagegen $B_m = 0$, so sage ich, der $m^{\text{te}}$ Näherungsbruch werde sinnlos. Ueber den einzig möglichen Charakter solcher sinnloser Näherungsbrüche und den eventuellen Umfang ihres Auftretens gewinnt man Aufschluss mit Hülfe der bekannten Formel:

$$(10) \qquad A_m B_{m-1} - B_m A_{m-1} = (-1)^{m-1} \cdot a_1 a_2 \ldots a_m,$$

aus welcher sich unmittelbar die nachstehenden Consequenzen ergeben:

I. Es kann niemals gleichzeitig $A_{m-1} = 0$, $A_m = 0$ sein

II. Sind $B_{m-1}$, $B_m$ von Null verschieden, so kann niemals die Beziehung bestehen:

$$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{A_m}{B_m}.$$

III. Ist $B_m = 0$, so kann nicht gleichzeitig $B_{m-1} = 0$ sein — vice versa; es kann also mit $B_m = 0$ nicht auch gleichzeitig $B_{m+1} = 0$ sein.

IV. Es kann niemals gleichzeitig $A_m = 0$, $B_m = 0$ sein.

Aus der Zusammenfassung von III und IV ergiebt sich schliesslich:

V. Wird irgend ein Näherungsbruch $\frac{A_m}{B_m}$ sinnlos, so kann das nur in der Weise geschehen, dass $B_m = 0$, dagegen $A_m$ von Null verschieden. Zugleich kann dann keiner der benachbarten Näherungsbrüche $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, $\frac{A_{m+1}}{B_{m+1}}$ sinnlos werden.

## § 2.

Der Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst **convergent**, wenn $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n}$ eine bestimmte Zahl (incl. 0) vorstellt. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass zu einem convergenten Kettenbruche höchstens eine endliche Zahl von sinnlosen Näherungsbrüchen gehören kann, während andererseits die Zulässigkeit einer solchen endlichen Anzahl sinnloser Näherungsbrüche keineswegs ausgeschlossen erscheint.

Bekanntlich involvirt die Convergenz des obigen Kettenbruches durchaus nicht diejenige aller Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m \geqq 1$: mit anderen Worten, ein convergenter Kettenbruch kann — im Gegensatze zu einer convergenten Reihe oder einem convergenten Producte — durch Weglassung einer endlichen Anzahl von Anfangsgliedern divergent werden.[1])

Ich bezeichne nun den Kettenbruch $\left[b_0;\ \frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als **unbedingt convergent**, wenn $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für jedes $m \geqq 0$ convergirt; andererseits als **bedingt convergent**, wenn zwar $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ convergirt, dagegen unter den Kettenbrüchen $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m > 1$ mindestens ein divergenter sich befindet.[2])

[1]) Vgl. Stolz, a. a. O. S. 280. — Stern, Algebr. Analysis, S. 307. 482.

[2]) Besondere Benennungen zur ausdrücklichen Kennzeichnung dieser beiden verschiedenen Convergenz-Charaktere scheinen bisher nicht üblich geworden zu sein. Da ich solche — wie die folgenden Auseinandersetzungen des näheren zeigen — für äusserst wünschenswerth halten muss, so bediene ich mich der im Texte angegebenen Ausdrücke. Dieselben werden also hier in wesentlich anderer Bedeutung gebraucht, als in der Theorie der unendlichen Reihen und Producte, wo sie die

Da das Anfangsglied $b_0$ auf den Convergenz-Charakter des betreffenden Kettenbruches offenbar keinen Einfluss ausüben kann, so steht es frei, bei der weiteren Untersuchung der beiden angedeuteten Möglichkeiten von vornherein $b_0 = 0$ anzunehmen und somit von dem Kettenbruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auszugehen. Es werde dann wieder gesetzt:

$$(10) \qquad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^n = \frac{A_n}{B_n} \text{ für } n \geq 1;\ A_0 = 0,\ B_0 = 1,$$

und entsprechend für $m \geq 0$:

$$(11) \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^n = \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} \text{ für } n \geq m+1;\ A_{m,m} = 0,\ B_{m,m} = 1,$$

so dass also speciell: $A_{0,n} = A_n$, $B_{0,n} = B_n$ wird. Dabei sind die Beziehungen (10), (11) wiederum lediglich so zu verstehen, dass $A_n$, $B_n$ bezw. $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ die rein formal nach dem Vorbilde der Gleichungen (8) gebildeten Zähler und Nenner der betreffenden Näherungsbrüche bedeuten — gleichgültig, ob $B_n$, $B_{m,n}$ für jeden Werth $n$ von Null verschieden sind und ob die links stehenden Kettenbrüche ein Sinn haben oder nicht. Zwischen den $A_n$, $B_n$ und $A_{m,n}$, $B_{m,n}$ bestehen alsdann, wie leicht zu sehen, die Relationen:

$$(12) \qquad \begin{cases} A_n = B_{m,n} A_m + A_{m,n} A_{m-1} \\ B_n = B_{m,n} B_m + A_{m,n} B_{m-1} \end{cases} (n > m \geq 1).$$

Es werde nun der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ als convergent und sein Werth $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K$ vorläufig als von Null verschieden vorausgesetzt. Ueber die Convergenz oder Divergenz des

Existenz bezw. Nicht-Existenz des commutativen Charakters bezeichnen. Da bei der grundverschiedenen Bildungsweise der Kettenbrüche etwas derartiges überhaupt nicht in Frage kommen kann, so erscheint wohl jedes Missverständniss nach dieser Richtung von vornherein ausgeschlossen.

Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ $(m > 1)$ entscheidet auf Grund der oben gegebenen Definition lediglich das Verhalten von $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$. Hierbei sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Die $B_{m,n}$ sollen — zum mindesten von einer bestimmten Stelle $n \geqq n_0$ ab — durchweg von Null verschieden sein. Da in Folge der Convergenz von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ das analoge für die $B_n$ gilt, so stellen — zum mindesten für hinlänglich grosse $n$ — die Quotienten:

$$(13) \qquad \frac{A_n}{B_n} = K_n, \qquad \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = K_{m,n}$$

bestimmte Zahlen vor. Alsdann ergiebt sich aus (12) die Beziehung:

$$(14) \qquad K_n = \frac{A_m + K_{m,n} A_{m-1}}{B_m + K_{m,n} B_{m-1}}$$

und, da der Nenner der rechten Seite $\left(= \frac{B_n}{B_{m,n}}\right)$ wiederum von Null verschieden ist, so folgt weiter:

$$(15) \qquad (K_n \cdot B_{m-1} - A_{m-1}) \cdot K_{m,n} = -(K_n \cdot B_m - A_m)$$

also schliesslich für $\lim n = \infty$:

$$(16) \qquad (K \cdot B_{m-1} - A_{m-1}) \cdot \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty} = -(K \cdot B_m - A_m) \ (m \geqq 1)$$

Hieraus folgt aber, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ allemal convergirt, wenn $|K \cdot B_{m-1} - A_{m-1}| > 0$, d. h. wenn $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ von $K$ verschieden ausfällt (wobei es gleichgültig ist, ob $\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ eine bestimmte Zahl vorstellt oder sinnlos wird, da ja im letzteren Falle, nach § 1, V, $|A_{m-1}| > 0$ sein muss).

Ist dagegen $K \cdot B_{m-1} - A_{m-1} = 0$, d. h.:

$$\text{(17)} \qquad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = K = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n},$$

so muss offenbar $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ nach $\infty$ divergiren[1]) (da keinesfalls gleichzeitig $K \cdot B_m - A_m = 0$ sein kann, nämlich weder: $A_m = B_m = 0$ nach § 1, IV, noch: $\frac{A_m}{B_m} = K = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$ nach § 1, II).

II. Es mögen unter den $B_{m,n}$ unendlich viele den Werth 0 haben, etwa $B_{m,n_\nu} = 0$, wo $(n_\nu)$ für $\nu = 1, 2, 3 \ldots$ eine unbegrenzte Folge natürlicher Zahlen bedeutet. Alsdann ist ohne weiteres klar, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ keinesfalls convergiren kann. Man kann aber auch nicht sagen, dass er nach $\infty$ divergire, da ja unter den Näherungsbrüchen $\frac{A_{m,n}}{B_{m,n}}$ unendlich viele schlechthin sinnlos werden. Dagegen lässt sich nachweisen — und das scheint mir hierbei wesentlich — dass auch in diesem Falle[2]) die Gleichung (17) bestehen muss. Ersetzt man nämlich in Gl. (12) $n$ durch $n_\nu$, so folgt, wegen $B_{m,n_\nu} = 0$:

---

[1]) Darunter ist hier immer nur zu verstehen, dass der absolute Betrag von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ unendlich gross wird. Dagegen braucht, wenn z. B. die $a_\nu$, $b_\nu$ reell sind, der Kettenbruch keineswegs „eigentlich", d. h. nach $+\infty$ bezw. $-\infty$, zu divergiren, sondern könnte auch zwischen den Werthen $-\infty$ und $+\infty$ oscilliren.

[2]) Dass dieser zunächst nur als möglich erscheinende Fall auch wirklich vorkommt, d. h. dass es wirklich convergente Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^{\infty}$ giebt, für welche unendlich viele Näherungsbrüche $\frac{A_{m,n_\nu}}{B_{m,n_\nu}}$ sinnlos ausfallen, wird weiter unten gezeigt werden. Vorläufig bemerke man, dass aus:

$$\text{(19)} \qquad \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$$

(18) $$A_{n_\nu} = A_{m,n_\nu} \cdot A_{m-1} \qquad B_{n_\nu} = A_{m,n_\nu} \cdot B_{m-1}$$

und daher, weil $|A_{m,n_\nu}| > 0$ und für hinlänglich grosse $\nu$, etwa für $\nu \geqq \nu_0$ auch $|B_{n_\nu}| > 0$ sein muss:

(19) $$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} \quad (\nu = \nu_0,\ \nu_0 + 1,\ \nu_0 + 2, \ldots)$$

also schliesslich:

(20) $$\frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \lim_{\nu=\infty} \frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K, \text{ q. e. d.}$$

Bezeichnet man sodann mit $p_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) die nach Ausschluss der $m_\nu$ übrig bleibenden natürlichen Zahlen,[1]) so dass also durchweg $|B_{m,p_\nu}| > 0$, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gl. (20), wenn man in Gl. (15) $n = p_\nu$ setzt, dass die Folge der nicht-sinnlosen Kettenbrüche $\frac{A_{m,p_\nu}}{B_{m,p_\nu}}$ für $\lim \nu = \infty$ nach $\infty$ divergirt.

---

und den für $n = n_\nu$ aus (12) hervorgehenden Beziehungen:

$$A_{n_\nu} = B_{m,n_\nu} \cdot A_m + A_{m,n_\nu} \cdot A_{m-1}$$
$$B_{n_\nu} = B_{m,n_\nu} \cdot B_m + A_{m,n_\nu} \cdot B_{m-1}$$

stets auch umgekehrt folgt:

$$B_{m,n_\nu} = 0.$$

Denn wäre $|B_{m,n_\nu}| > 0$, so würde sich (gleichgültig, ob $|A_{m,n_\nu}| > 0$ oder $= 0$) allemal ergeben: $\frac{A_{n_\nu}}{B_{n_\nu}} = \frac{A_m}{B_m} = \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}}$, was nach § 1, II unmöglich ist. Besteht also Gl. (19) für unendlich viele $n_\nu$, so werden auch die unendlich vielen Näherungsbrüche $\frac{A_{m,n_\nu}}{B_{m,n_\nu}}$ sinnlos.

[1]) Die $p_\nu$ müssen allemal wirklich eine unendliche Menge bilden, da ja niemals zwei consecutive $B_{m,n}$ verschwinden können.

Ich will von einem Kettenbruche, der zwar unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche besitzt, während immerhin die Folge der übrigen nach $\infty$ divergirt, sagen: er divergire im wesentlichen nach $\infty$. Man hat dann für einen derartigen Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ zwar nicht $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \infty$ (sondern nur: $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{A_{m,p_\nu}}{B_{m,p_\nu}} = \infty$), dagegen: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = 0$. Bei Anwendung dieser Terminologie gilt nun der Satz:

Wenn $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ schlechthin oder im wesentlichen nach $\infty$ divergirt, so convergirt $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty}$ nach Null — und umgekehrt.

Für die nach Gl. (11) mit $A_{m-1,n}$, $B_{m-1,n}$ zu bezeichnenden Näherungsbruch-Zähler und -Nenner von $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m}^{\infty}$ gelten nämlich die Beziehungen:

$$(21) \qquad \begin{cases} A_{m-1,n} = a_m B_{m,n} \\ B_{m-1,n} = b_m B_{m,n} + A_{m,n}. \end{cases}$$

Folglich wird:

$$(22) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}} = \lim_{n=\infty} \frac{a_m \cdot \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}}}{1 + b_m \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}}} = 0, \quad \text{wenn: } \lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = 0.$$

Umgekehrt ergiebt sich:

$$(23) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{B_{m,n}}{A_{m,n}} = \lim_{n=\infty} \frac{\frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}}}{a_m - b_m \cdot \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}}} = 0, \quad \text{wenn: } \lim_{n=\infty} \frac{A_{m-1,n}}{B_{m-1,n}} = 0$$

(aber, im letzteren Falle, nicht nothwendig: $\lim\limits_{n=\infty} \frac{A_{m,n}}{B_{m,n}} = \infty$) — q. e. d.

Mit Hülfe dieses letzten Resultates lässt sich auch noch der oben vorläufig ausgeschlossene Fall: $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = K = 0$ unmittelbar erledigen. Da hier $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0$ wird, so folgt nämlich aus dem eben gesagten, dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach $\infty$ divergirt. Zugleich hat man — wegen $A_0 = 0$, $B_0 = 1$:

$$(24) \qquad \frac{A_0}{B_0} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} \quad (\text{nämlich} = 0),$$

d. h. es besteht Gl. (17) bezw. (20) für den besonderen Werth $m = 1$ und es divergirt auch (schlechthin oder im wesentlichen) $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ für $m = 1$, so dass also dieser Fall ohne weiteres unter die früher als I., II. bezeichneten subsumirt werden kann. Findet dann aber die Gleichung:

$$(25) \qquad \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = 0$$

für irgend einen weiteren Werth $m$ statt, so hat man $A_{m-1} = 0$, also $|A_m| > 0$, und erkennt analog wie früher aus Gl. (15) (mit der einzigen Modification, dass jetzt $\lim_{n=\infty} K_n = 0$ zu setzen ist), dass $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach $\infty$ divergirt; und in gleicher Weise ergiebt sich die Convergenz dieses Kettenbruches, falls für das betreffende $m$ die Gl. (25) nicht besteht, d. h. wenn $A_{m-1}$ von Null verschieden ist.

---

Durch Zusammenfassung dieser Resultate ergiebt sich nun, wenn man noch die bisher mit $m$ bezeichnete Zahl durch $m + 1$ ersetzt, der folgende Satz:

Ist $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K$ (wo $K$ endlich oder Null), so **convergirt** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ $(m \geqq 0)$, falls $\frac{A_m}{B_m}$ von $K$ verschieden (event. auch sinnlos) ausfällt; ist dagegen $\frac{A_m}{B_m} = K$, so **divergirt** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+2}^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach $\infty$, während dann $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ wird.

Und es folgt weiter:

Die **nothwendige und hinreichende** Bedingung für die **unbedingte** Convergenz des convergenten Kettenbruches $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = K$ besteht darin, dass für **keinen** Werth $m \geqq 0$ die Beziehung $\frac{A_m}{B_m} = K$ stattfindet. Convergirt der Kettenbruch nur bedingt, so existirt mindestens ein Werth $m$ derart, dass $\frac{A_m}{B_m} = K$ wird, d. h. der **unendliche** Kettenbruch: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ kann in diesem Falle durch den **endlichen:** $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ ersetzt werden.[1])

---

[1]) Dabei wird im Falle $K = 0$ auch $m = 0$, d. h. der im allgemeinen Falle $|K| > 0$ auftretende endliche Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ reducirt sich hier auf 0. Zugleich erkennt man, dass ein Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = 0$ nie anders als bedingt convergiren kann. Denn nach dem oben gesagten muss ja $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$ allemal schlechthin oder im wesentlichen nach $\infty$ divergiren. Man könnte danach die Definition der unbedingten

Hiernach besitzen also ausschliesslich unbedingt convergente Kettenbruch-Entwickelungen einer Zahl oder Function $K$ den Charakter einer gewissen analytischen Nothwendigkeit: jede der Zahlen $a_\nu$, $b_\nu$ steht, wie gross auch $\nu$ sein mag, zu $K$ in einer bestimmten, durch die vorangehenden Zahlen $a_0, b_0, \ldots a_{\nu-1}, b_{\nu-1}$ vermittelten Beziehung, in der $K$ selbst eine wesentliche Rolle spielt. Ist dagegen $K = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ (wo $|K| > 0$) nur bedingt convergent, so giebt es eine oder eine erste Zahl $m$ von der Beschaffenheit, dass: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m = K$, dagegen: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ wird. Hier besteht offenbar ein bestimmter Zusammenhang mit der Zahl $K$ nur für die Zahlen $a_1, b_1, \ldots a_m, b_m$, während alle übrigen $a_\nu$, $b_\nu$ $(\nu > m)$ von $K$ völlig unabhängig sind und nur der Bedingung $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty = 0$ zu genügen haben. Man könnte geradezu in dem Kettenbruche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, ohne seinen Werth zu verändern, alle Glieder $\frac{a_\nu}{b_\nu}$ für $\nu \geq m + 1$ durch unendlich viele andere Systeme $\frac{a'_\nu}{b'_\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ ersetzen, die bis auf die Bedingung $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty = 0$ als willkürlich anzusehen wären.

---

Ueber solche Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty = 0$ sei noch folgendes bemerkt. Aus dem oben gesagten geht hervor

---

Convergenz auch folgendermaassen fassen: Der convergente Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ heisst unbedingt convergent, wenn keiner der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{m+1}^\infty$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ nach Null convergirt.

(da $\frac{A_1'}{B_1'} = \frac{a_1'}{b_1'}$ sicher von $\left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_1^\infty$ d. h. 0 verschieden), dass $\left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_3^\infty$ convergiren muss. Und da andererseits $\left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_2^\infty$ schlechthin oder im wesentlichen nach $\infty$ divergirt, so folgt, dass:

$$(26)\qquad \left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_3^\infty = -b_2$$

sein muss. Besitzt nun der Kettenbruch die Eigenschaft, dass für keinen weiteren Werth $m$ (d. h. ausser für $m = 0$) die Beziehung besteht: $\frac{A_m'}{B_m'} = 0$, so convergirt jeder der Kettenbrüche $\left[\frac{a_\nu'}{b_\nu'}\right]_{m+1}^\infty$ für $m \geqq 2$, also convergirt der Kettenbruch (26) unbedingt. Man gewinnt also in diesem Falle aus der nur bedingt convergirenden Null-Entwickelung eine unbedingt convergirende für die Zahl $b_2$. Auf diese Weise hat z. B. Legendre[1]) die Entwickelung:

$$(27)\qquad -3 = \left[-\frac{\pi^2}{2\nu-1}\right]_3^\infty$$

abgeleitet, die ihm zum Beweise der Irrationalität von $\pi^2$ diente.

Ein analoger Schluss ist offenbar auch dann möglich, wenn für eine endliche Anzahl von Werthen $m$ die Relation $\frac{A_m'}{B_m'} = 0$ stattfindet.

Es ist aber auch der Fall denkbar, dass die Gleichung:

$$(28)\qquad \frac{A_{m_\nu}'}{B_{m_\nu}'} = 0$$

---

[1]) Éléments de Géométrie, Note IV. — Aus:

$$\operatorname{tang} x = \left[\frac{x}{1}, -\frac{x^2}{2\nu-1}\right]_2^\infty$$

folgt nämlich für $x = \pi$:

$$0 = \left[\frac{\pi}{1}, -\frac{\pi^2}{2\nu-1}\right]_2^\infty$$

(Stolz, a. a. O. S. 315. — Stern, a. a. O. S. 481. 482).

für eine unendliche Folge von Zahlen $m_\nu$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) stattfindet. Alsdann werden unter den Kettenbrüchen von der Form $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_{m+1}^{\infty}$ unendlich viele divergente vorkommen (nämlich alle für $m = m_\nu + 1$ resultirenden, so dass also der vorgelegte Kettenbruch selbst nach Abtrennung einer beliebig grossen Anzahl von Anfangsgliedern niemals einen unbedingt convergenten liefern kann.

Da diese Möglichkeit meines Wissens niemals erörtert worden ist, so dürfte es nicht überflüssig sein, nachzuweisen, dass der fragliche, zunächst nur als denkbar hingestellte Fall auch wirklich construirt werden kann.

Nach einer bekannten Euler'schen Formel[1]) hat man:

$$(29) \qquad s_n = \sum_1^n{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = \left[\frac{1}{q_1}, \; - \frac{q_{\nu-1}^2}{q_{\nu-1} + q_\nu}\right]_2^n = \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^n$$

und hieraus resultirt für $\lim n = \infty$, falls $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu}$ convergirt, die Transformation dieser Reihe in einen aequivalenten Kettenbruch, d. h. einen solchen, dessen Näherungsbrüche $\frac{A'_n}{B'_n}$ mit den Partialsummen $s_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) übereinstimmen. Wählt man also die betreffende Reihe in der Weise, dass $\sum_1^\infty{}^\nu \frac{1}{q_\nu} = 0$ und ausserdem für unendlich viele Zahlen $m_\nu$ die Beziehung besteht: $s_{m_\nu} = 0$, so wird auch allemal $\frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}} = 0$. Eine solche Wahl lässt sich aber auf unendlich viele Arten mit Leichtigkeit bewerkstelligen: es braucht nur $s_{m_\nu} = 0$ und für $\nu \geq 1$: $s_{m_\nu} - s_{m_{\nu-1}} = 0$ angenommen zu werden, d. h. die Reihe muss aus lauter Gliedergruppen mit der Summe 0 bestehen, wobei man noch, um durchweg von Null verschie-

[1]) Introductio, T. I, § 369.

dene $b'_\nu$ zu erhalten, vermeiden wird, dass für irgendwelche Werthe von $\nu$: $q_{\nu-1} + q_\nu = 0$ sich ergiebt. Man setzeze z. B.

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty{}^{\nu} \frac{1}{q_\nu} &= \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} + \dots \\ (30) \qquad &+ \frac{1}{c_{2\nu-1}} + \frac{1}{c_{2\nu}} - \frac{1}{c_{2\nu-1}} - \frac{1}{c_{2\nu}} + \dots,\end{aligned}$$

so wird diese Ruhe stets convergiren, wenn nur $\lim_{\nu=\infty} |c_\nu| = \infty$.

Zugleich hat man für alle möglichen $\nu$: $s_{4\nu} = \frac{A'_{4\nu}}{B'_{4\nu}} = 0$.

Man kann also thatsächlich in unbegrenzter Zahl Kettenbrüche $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ angeben, bei denen für unendlich viele Werthe $m_\nu$ die Relation besteht:

$$(31) \qquad 0 = \frac{A'_0}{B'_0} = \frac{A'_{m_\nu}}{B'_{m_\nu}}.$$

Aus einer früher gemachten Bemerkung (S. 4, Fussnote 2) geht dann noch hervor, dass in diesem Falle der Kettenbruch $\left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_2^\infty$ unendlich viele sinnlose Näherungsbrüche liefert, indem nämlich durchweg $B'_{1,m_\nu} = 0$ wird (der betr. Kettenbruch divergirt also nur „im wesentlichen" nach $\infty$). Dieses Resultat lässt sich auch ohne weiteres auf einen Kettenbruch mit beliebigem von Null verschiedenen Werthe $K$ übertragen: man braucht nur an irgend einen $m$-gliedrigen Kettenbruch $K = \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^m$ einen Kettenbruch der eben betrachteten Art anzuhängen, indem man $b_m$ durch $b_m + \left[\frac{a'_\nu}{b'_\nu}\right]_1^\infty$ ersetzt. Damit ist schliesslich auch der Nachweis erbracht, dass dem oben unter II als möglich angenommenen Falle reale Existenz zukommt.

---

## § 3.

Elementare Convergenz-Kriterien von einiger Allgemeinheit hat man, wie Herr Stolz in seinen „Vorlesungen über Allgemeine Arithmetik" ausdrücklich hervorhebt,[1]) nur für Kettenbrüche mit reellen, gleichbezeichneten Gliedern, d. h. für solche von der Form $\left[\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[-\frac{p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$, wo die $p_\nu$, $q_\nu$ wesentlich positive reelle Zahlen bedeuten.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der ersteren besteht, wie Seidel[2]) und Stern[3]) gezeigt haben, in der Divergenz der Reihe $\sum d_\nu$, wo:

$$(32) \quad d_{2\nu} = \frac{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu-1}}{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}} \cdot q_{2\nu}, \quad d_{2\nu+1} = \frac{p_2 p_4 \ldots p_{2\nu}}{p_1 p_3 \ldots p_{2\nu+1}} \cdot \frac{q_{2\nu+1}}{p_{2\nu+1}}.$$

Daraus ergiebt sich dann als eine hinreichende Convergenz-Bedingung von merklich einfacherer Form die Divergenz der Reihe: $\sum \frac{q_\nu q_{\nu+1}}{p_\nu}$.[4])

Was die Kettenbrüche der zweiten Kategorie betrifft, so hat Seidel[5]) für den besonderen Fall $p_\nu = 1$, Stern[6]) für den allgemeineren beliebiger positiver $p_\nu$ die hinreichende Convergenz-Bedingung aufgefunden:

$$(33) \quad q_\nu - p_\nu > 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Im folgenden soll nun gezeigt werden, dass diese Convergenz-Bedingung mutatis mutandis für ganz beliebige Kettenbrüche gilt, d. h. dass bei beliebigen reellen oder

---

1) A. a. O. S. 280.

2) Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Kettenbrüche. Doctor-Dissertation, München 1846.

3) Journ. f. Math. Bd. 37 (1848), S. 264. 266.

4) Stolz, a. a. O. S. 284.

5) Abh. d. Bayr. Ak., 2. Cl., Bd. VII (1855), S. 582.

6) Algebr. Analysis, S. 301.

complexen $a_\nu$, $b_\nu$ der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ allemal convergirt (und zwar unbedingt), wenn:

(34) $$|a_\nu| - |b_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$ [1]

Zugleich lassen sich aus diesem Convergenz-Kriterium durch passende Transformationen noch andere ableiten, welche nicht als specielle Fälle darin enthalten sind. Ich beweise den fraglichen Hauptsatz zunächst für Kettenbrüche von etwas speciellerer Form, nämlich:

Sind $p_\nu$, $q_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ beliebige **positive** Zahlen, welche durchweg der Bedingung genügen:

$$q_\nu - p_\nu \geqq 1,$$

[1]) Wie ich nachträglich aus einer kurzen Notiz im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik Bd. 21 (1892), S. 186 ersehe, hat Herr J. W. Sleschinski die Convergenz-Bedingung aufgestellt:

$$|a_\nu| - |b_\nu| > 1$$

(also, wie es scheint, mit Ausschluss des weiter unten noch besonders vortheilhaft zu verwerthenden Falles der Gleichheit). In dem citirten Referate wird lediglich dieses Factum ohne jeden weiteren Zusatz angeführt, und es ist nicht einmal zu ersehen, ob die $a_\nu$, $b_\nu$ nur reelle oder auch complexe Zahlen bedeuten. Die in russischer Sprache geschriebene und in der Moskauer Math. Sammlung publicirte Arbeit selbst ist mir bisher nicht zugänglich gewesen. Das gleiche gilt von einer anderen in dem nämlichen Referate erwähnten Arbeit desselben Verfassers, in welcher für Kettenbrüche von der Form $\left[\frac{c_\nu}{1}\right]_1^\infty$ die Convergenz-Bedingung $\lim_{\nu=\infty} c_\nu = 0$ angegeben wird. Die letztere ist in dieser Form sicherlich unrichtig. Denn, sieht man von dem besonderen Falle ab, dass der Kettenbruch lauter positive Theilzähler und Theilnenner besitzt, so üben ja die Anfangsglieder, wie aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen des näheren hervorgeht, einen ganz wesentlichen Einfluss auf die Convergenz des Kettenbruches. Aus einer Bedingung, die sich nur auf das Verhalten der Kettenbruch-Glieder im Unendlichen bezieht, kann also höchstens auf die Convergenz des Kettenbruches von einer gewissen (nicht einmal angebbaren) Stelle geschlossen werden. Im übrigen stellt die obige Bedingung (mit der angemessenen Correctur) nur einen sehr speciellen Fall der weiter unten (Ungl. (78)) von mir aufgestellten: $|c_\nu| \leqq \frac{1}{4}$ dar.

$\varepsilon_\nu (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ reelle oder complexe Zahlen mit dem absoluten Betrage 1, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent. Setzt man sodann: $\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = K$, so ist $K = \varepsilon_1$, wenn die Reihe $\sum p_1 p_2 \ldots p_\nu$ **divergirt** und ausserdem für jedes $\nu \geqq 1$:

$$q_\nu - p_\nu = 1, \qquad \varepsilon_{\nu+1} = -1;$$

dagegen hat man in **jedem** anderen Falle: $0 < |K| < 1$.

Beweis. Bezeichnet man mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ die Näherungsbrüche des obigen Kettenbruches, so wird zunächst:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{q_1}$$

also:

(35) $$|Q_0| = 1 \qquad |Q_1| = q_1 \geqq 1 + p_1$$

und daher:

(36) $$|Q_1| - |Q_0| \geqq p_1 > 0.$$

Da sodann für $\nu \geqq 2$ die Beziehung besteht:

(37) $$Q_\nu = q_\nu \cdot Q_{\nu-1} + \varepsilon_\nu p_\nu Q_{\nu-2},$$

so folgt:

$$|Q_\nu| \geqq (1 + p_\nu) \cdot |Q_{\nu-1}| - p_\nu |Q_{\nu-2}|$$

oder:

(38) $$|Q_\nu| - |Q_{\nu-1}| \geqq p_\nu \{|Q_{\nu-1}| - |Q_{\nu-2}|\}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Substitution von $(\nu - 1), (\nu - 2), \ldots 2$ an Stelle von $\nu$:

(39) $$\begin{cases} |Q_{\nu-1}| - |Q_{\nu-2}| \geqq p_{\nu-1} \{|Q_{\nu-2}| - |Q_{\nu-3}|\} \\ |Q_{\nu-2}| - |Q_{\nu-3}| \geqq p_{\nu-2} \{|Q_{\nu-3}| - |Q_{\nu-4}|\} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ |Q_2| - |Q_1| \geqq p_2 \{|Q_1| - |Q_0|\} \geqq p_2 p_1. \end{cases}$$

Diese Ungleichungen lehren zunächst, dass sämmtliche Differenzen von der Form $|Q_\nu| - |Q_{\nu-1}|$ wesentlich positiv sind, d. h. die $|Q_\nu|$ nehmen mit $\nu$ monoton zu. Durch successive Einführung der Gleichungen (39) in (38) findet man alsdann:

$$(40) \qquad |Q_\nu| - |Q_{\nu-1}| > p_1 p_2 \ldots p_\nu.$$

Wird hier nochmals für $\nu$ der Reihe nach $(\nu-1), (\nu-2) \ldots 2$ gesetzt, so folgt durch Addition der sämmtlichen resultirenden Ungleichungen zu Ungl. (40):

$$(41) \qquad |Q_\nu| - |Q_1| \geqq p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu,$$

und hieraus schliesslich mit Berücksichtigung von (35):

$$(42) \qquad |Q_\nu| \geqq 1 + p_1 + p_1 p_2 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu.$$

Man bemerke, dass in dieser Relation das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn in den sämmtlichen zu ihrer Herleitung benützten Relationen (35), (38) ebenfalls das Gleichheitszeichen steht. Hierzu ist aber nothwendig und hinreichend, dass erstens:

$$(43) \qquad q_\nu = 1 + p_\nu \text{ für alle } \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

und zweitens:

$$(44) \qquad \varepsilon_\nu = -1 \text{ für alle } \nu = 2, 3, 4, \ldots$$

(s. den Uebergang von Gl. (37) zu der darauf folgenden Ungleichung). Nur in diesem Falle wird also:

$$(42a) \qquad |Q_\nu| = 1 + p_1 + p_1 p_2 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu$$

in jedem anderen:

$$(42b) \qquad |Q_\nu| > 1 + p_1 + p_1 p_2 + \cdots + p_1 p_2 \ldots p_\nu = s_\nu.^{1)}$$

Nun ist bekanntlich:

$$(45) \qquad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \lim_{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{Q_\nu} = \frac{\varepsilon_1 p_1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}_\nu (-1)^{\nu-1} \cdot \frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu}{Q_{\nu-1} Q_\nu}$$

1) Das Zeichen $>$ gilt dann, wie leicht zu sehen, auch noch für $\lim \nu = \infty$.

oder, wenn man:

$$p_1 p_2 \dots p_\nu = s_\nu - s_{\nu-1}, \qquad p_1 = s_1 - 1$$

substituirt:

$$(46) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \cdot \frac{s_1 - 1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}^\nu (-1)^{\nu-1} \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_\nu \cdot \frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_\nu},$$

und somit:

$$(47) \quad \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| \leq \frac{s_1 - 1}{Q_1} + \sum_2^\infty{}^\nu \frac{s_\nu - s_{\nu-1}}{Q_{\nu-1} Q_\nu}.$$

Sieht man zunächst von dem durch Gl. (43), (44) charakterisirten Specialfalle ab, so ergiebt sich mit Benützung von Ungl. (42b):

$$(48) \quad \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1 - \frac{1}{s_1} + \sum_2^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{s_{\nu-1}} - \frac{1}{s_\nu}\right) = 1 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{s_\nu}$$

(mit Ausschluss der Gleichheit). Hieraus folgt, dass die Reihe (46) absolut convergirt; es convergirt also auch der Kettenbruch und wie Ungl. (48) lehrt, ist sein absoluter Werth $< 1$ (gleichgültig ob $\lim \frac{1}{s_\nu} = 0$ oder $> 0$).

Sind dagegen die Special-Bedingungen (43), (44) erfüllt, so geht durch Einführung von Gl. (44) und (42b) die Beziehung (46) in die folgende über:

$$(49) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \left\{1 - \frac{1}{s_1} + \sum_2^\infty{}^\nu \left(\frac{1}{s_{\nu-1}} - \frac{1}{s_\nu}\right)\right\} = \varepsilon_1 \left(1 - \lim_{\nu=\infty} \frac{1}{s_\nu}\right).$$

Ist also die Reihe $1 + p_1 + \sum_2^\infty{}^\nu p_1 p_2 \dots p_\nu = \lim_{\nu=\infty} s_\nu$ convergent, etwa $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = s$ (wo: $s > 1$), so wird:

$$(50) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty = \varepsilon_1 \left(1 - \frac{1}{s}\right), \text{ also wiederum: } \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| < 1.$$

Ist dagegen die obige Reihe divergent, d. h. $\lim_{\nu=\infty} s_\nu = \infty$, so wird:

$$(51) \quad \left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right] = \varepsilon_1, \text{ d. h. in diesem einzigen Falle: } \left|\left[\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{q_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Da die vorstehenden Betrachtungen auch gültig bleiben, wenn man den Kettenbruch statt mit dem Gliede $\frac{\varepsilon_1 p_1}{q_1}$ mit einem beliebigen späteren Gliede beginnen lässt, so ergiebt sich, dass seine Convergenz eine unbedingte ist. Daraus folgt schliesslich noch, dass sein Werth $K$ stets von Null verschieden ausfällt. Damit ist aber der oben ausgesprochene Satz in allen Theilen bewiesen.

---

Ist jetzt der Kettenbruch in der Form vorgelegt $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$, wo $a_\nu$, $b_\nu$ beliebige reelle oder complexe Zahlen, so werde gesetzt:

$$(52) \quad \begin{cases} a_\nu = \alpha_\nu \cdot |a_\nu| & \text{wo also: } |\alpha_\nu| = 1 \\ b_\nu = \beta_\nu \cdot |b_\nu| & \quad " \quad " \quad |\beta_\nu| = 1. \end{cases}$$

Alsdann hat man:

$$(53) \quad \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{\alpha_\nu \cdot |a_\nu|}{\beta_\nu \cdot |b_\nu|}\right]_1^\infty = \left[\frac{\frac{\alpha_1}{\beta_1} \cdot |a_1|}{|b_1|}, \; \frac{\frac{\alpha_\nu}{\beta_{\nu-1}\beta_\nu} \cdot |a_\nu|}{|b_\nu|}\right]_2^\infty.$$

Damit ist der vorgelegte Kettenbruch auf die zuvor betrachtete Form gebracht und der oben bewiesene Satz kann daher jetzt auch folgendermaassen ausgesprochen werden:

Bedeuten $a_\nu$, $b_\nu$ reelle oder complexe Zahlen mit den Charakteristiken[1]) $\alpha_\nu$, $\beta_\nu$, so ist der Kettenbruch $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent, wenn:

---

[1]) Ich pflege die Zahl $\frac{a}{|a|}$ als die Charakteristik von $a$ zu bezeichnen. (Math. Ann. Bd. 33 (1889), S. 124).

(54) $$|a_\nu| - |b_\nu| \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sein absoluter Werth ist stets $< 1$, ausser wenn durchweg:

(55) $$|a_\nu| - |b_\nu| = 1, \quad \beta_\nu \beta_{\nu+1} = - a_{\nu+1} \quad (\nu \geqq 1),$$

und $\sum |a_1 a_2 \ldots a_\nu|$ divergirt. In diesem einen Falle wird:

(56) $$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \frac{a_1}{\beta_1}, \quad \text{also:} \quad \left|\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty\right| = 1.$$

Es ist leicht ersichtlich, in welcher Weise dieser Satz zu modificiren ist, falls die Convergenz-Bedingung (54) erst für $\nu \geqq m$ (wo $m > 1$ erfüllt ist.

---

## § 4.

Mit Hülfe des eben bewiesenen Satzes lässt sich der bekannte Legendre'sche Irrationalitäts-Satz folgendermaassen formuliren:[1])

Sind $g_\nu$, $h_\nu$ positive ganze Zahlen, welche der Bedingung genügen:[2])

(57) $$h_\nu - g_\nu \geqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3 \ldots),$$

und bedeutet $\varepsilon_\nu$ für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ ganz nach Belieben die positive oder negative Einheit, so con-

---

[1]) Genau genommen ist dies im wesentlichen diejenige Form, in welcher Legendre den fraglichen Satz schon ausgesprochen, aber in der Hauptsache nicht bewiesen hat. Vgl. die bezüglichen Bemerkungen in der folgenden Mittheilung: „Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von $e$ und $\pi$", p. 336.

[2]) Hat man durchweg $\varepsilon_\nu = +1$, so genügt bekanntlich für die Convergenz des Kettenbruches und die Irrationalität seines Werthes schon die Bedingung: $h_\nu - g_\nu \geqq 0$. Vgl. Stolz, a. a. O. S. 297.

vergirt der Kettenbruch $\left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty$ stets gegen einen **irrationalen** Werth, sofern nicht durchweg:

(58) $h_\nu - g_\nu = 1, \; \varepsilon_{\nu+1} = -1$ für $\mu > m$ (wo: $m \geq 1$).

Im letzteren Falle wird: $\varepsilon_1 \cdot \left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_1^\infty = 1$ bezw. ein rationaler ächter Bruch, je nachdem $m = 1$ bezw. $m > 1$.

Beweis. Da der Kettenbruch nach dem Satze des § 3 unbedingt convergirt, so kann gesetzt werden:

(59) $$\left[\frac{\varepsilon_\nu g_\nu}{h_\nu}\right]_{m+1}^\infty = K_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo die $K_m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$) bestimmte Zahlen von der Beschaffenheit bedeuten, dass im allgemeinen $|K_m| < 1$, nur in dem durch die Gleichungen (58) charakterisirten Specialfalle $K_m = \varepsilon_m$.[1]) Daraus folgt dann unmittelbar die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptungen, soweit sie sich auf den genannten Specialfall beziehen.

Sind nun die fraglichen Special-Bedingungen nicht erfüllt, so hat man für jeden Werth von $m$ ($m = 0, 1, 2, \ldots$): $|K_m| < 1$ (mit Ausschluss der Gleichheit). Aus der Annahme: $K_0 = \frac{p}{q}$, wo $p \leq q - 1$ sein müsste, würde dann folgen:

(60) $$\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon_1 g_1}{h_1 + K_1}$$

also:

(61) $$K_1 = \frac{\varepsilon_1 g_1 q - h_1 p}{p} \text{ und zugleich: } 0 < |K_1| < 1,$$

d. h. $K_1$ wäre ein ächter Bruch, dessen Nenner höchstens $= q - 1$ sein könnte. Durch Uebertragung dieser Schlussweise auf $K_2, K_3, \ldots$ gelangt man also zu dem Resultate, dass $K_m$, wo $m$ höchstens $= q - 1$ sein könnte, ein ächter

---

[1]) Die für die Existenz dieser letzteren Beziehung noch erforderliche Bedingung, dass $\sum g_1 g_2 \ldots g_\nu$ divergirt, ist hier wegen $g_\nu \geq 1$ eo ipso erfüllt.

Bruch mit dem Nenner 1 sein müsste, was absurd ist. Somit kann in dem betrachteten Falle $K_0$ nur eine Irrationalzahl (wie leicht zu sehen, mit dem Vorzeichen $\varepsilon_1$) sein.

Es hat wiederum keine Schwierigkeit, den vorstehenden Satz auf den Fall zu übertragen, dass die Haupt-Bedingung (57) erst für $\nu > m$, wo $m > 1$, erfüllt ist.

---

## § 5.

Ich wende jetzt das in § 3 aufgestellte Convergenz-Kriterium auf die besonders häufig vorkommenden Kettenbruch-Formen $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ und $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ an. Die unmittelbare Anwendung desselben auf den ersten dieser beiden Typen liefert die Convergenz-Bedingung:

$$|b_\nu| \geqq 2. \tag{62}$$

Auf den zweiten Typus lässt sich das fragliche Kriterium überhaupt nicht direct, sondern erst durch Vermittelung der Transformation in einen aequivalenten Kettenbruch anwenden. Das nämliche Hülfsmittel giebt auch für den ersten Typus eine Convergenz-Bedingung von etwas grösserer Allgemeinheit als die direct abgeleitete Bedingung (62).

Bezeichnet man mit $c_\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) beliebige von Null verschiedene Zahlen, so hat man bekanntlich:

$$\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\pm\frac{c_1}{c_1 b_1}, \pm\frac{c_{\nu-1}c_\nu}{c_\nu b_\nu}\right]_2^\infty \tag{63}$$

und, wenn man speciell $c_{2\nu} = 1$ ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$) setzt:

$$\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty = \pm\frac{c_1|}{|c_1 b_1} \pm \frac{c_1|}{|b_2} \pm \ldots \pm \frac{c_{2\nu-1}|}{|c_{2\nu-1}b_{2\nu-1}} \pm \frac{c_{2\nu-1}|}{|b_{2\nu}} \pm \ldots \tag{64}$$

Nimmt man sodann die $c_{2\nu-1}$ als reell und positiv an, so folgt, dass der Kettenbruch convergirt, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\begin{cases} c_{2\nu-1} \cdot |b_{2\nu-1}| - c_{2\nu-1} \geqq 1 \\ \qquad\quad |b_{2\nu}| - c_{2\nu-1} = 1. \end{cases} \tag{65}$$

Aus der zweiten dieser Bedingungen findet man:

$$c_{2\nu-1} = |b_{2\nu}| - 1, \tag{66}$$

so dass die erste in die folgende übergeht:

$$\{|b_{2\nu-1}| - 1\} \cdot \{|b_{2\nu}| - 1\} \geqq 1 \tag{67}$$

oder anders geschrieben:

$$\left|\frac{1}{b_{2\nu-1}}\right| + \left|\frac{1}{b_{2\nu}}\right| \leqq 1 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{68}$$

Die Form dieser Bedingung zeigt unmittelbar, dass dann mit dem Kettenbruche $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ auch alle diejenigen von der Form: $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ convergiren. Da aber der absolute Werth eines jeden dieser Kettenbrüche nach dem Satze des § 3 die Einheit nicht übersteigt und andererseits die Bedingung (68) allemal die folgende involvirt: $|b_{2n}| > 1$, so ist $\left[b_{2n};\ \pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n+1}^\infty$ stets von Null verschieden, also auch jeder Kettenbruch von der Form: $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_{2n}^\infty$ convergent. Somit gewinnt man den Satz:

> Genügen die (reellen oder complexen) Zahlen $b_\nu$ der Bedingung (68), so ist der Kettenbruch $\left[\pm\frac{1}{b_\nu}\right]_1^\infty$ **unbedingt** convergent.

Die ursprünglich aufgefundene Convergenz-Bedingung (62) ist offenbar als specieller Fall in (68) enthalten.[1])

---

[1]) Eine noch etwas speciellere, nämlich: $|b_\nu| > 2 + \varepsilon$, wo $\varepsilon > 0$, hat Herr S. Pincherle angegeben: Rendicenti Accad. dei Lincei, Serie 4, Vol. V (1889), p. 640.

Nach Analogie von Gl. (63) hat man ferner:

$$(69) \qquad \left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \left[\pm\frac{c_1 a_1}{c_1},\ \pm\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{c_\nu}\right]_2^\infty.$$

Eine einfache Ueberlegung zeigt, dass sich hier die Wahl $c_{2\nu} = 2$ ($\nu = 1, 2, 3 \ldots$) als zweckmässig erweist. Alsdann wird zunächst, wenn man der Symmetrie halber den Kettenbruch noch mit 2 multiplicirt:

$$(70) \qquad \begin{aligned} 2\cdot\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty = \pm\frac{2c_1 a_1|}{|c_1} \pm \frac{2c_1 a_2|}{|2} \pm \ldots \\ \pm\frac{2c_{2\nu-1}a_{2\nu-1}|}{|c_{2\nu-1}} \pm \frac{2c_{2\nu-1}a_{2\nu}|}{|2} \pm \ldots, \end{aligned}$$

so dass bei reellen positiven Werthen der $c_{2\nu-1}$ der Kettenbruch sicher convergirt, wenn für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$:

$$(71) \qquad \begin{cases} c_{2\nu-1} - 2c_{2\nu-1}\cdot|a_{2\nu-1}| \geqq 1 \\ \quad 2 - 2c_{2\nu-1}\cdot|a_{2\nu}| = 1. \end{cases}$$

Aus der zweiten dieser Bedingungen folgt sodann:

$$(72) \qquad c_{2\nu-1} = \frac{1}{2|a_{2\nu}|},$$

wodurch sich die erste auf die folgende reducirt:

$$\frac{1}{2|a_{2\nu}|}\cdot\{1 - 2\cdot|a_{2\nu-1}|\} \geqq 1,$$

d. h.

$$(73) \qquad |a_{2\nu-1}| + |a_{2\nu}| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Auch hier ergiebt sich wiederum aus der Form dieser Bedingung, dass gleichzeitig mit dem Kettenbruche: $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_1^\infty$ auch alle möglichen: $\left[\pm\frac{a_\nu}{1}\right]_{2n+1}^\infty$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) convergiren. Da aber, wie Gl. (70) lehrt (wenn man darin den Index 1 durch $2n+1$ ersetzt), hier das Doppelte jedes solchen

Kettenbruches der Convergenz-Bedingung des § 3 genügt und daher, absolut genommen, die Einheit nicht übersteigt, so ist $\left[1; \pm \frac{a_\nu}{1}\right]_{2n+1}^{\infty}$ stets von Null verschieden, folglich $\left[\pm \frac{a_\nu}{1}\right]_{2n}^{\infty}$ convergent und daher $\left[\pm \frac{a_\nu}{1}\right]_{1}^{\infty}$ unbedingt convergent.

Dabei lässt sich schliesslich die Anfangs-Bedingung der Serie (73), d. h.

$$(74) \qquad |a_1| + |a_2| \leq \tfrac{1}{2}$$

noch vereinfachen. Da nämlich die Convergenz des Kettenbruches nicht alterirt wird, wenn man denselben mit einem beliebigen von Null verschiedenen Factor multiplicirt, so kann man in der Bedingung (74) $|a_1|$ ohne weiteres auch durch $\varepsilon \cdot |a_1|$ ersetzen. Nimmt man hier für $\varepsilon$ eine hinlänglich kleine positive Zahl, so wird die Bedingung

$$(75) \qquad \varepsilon \cdot |a_1| + |a_2| \leq \tfrac{1}{2}$$

immer erfüllt sein, sofern nur:

$$(76) \qquad |a_2| < \tfrac{1}{2} \text{ (mit Ausschluss der Gleichheit).}$$

Somit ergiebt sich der folgende Satz:

Genügen die (reellen oder complexen) Zahlen $a_\nu$ den Bedingungen:

$$(77) \quad |a_2| < \tfrac{1}{2}, \ |a_{2\nu+1}| + |a_{2\nu+2}| \leq \tfrac{1}{2} \ (\nu = 1, 2, 3, \ldots),$$

so ist der Kettenbruch $\left[+ \frac{a_\nu}{1}\right]_{1}^{\infty}$ unbedingt convergent.

Als einfachere, aber offenbar weniger allgemeine Form der Convergenz-Bedingung ergiebt sich dann aus (77) noch unmittelbar die folgende:

$$(78) \qquad |a_2| < \tfrac{1}{2}, \quad |a_\nu| \leq \tfrac{1}{4} \ (\nu > 3).$$

---

Der zuletzt gewonnene Satz kann benützt werden, um eine neue Convergenz-Bedingung für Kettenbrüche von der allgemeinen Form: $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty$ abzuleiten. Transformirt man nämlich diesen Kettenbruch in einen aequivalenten von dem eben betrachteten Typus, so wird:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{a_1 : b_1}{1}, \; \frac{a_\nu : b_{\nu-1} b_\nu}{1}\right]_2^\infty. \tag{79}$$

Der letztere Kettenbruch und somit auch der vorgelegte convergirt aber unbedingt,[1]) wenn (Ungl. (77)):

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_{2\nu+1}}{b_{2\nu} b_{2\nu+1}}\right| + \left|\frac{a_{2\nu+2}}{b_{2\nu+1} b_{2\nu+2}}\right| \leqq \tfrac{1}{2} \quad (\nu \geqq 1) \tag{80}$$

oder auch, etwas weniger allgemein (Ungl. (78)):

$$\left|\frac{a_2}{b_1 b_2}\right| < \tfrac{1}{2}, \quad \left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right| \leqq \tfrac{1}{4} \quad (\nu \geqq 3). \tag{81}$$

Die vorstehenden Convergenz-Bedingungen tragen offenbar einen wesentlich anderen Charakter als die früher aufgestellte (Ungl. (54)), da hier nicht mehr die Differenzen der einzelnen $|a_\nu|$, $|b_\nu|$, sondern lediglich die Verhältnisse $\left|\frac{a_\nu}{b_{\nu-1} b_\nu}\right|$ in Betracht kommen. Dieselben gestatten mancherlei functionen-

[1]) Convergirt der eine von zwei aequivalenten Kettenbrüchen unbedingt, so gilt dies offenbar auch von dem anderen. Denn aus:

$$\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_1^\infty = \left[\frac{c_1 a_1}{b_1}, \; \frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_2^\infty$$

folgt für $n \geqq 1$:

$$c_n \cdot \left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty = \left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty,$$

so dass also gleichzeitig mit $\left[\frac{a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty$ auch $\left[\frac{c_{\nu-1} c_\nu a_\nu}{b_\nu}\right]_{n+1}^\infty$ convergirt — vice versa.

theoretische Anwendungen, auf die ich bei anderer Gelegenheit einzugehen gedenke. Hier sei nur noch erwähnt, dass die folgende Convergenz-Bedingung:

$$(82) \qquad \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} \left| \frac{a_\nu}{b_{\nu-1}\, b_\nu} \right| < \tfrac{1}{2},$$

welche Herr Helge von Koch mit Hülfe von unendlichen Kettenbruch-Determinanten zu functionentheoretischen Zwecken abgeleitet hat,[1]) offenbar als ein sehr specieller Fall der Bedingung (80) erscheint.

[1]) Comptes rendus, T. 120 (1895), p. 145.

# Ueber die ersten Beweise der Irrationalität von $e$ und $\pi$.

Von **Alfred Pringsheim.**

(*Eingelaufen 1. August.*)

So viel mir bekannt ist, hat sich ganz allgemein die Ansicht herausgebildet, dass der erste Beweis für die Irrationalität von $e$ und $\pi$, $e^x$ und tang $x$ (wo $x$ ein für allemal eine rationale Zahl bedeuten soll) von Lambert herrühre, dass indessen dieser Beweis erst durch Legendre die nöthige Vollständigkeit und Strenge erhalten habe.[1]) Ein genaueres Studium der betreffenden Literatur hat mich indessen zu der Ueberzeugung geführt, dass diese Ansicht in mehrfacher Beziehung einer Modification bedarf, nämlich:

1. Die Irrationalität von $e$ und $e^2$ ist schon von Euler im Jahre 1737, d. h. 30 Jahre vor Lambert, im wesentlichen bewiesen worden. Zugleich giebt auch Euler schon diejenigen allgemeinen Kettenbruch-Entwickelungen, auf denen der Lambert'sche bezw. Legendre'sche Irrationalitäts-Beweis für $e^x$, tang $x$ und $\pi$ beruht.

2. Lambert hat, ohne diese Euler'schen Entwickelungen zu kennen, die Irrationalität von $e^x$, tang $x$ und $\pi$ vollständig

---

[1]) Vgl. z. B. Stolz, Vorl. über Allg. Arithmetik, Bd. II (1886), S. 325, Note 16. — Bachmann, Vorl. über die Natur der Irrationalzahlen (1892), S. 53. — Rudio, Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. (1892), S. 55. 56. — F. Klein, Vortr. über ausgew. Fragen der Elem.-Geometrie (1895), S. 46.

und mit einer für die damalige Zeit (1767) geradezu exceptionellen Strenge bewiesen.

3. Das Verdienst Legendre's beschränkt sich auf einen allerdings sehr glücklichen und an sich werthvollen, aber bei Legendre auf durchaus unbewiesener Grundlage ruhenden Gedanken, welcher keineswegs eine Vervollständigung des angeblich unzulänglichen Lambert'schen Beweises, sondern lediglich eine mässige Abkürzung desselben liefert und ausserdem auch gestattet, den Irrationalitäts-Beweis auf $\pi^2$ auszudehnen. Im übrigen ist Legendre von der klaren und tiefen Einsicht Lambert's, dass Betrachtungen der fraglichen Art ohne die nöthigen Convergenz-Beweise eigentlich werthlos sind, sehr weit entfernt.

Im folgenden will ich nun versuchen, die vorstehenden Behauptungen näher zu begründen.

---

Dass sich bereits in Euler's „Introductio" (1753) die Kettenbruch-Entwickelung findet:[1])

$$(1)\quad \frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \frac{1|}{|18} + \frac{1|}{|22} + \cdots$$

d. h. nach der in der vorangehenden Mittheilung von mir benützten Schreibweise:

$$(2)\quad \frac{e-1}{2} = \left[\frac{1}{1}, \; \frac{1}{2+4\nu}\right]_1^\infty,$$

ist wohl allgemein bekannt. Als weniger bekannt hebt Herr Rudio in seiner anregenden und lehrreichen Abhandlung über die Geschichte der Kreis-Quadratur mit Recht hervor,[2]) dass Euler schon in seiner grundlegenden Abhandlung über die Lehre von den Kettenbrüchen[3]) noch verschiedene andere mit

[1]) A. a. O. p. 319.

[2]) S. die oben citirte Schrift, p. 51.

[3]) De fractionibus continuis dissertatio. Comment. Acad. Petrop. T. IX (ad annum 1737), p. 98—137.

der Zahl $e$ zusammenhängende Kettenbruch-Entwickelungen, z. B. solche für $e$, $\sqrt{e}$ angegeben hat.[1]) Die grössere Mannigfaltigkeit der an dieser Stelle mitgetheilten Kettenbruch-Entwickelungen scheint mir indessen von secundärer Bedeutung: wesentlich erscheint mir dagegen die Methode, welche hier zur endgültigen Herleitung der fraglichen Entwickelungen dient und von deren Existenz in der Introductio sich lediglich eine kurze und leicht gänzlich zu übersehende Andeutung findet. Dort werden lediglich durch numerische Rechnung aus dem der Reihe $e = 1 + \sum_1^\infty {}_\nu \frac{1}{\nu!}$ entnommenen Decimalbruche $e = 2,718281828459$ die oben (Gl. (1)) angeschriebenen 6 Anfangsglieder des Kettenbruches bestimmt, im übrigen heisst es: „*cujus fractionis ratio ex calculo infinitesimali dari potest.*“ In der citirten Abhandlung findet nun Euler die genannten Kettenbrüche für $e$, $\sqrt{e}$ (ausserdem noch solche für $\frac{1}{2}(\sqrt[3]{e}-1)$, $\frac{1}{2}(e^2-1)$, $\frac{e+1}{e-1}$) zunächst gleichfalls durch eine rein numerische Induction, welche vermuthen lässt, dass die betreffenden Theilnehmer arithmetische Reihen bilden. Dann aber fährt er folgendermaassen fort:[2]) „*Cum autem in praecedentibus, ubi numerum* **e** *ejusque potestates in fractiones continuas converti, progressionem arithmeticam denominatorum tantum observaverim, neque praeter probilitatem de hujus progressionis continuatione in infinitum quicquam affirmare valuerim; in id potissimum incubui, ut in hujus progressionis necessitatem inquirerem, eamque firmiter demonstrarem.*“ Und nun folgt die Angabe einer wirklich analytischen Methode, welche zur definitiven Herleitung jener Kettenbrüche — sogar in merklich verallgemeinerter Form — sich als brauchbar erweist. Dieselbe beruht auf einer zwiefachen Integration der Riccati'schen Differential-Gleichung, einmal mit Hülfe eines unendlichen Kettenbruches, sodann in geschlossener Form mit

1) L. c. p. 120. 121.
2) L. c. p. 129.

Hülfe von Exponential-Functionen.[1]) Die erste Art der Integration ist immer möglich, die zweite, wenn die in der Gleichung auftretenden Exponenten gewissen Bedingungen genügen. Im letzteren Falle ergiebt sich dann auf Grund der Eindeutigkeit des betreffenden Integrals eine Kettenbruch-Darstellung des aus der Integration resultirenden Exponential-Ausdruckes. Von den auf diese Weise von Euler abgeleiteten Kettenbrüchen hebe ich hier die folgenden hervor:[2])

$$(3) \qquad e^{\frac{1}{s}} = \left[1;\ \frac{2}{2s-1},\ \frac{1}{(2+4\nu)s}\right]_1^\infty,$$

$$(4) \qquad \frac{e^{\frac{1}{s}}+1}{e^{\frac{1}{s}}-1} = \left[2s;\ \frac{1}{(2+4\nu)s}\right]_1^\infty,$$

deren zweiter für $\frac{1}{s} = 2x$ bezw. $\frac{1}{s} = 2xi$ im wesentlichen diejenigen Entwickelungen giebt, welche von Lambert und Legendre zu den fraglichen Irrationalitäts-Beweisen benützt worden sind; während der erste für $s = 1$ bezw. $s = \frac{1}{2}$ unmittelbar die volle Bestätigung der zunächst auf rein inductivem Wege gefundenen regelmässigen Kettenbruch-Entwickelungen für $\frac{e-1}{2}$, $\frac{e^2-1}{2}$ liefert. Da nun den Ausgangspunkt jener Euler'schen Betrachtungen die ausdrück-

---

[1]) Euler hat diese Methode, die an der betreffenden Stelle ziemlich kurz behandelt ist, später in einer eigenen Abhandlung („Summatio fractionis continuae, cujus indices progressionem arithmeticam constituunt etc.") ausführlich entwickelt: Opusc. analyt. T. II, p. 217—239. Eine hierauf beruhende gedrängtere Darstellung giebt Stern in seiner Theorie der Kettenbrüche: Journ. f. Math. Bd. 11 (1834), S. 60 ff. — Der Vollständigkeit halber sei hier erwähnt, dass auch Lagrange („Sur l'usage des fractions continues dans le calcul intégral", Mém. Acad. de Berlin, 1776) ähnliche Kettenbruch-Entwickelungen, wie die hier in Frage kommenden, gleichfalls durch zwiefache Integration gewisser Differential-Gleichungen abgeleitet hat: Oeuvres, T. IV, p. 319—323.

[2]) L. c. p. 131. 132.

liche Bemerkung bildet, dass jeder rationalen Zahl immer nur ein endlicher regelmässiger[1]) Kettenbruch entspricht, dass also ein unendlicher Kettenbruch dieser Art nur einen irrationalen Werth besitzen könne,[2]) so darf man sagen, dass Euler durch die Aufstellung jener regelmässigen Kettenbruch-Entwickelungen den Beweis für die Irrationalität von $e$ und $e^2$ nicht etwa nur implicite geleistet habe,[3]) sondern dass er sich dieser Thatsache auch vollkommen bewusst gewesen sei.

---

Von den beiden Arbeiten, welche Lambert dem vorliegenden Gegenstande gewidmet hat, nämlich:

1. Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques. Lu en 1767. (Abgedruckt 1768 in demjenigen Bande der „Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres" (Berlin), welcher sonderbarer Weise die Bezeichnung: „Année 1761" trägt, S. 265—322.)
2. Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen. (Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Theil II, Abschnitt I, S. 140—169)

giebt die zweite lediglich ein ganz allgemein gehaltenes, orientirendes Referat über die von Lambert gefundenen

---

[1]) D. h. ein solcher von der Form: $\left[b_0;\ \frac{1}{b_\nu}\right]$, wo die $b_\nu$ natürliche Zahlen sind.

[2]) L. c. p. 108. — Dass ein solcher unendlicher Kettenbruch überhaupt einen bestimmten Grenzwerth besitze, wird — natürlich nicht mit der heute üblichen Strenge, aber doch in der Hauptsache richtig — aus dem Gange der Näherungsbrüche geschlossen.

[3]) Natürlich mit Ausschluss der nach heutigen Begriffen erforderlichen Convergenz-Betrachtungen: diese letzteren fehlen aber nicht minder bei den für streng ausgegebenen Legendre'schen Beweisen.

Resultate.[1]) Sie enthält überhaupt keine analytischen Entwickelungen, einige wenige Formeln ohne Beweis und zur Erläuterung dienende numerische Beispiele, im übrigen Raisonnements, welche keineswegs dazu dienen sollen, die daran geknüpften Schlüsse streng mathematisch zu beweisen, sondern nur dazu, dem Leser den Gang des Beweises verständlich zu machen. Die ganze Arbeit kann als ein glänzendes Muster populär-anschaulicher Darstellung gelten, von der wirklich wissenschaftlichen Bedeutung und dem specifisch analytischen Scharfsinne ihres Verfassers giebt sie eine äusserst unzureichende Vorstellung. Und nur dadurch, dass man diesem populären Aufsatze Lambert's eine allzugrosse, dem streng wissenschaftlichen „Mémoire" dagegen bei weitem nicht genügende Beachtung geschenkt haben mag, erscheint mir überhaupt jene Auffassung einigermassen erklärlich, wonach die dem Lambert'schen Beweise angeblich fehlende Vollständigkeit und Strenge erst durch Legendre nachgeholt worden sein soll. In Wahrheit verhält sich die Sache genau umgekehrt: Lambert's Untersuchungen sind von so musterhafter Strenge, dass sie dem völlig in der Luft schwebenden Legendre'schen Satze erst eine brauchbare Grundlage verliehen und es dadurch ermöglicht haben, denselben auf die vorliegende Frage anzuwenden. Um dies nachzuweisen, muss ich vor allem etwas näher auf den Inhalt jener Lambert'schen Haupt-Abhandlung eingehen.

Da Lambert nur den Euler'schen Kettenbruch für $\frac{1}{2}(e-1)$ aus der Introductio kennt,[2]) nicht aber die unmittel-

[1]) Dieselbe ist zwar, wie Lambert in der Vorrede (zweite Seite) selbst angiebt, schon im Jahre 1766 und unmittelbar vor der definitiven Ausarbeitung des oben erwähnten Mémoire geschrieben worden. Lambert muss aber die jenen Resultaten zu Grunde liegenden und im Mémoire verwertheten analytischen Entwickelungen im wesentlichen damals schon besessen haben: zum mindesten hat er die in dieser Hinsicht etwa noch bestehenden Lücken bei der Abfassung des Mémoire vollständig ausgefüllt.

[2]) In dem citirten populären Aufsatze S. 162 (Abdruck bei Rudio: S. 150) sagt er ausdrücklich: Die Veranlassung aber, diese Formeln (nämlich

bar zuvor besprochenen allgemeineren Entwickelungen, so transformirt er zunächst $\operatorname{tang} v = \frac{\sin v}{\cos v}$ rein formal in einen Kettenbruch, indem er auf die beiden zur Darstellung von $\sin v$, $\cos v$ dienenden Potenzreihen das bekannte Euklidische Divisions-Verfahren zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers anwendet. Schon hierbei zeigt sich ein merklicher Fortschritt, wenn man Lambert's Darstellungsweise mit derjenigen zeitgenössischer Autoren vergleicht: während diese sich in analogen Fällen begnügen, einige wenige Anfangsglieder zu bestimmen und das übrige der Induction überlassen, wobei noch überdies die Wahl einer ganzen Folge verschiedener Buchstaben für die in Betracht kommenden Grössen zumeist gar nicht gestattet, das allgemeine Gesetz mit genügender Deutlichkeit zu übersehen und zu formuliren, so bedient sich Lambert zur Bezeichnung der fraglichen Quotienten und Reste in ganz moderner Weise nur zweier Buchstaben $Q$, $R$ mit laufenden Indices,[1]) findet $Q'$, $R'$, $Q''$, $R''$ durch direkte Rechnung und bestimmt sodann das allgemeine Bildungsgesetz durch den Schluss von $n$ auf $n+1$. Das ist freilich nur eine Aeusserlichkeit: ich glaubte sie aber erwähnen zu müssen, weil sie mir bei einer Arbeit aus dem Jahre 1767 für die analytische Genauigkeit und Schärfe des Verfassers charakteristisch erscheint. In dieser Weise wird also zunächst der Kettenbruch für $\operatorname{tang} v$ mit aller irgend wünschenswerthen Praecision formal hergeleitet.

Nun aber stellt Lambert eine Betrachtung an, die mir — immer mit Rücksicht auf die Jahreszahl 1767 — geradezu erstaunlich dünkt. Während nämlich jeder seiner Zeitgenossen sich mit dieser formalen Ableitung sicherlich begnügt

---

die Kettenbrüche für $\frac{e^x-1}{e^x+1}$, $\operatorname{tang} x$) zu suchen, gab mir Herrn Euler's Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1|}{|1} + \frac{1|}{|6} + \frac{1|}{|10} + \frac{1|}{|14} + \frac{1|}{|18} + \dots$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beispieles vorkommt."

[1]) Dieser Kunstgriff rührt von Leibniz her. Vgl. Gerhardt, Gesch. d. Math. p. 183.

hätte, ja während auch noch spätere und sogar weit grössere Mathematiker sich thatsächlich mit dergleichen begnügt haben, so stellt Lambert mit minutiöser Genauigkeit das Gesetz für die Bildung der Näherungsbrüche $\frac{A_n}{B_n}$ fest und beweist ganz direkt, dass nun auch wirklich: $\lim_{n=\infty} \frac{A_n}{B_n} = \operatorname{tang} v$ wird. Jedem, der in derartigen Dingen einigermaassen versirt ist, wird dieser Schritt heutzutage ebenso nothwendig, wie natürlich erscheinen. Denn man weiss jetzt zur genüge, dass eine durch solche formale Operationen gewonnene „unendliche", d. h. allemal auf der Vernachlässigung irgend eines Restgliedes beruhende Entwickelung überhaupt gar nicht zu convergiren und, selbst wenn sie convergirt, noch keineswegs mit der erzeugenden Function überein zu stimmen braucht. Dass nun aber schon Lambert einen ausdrücklichen Convergenz- und Gültigkeits-Beweis für seine Kettenbruch-Entwickelung durchgeführt hat, muss um so bemerkenswerther erscheinen, wenn man bedenkt, dass Gauss in seiner Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (1812) bezüglich der dort gegebenen Kettenbruch-Entwickelungen noch vollständig auf dem alten formalistischen Standpunkte steht: die Convergenz- und Gültigkeitsfrage wird mit keinem einzigen Worte berührt,[1]) dieselbe ist in der That erst in sehr viel späterer Zeit, insbesondere durch die mühsamen und eingehenden Untersuchungen von Heine[2]) und W. Thomé[3]) erledigt worden.[4])

Die Lambert'sche Arbeit giebt also das **erste** und auf längere Zeit hinaus auch **einzige** Beispiel einer nach heutigen Begriffen wirklich **strengen** Entwicke-

---

[1]) Werke, Bd. III, p. 134.

[2]) Journ. f. Math. Bd. 34 (1847), p. 301; Bd. 57 (1860), p. 231.

[3]) Ibid. Bd. 66 (1866), p. 322. — Bd. 67 (1867), p. 299.

[4]) Die Skizze eines anderen, auf complexer Integration beruhenden Beweises hat sich bekanntlich in Riemann's Nachlass vorgefunden: Werke, p. 400.

lung gewisser Functionen in convergirende Kettenbrüche, insbesondere:

$$(3)\qquad \operatorname{tang} v = \left[\frac{1}{1:v}, \; -\frac{1}{(2\nu+1):v}\right]_1^\infty$$

$\left(\text{und entsprechend für } \dfrac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}}\right)$.

Der an Gl. (3) anknüpfende Irrationalitäts-Beweis für den Fall eines rationalen $v$ nimmt sodann ungefähr folgenden Gang. Bezeichnet man mit $\varphi$, $\omega$ irgend zwei natürliche, relativ prime Zahlen und setzt:

$$(4)\qquad \sin\frac{\varphi}{\omega} = M, \qquad \cos\frac{\varphi}{\omega} = P,$$

so wird:

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\frac{\varphi}{\omega} = \frac{M}{P} = \left[\frac{\varphi}{\omega}, \; -\frac{\varphi^2}{(2\nu+1)\,\omega}\right]_1^\infty.$$

Alsdann lässt sich, wie unmittelbar zu sehen, dieser Kettenbruch durch das folgende unbegrenzte System von recurrenten linearen Gleichungen ersetzen:

$$\begin{aligned}
\varphi P &= \omega M - R' \\
\varphi^2 M &= 3\,\omega R' - R'' \\
\varphi^2 R' &= 5\,\omega R'' - R''' \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi^2 R^{(n-2)} &= (2n-1)\, R^{(n-1)} - R^{(n)}
\end{aligned}$$

oder, anders geschrieben:

$$(6)\qquad \begin{cases}
1)\quad R' = \omega M - \varphi P \\
2)\quad R'' = 3\,\omega R' - \varphi^2 M \\
3)\quad R''' = 5\,\omega R'' - \varphi^2 R' \\
\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n)\quad R^{(n)} = (2n-1)\,\omega R^{(n-1)} - \varphi^2 R^{(n-2)}.
\end{cases}$$

Die $R^{(n)}$ genügen also — abgesehen von den beiden Anfangsgleichungen $(6_1)$, $(6_2)$ genau derselben Recursionsformel $(6_n)$,

wie die Zähler und Nenner der zum Kettenbruche (5) gehörigen Näherungsbrüche. Werden diese also etwa wieder mit $A_n$, $B_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) bezeichnet, so ergiebt sich mit Berücksichtigung jener Anfangsgleichungen ($6_1$), ($6_2$) die Beziehung:

$$R^{(n)} = MB_n - PA_n = PB_n\left(\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}\right). \tag{7}$$

Hieraus folgt, dass die $R^{(n)}$ durchweg von Null verschieden sind und mit unbegrenzt wachsendem $n$ beliebig klein werden; die bei Gelegenheit des vorausgehenden Convergenz-Beweises durchgeführte Untersuchung der Näherungsbrüche zeigt nämlich, dass nicht nur $\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}$, sondern auch $B_n\left(\frac{M}{P} - \frac{A_n}{B_n}\right)$ mit $\lim n = \infty$ gegen Null convergirt.

Angenommen nun, es wäre $\frac{M}{P}$ rational, also etwa:

$$\frac{M}{P} = \frac{m}{p}, \tag{8}$$

wo $m$, $p$ natürliche, relativ prime Zahlen. Alsdann kann man setzen:

$$\frac{M}{m} = \frac{P}{p} = D, \quad \text{also: } M = m \cdot D, \quad P = p \cdot D, \tag{9}$$

wo $D$ eine ganz bestimmte Irrationalzahl bedeutet (da von den Zahlen $M = \sin\frac{\varphi}{\omega}$, $P = \cos\frac{\varphi}{\omega} = \sqrt{1 - M^2}$ unter allen Umständen mindestens eine irrational sein muss. Multiplicirt man nun die Gleichungen (6) mit $\frac{1}{D}$, so gehen sie in die folgenden über:

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{R'}{D} = \omega m - \varphi p \\ \dfrac{R''}{D} = 3\omega \dfrac{R'}{D} - \varphi^2 m \\ \dfrac{R'''}{D} = 5\omega \dfrac{R''}{D} - \varphi^2 \cdot \dfrac{R'}{D} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \dfrac{R^{(n)}}{D} = (2n-1)\omega \dfrac{R^{(n-1)}}{D} - \varphi^2 \dfrac{R^{(n-2)}}{D} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;, \end{cases}$$

welche zeigen, dass $\frac{R'}{D}$, also auch $\frac{R''}{D}, \ldots \frac{R^{(n)}}{D} \ldots$ durchweg ganze Zahlen sein müssten. Man hätte also ein unbegrenztes System von Null verschiedener und schliesslich beliebig klein werdender ganzer Zahlen, was unmöglich ist. Somit muss tang $\frac{\varphi}{\omega}$ irrational sein.

Dies also ist den Hauptzügen der angeblich so unzulängliche Lambert'sche Beweis: mir erscheint er ausserordentlich scharfsinnig und im wesentlichen vollkommen einwandfrei.

---

Ich komme nun schliesslich auf den Antheil Legendre's an dem fraglichen Irrationalitäts-Beweise su sprechen. Legendre leitet in der bekannten Note IV seiner Éléments de géométrie zunächst die erforderlichen Kettenbruch-Entwickelungen von neuem ab.[1]) Sein recursorisches Verfahren ist merklich, einfacher und eleganter als die etwas schwerfällige Divisions-Methode Lambert's. Aber, da jeglicher Convergenz- und Gültigkeitsbeweis fehlt, so bleibt Legendre in Bezug auf Strenge hinter Lambert weit zurück. — Nun folgt jener Hülfssatz, welcher den eigentlichen Kern des Legendre'schen Irrationalitäts-Beweises bildet, nämlich:

[1]) Rudio, p. 159 ff.

Bedeuten $m, n, m', n'$ etc. ganze positive oder negative Zahlen von der Art, dass $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. ächte Brüche sind, so hat der Kettenbruch: $\frac{m|}{|n} + \frac{m'|}{|n'} + \frac{m''|}{|n''} + \ldots$ einen irrationalen Werth.

Hier muss gesagt werden, dass das von Legendre angewendete Beweis-Princip, welches auf der völlig unbewiesenen Supposition beruht, dass der Kettenbruch selbst und jeder durch Weglassung von Anfangsgliedern daraus hervorgehende ohne weiteres einer bestimmten Zahl gleich gesetzt werden dürfe, direkt unrichtig ist. Thatsächlich lässt sich nach dieser Methode alles mögliche, richtiges und falsches beweisen. Man könnte z. B. mit genau demselben Maasse von Strenge, welches dem fraglichen Legendre'schen Beweise innewohnt, zeigen, dass unter den periodischen Kettenbrüchen mit lauter reellen Gliedern unendlich viele mit complexen Grenzwerthen vorkommen. Mit anderen Worten: der Legendre'sche Beweis hat überhaupt erst einen Sinn, wenn die Convergenz und sogar (nach der in der vorangehenden Mittheilung benützten Terminologie) die unbedingte Convergenz jener Kettenbrüche wirklich feststeht. Die entsprechenden Convergenz-Beweise und zwar zunächst nur für die besonderen Fälle, dass alle $\frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ positiv oder alle $\frac{m^{(\nu)}}{n^{(\nu)}}$ negativ, sind aber erst um die Mitte unseres Jahrhunderts geliefert worden,[1] und consequenter Weise findet man auch in den Lehrbüchern der Analysis die Gültigkeit des obigen Satzes auf diese besonderen Fälle eingeschränkt.[2] Dass dieser letztere sogar in dem von Legendre ausgesprochenen weiteren Umfange d. h. bei ganz beliebigen Vorzeichen der $m^{(\nu)}$, $n^{(\nu)}$

---

[1]) Vgl. die vorige Mittheilung, p. 311.

[2]) Stern, Algebr. Anal. p. 482. 484. Schlömilch, Algebr. Anal. p. 303. Stolz, Allgem. Arithm. Bd. II, p. 297.

gilt, habe ich in dem eben citirten Aufsatze gezeigt. Aber alles dies ist doch bis zu einem gewissen Grade ein reiner Glücksfall: auf Grund des Legendre'schen Beweises allein brauchte der Satz für keinen einzigen Fall richtig zu sein. Er gewinnt überhaupt erst in dem Augenblicke eine reale Existenz, wo die nöthigen Convergenz-Beweise erbracht sind. Und wenn er speziell auf den Kettenbruch für tang $x$ anwendbar erscheint, so ist das doch schliesslich nur deshalb der Fall, weil Lambert dessen Convergenz wirklich bewiesen hat.[1]) Dabei kann dann aber immer nur von einer (nicht einmal allzu erheblichen) Abkürzung, dagegen in keiner Beziehung von einer wirklichen Ergänzung des Lambert'schen Beweises die Rede sein. Da mir dieser letztere weit öfter abfällig beurtheilt,[2]) als gründlich studirt worden zu sein scheint, so hielt ich es im Interesse der historischen Gerechtigkeit für geboten, seine Vorzüge, sowie die Mängel der nach meiner Ansicht über Gebühr gepriesenen Legendre'schen Beweisführung in ein etwas helleres Licht zu setzen.

---

[1]) Vgl. p. 332. — Dass diese Convergenz eine unbedingte ist, kann dann leicht erschlossen werden.

[2]) Vgl. z. B. Bachmann, a. a. O.

---

# Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1898.

**Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.**

## Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

*Royal Society of South-Australia in Adelaide:*

Transactions. Vol. XX, part 2. 1897. 8⁰.

*Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:*

Rad. Vol. 132. 133. 1897. 8⁰.
Monumenta spectantia historiam Slavorum merid. Vol. XXIX. 1897. 8⁰.
Djela. Vol. XVIII. 1897. 4⁰.
Natko Nodilo, Znanstvena djela. Knjiga I. 1898. 8⁰.
Ant. Radić, Zbornik. Svezak 2. 1897. 8⁰.

*Geschichts- und Alterthumsforschende Gesellschaft des Osterlandes in Altenburg:*

Mittheilungen. Band XI, Heft 1. 1898. 8⁰.

*Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:*

Mémoires Documents inédits. Tome XIV, fasc. 1. 1897. 4⁰.
Album archéologique. Fasc. 12. 1897. fol.
Notice historique sur le canton de Bernaville (Somme) par Theodose Lefèvre. 1897. 8⁰.
Bulletin. Année 1896 No. 2—4; 1897 No. 1. 2. 8⁰.

*Historischer Verein für Schwaben und Neuburg in Augsburg:*

Zeitschrift. Band XXIV. 1897. 8⁰.

*Johns Hopkins University in Baltimore:*

Studies in Historical and Political Science. Ser. XV, No. 6—12. 1897. 8⁰.
Circulars. Vol. XVII, No. 134. 135. 1898. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XIX, 4; XX, 1. 1897/98. 4⁰.
The American Journal of Philology. Vol. XVIII, 1—3. 1897. 8⁰.
American Chemical Journal. Vol. XIX, No. 5—10; Vol. XX, No. 1. 1897/98. 8⁰.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. VIII, No. 81, 1897, Vol. IX, No. 82—86. 1898. 4⁰.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VI. 1897. 4⁰.

*Maryland Geological Survey in Baltimore:*

Survey. Vol. I. 1897. 4⁰.

*Kgl. Bibliothek in Bamberg:*
Katalog der Handschriften. Bd. I, Abth. 1, Lfg. 2. 1898. 8°.

*Historischer Verein in Bamberg:*
58. Bericht für das Jahr 1897. 1898. 8°.

*R. Academia de ciencias in Barcelona:*
Boletín. Año I, Vol. 1, No. 1. 1892. 4°.

*Historisch-antiquarische Gesellschaft in Basel:*
22. Jahresbericht 1896/97. 1897. 8°.

*Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen in Batavia:*
Tijdschrift. Deel 40, afl. 1 en 2. 1897. 8°.
Notulen. Deel 35, afl. 1. 2. 1897. 8°.
Verhandelingen. Deel 49, stuk 3. 1897. 4°.
Nederlandsch-Indisch-Plakaatboek. Deel XVI. 1897. 8°.

*Historischer Verein in Bayreuth:*
Archiv. Band XX, 2. 1897. 8°.

*K. Serbische Akademie in Belgrad:*
Glas. No. LIII. 1898. 8°.
Spomenik. No. XXXI. 1898. 4°.
Godischnijak X, 1897. 1898. 8°.
M. Tsch. Militschewitsch Manastir Kalenitsch 1898. 8°.

*Museum in Bergen (Norwegen):*
G. O. Sars, An Account of the Crustacea. Vol. II, part 9. 10. 1898. 4°.
Aarbog for 1897. 1898. 8°.

*K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:*
Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. Bd. XXIV. 1897. 8°.
Acta borussica. Bd. II der Behördenorganisation. 1898. 8°.
Abhandlungen aus dem Jahre 1897. 4°.
Sitzungsberichte. 1897, No. XL—LIII; 1898, No. I—XXIII. 4°.
Corpus inscriptionum latinarum. Vol. IV, Supplementum. 1898. fol.

*K. geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:*
Abhandlungen. N. F. Heft 26—28. 1897. 4°.

*Central-Bureau der internationalen Erdmessung in Berlin:*
Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation im Dez. 1897 v. Th. Albrecht. 1898. 4°.

*Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:*
Berichte. 30. Jahrg., No. 19. 20; 31. Jahrg., No. 1—10. 1898. 8°.

*Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:*
Zeitschrift. Band 49, Heft 3. 4. 1897. 8°.

*Medicinische Gesellschaft in Berlin:*
Verhandlungen 1897. Band 28. 1898. 8°.

*Physikalische Gesellschaft in Berlin:*
Die Fortschritte der Physik im Jahre 1892, 3 Bände. Braunschweig 1898. 8°.
Verhandlungen. Jahrg. 16, 1897, No. 11. 12; Jahrg. 17, 1898, No. 1—6. 8°.
Namenregister zu Bd. 21—43. II. Hälfte. 1898. 8°.

*Physiologische Gesellschaft in Berlin:*
Centralblatt für Physiologie. Bd. XI, No. 20—26; Bd. XII, No. 1—7. 1897/98. 8°.
Verhandlungen. Jahrg. 1897—98, No. 1—4. 1897. 8°.

*K. technische Hochschule in Berlin:*

Otto N. Witt, Die Lebensbedingungen der modernen chemischen Industrie. Rede. 1898. 4⁰.

*Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:*

Jahrbuch. Band XII, 4; XIII, 1. 1898. 4⁰. Ergänzungsband IV Alterthümer von Hierapolis.

Mittheilungen (römische Abtheilung). Bd. XIII, fasc. 1. Rom 1898. 8⁰.

*K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:*

Die Feier des 50jährigen Bestehens des k. meteorologischen Instituts am 16. Oktober 1897. 1898. 4⁰.

Veröffentlichungen 1896. Heft 2. 1898. 4⁰.

Ergebnisse der meteorolog Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1896. 1898. 4⁰.

Ergebnisse der Gewitterbeobachtungen in den Jahren 1895 u. 96. 1898. 4⁰.

Verhandlungen der Konferenz der Vorstände deutscher meteorologischer Zentralstellen, Oktober 1897. 8⁰.

*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:*

Jahrbuch. Band XXVI, Heft 4. 1898. 8⁰.

*Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:*

Katalog der Bibliothek, VI. Auflage. 1897. 8⁰.

Gartenflora. Jahrg 1898, Heft 1—13. 8⁰.

*Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:*

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XI, 1. Hälfte. Leipzig 1898. 8⁰.

*Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:*

Wochenschrift. Band XIII, Heft 1—6. 1898. 4⁰.

*Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:*

Zeitschrift. 18. Jahrg., 1898, Heft 1—6. 4⁰.

*Société d'Émulation du Doubs in Besançon:*

Mémoires. VI. Série, Vol. 10. 1895. 1896. 8⁰. VII. Série, Vol. 1. 1896. 1897. 8⁰.

*Gewerbeschule in Bistritz:*

XXII. Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8⁰.

*Observatorio in Bogota:*

Latitud del Observatorio de Bogota. Por Julio Garavito 1897. 8⁰.

*R. Accademia delle Scienze dell' Istituto Bologna:*

Memorie. Ser. V, Tom. 5, fasc. 1—4. 1895—96. 4⁰.

Renticonto. Nuova Serie, Vol. 1, 1896—97. 1897. 8⁰.

*R. Deputazione di storia patria per le Provincie di Romagna in Bologna:*

Atti e Memorie. Serie III, Vol. XV, 1—3. 1897. 4⁰.

*Niederrheinische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Bonn:*

Sitzungsberichte 1897, II. Hälfte. 8⁰.

*Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:*

Bonner Jahrbücher. Heft 102. 1898. 4⁰.

*Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:*

Verhandlungen. 54. Jahrg., II. Hälfte. 1897. 8⁰.

*Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:*

Procès-verbaux des séances 1894/95, 1895/96 et 1896/97. 8⁰.
Esquisse d'une carte géologique des environs de Bordeaux par E. Fallot. (1 Blatt.) 1895.
Mémoires. V. Série, Tome 1, cahier 1. 2; Tome 2, cahier 1. 2. 1895/96. 8⁰.
Observations pluviométriques 1894/95, 1895/96. 1896/97. 8⁰.

*Société Linnéenne in Bordeaux:*

Actes. Vol. 50. 1896. 8⁰.

*Société de géographie commerciale in Bordeaux:*

Bulletin. 1897, No. 23. 24; 1898, No. 1—12. 1897/98. 8⁰.

*American Academy of Arts and Sciences in Boston:*

Proceedings. Vol. 33, No. 5—12. 1897/98. 8⁰.

*American Philological Association in Boston:*

Transactions. Vol. 28. 1897. 8⁰.

*Geschäftsführung der 69. Plenarversammlung deutscher Naturforscher und Aerzte in Braunschweig:*

Festschrift der herzogl. technischen Hochschule. 1897. 8⁰.
Die medicin. Festschrift: Beiträge zur wissenschaftl. Medicin. 1897. 8⁰.
Festgruss des Vereins für Naturwissenschaft. 1897. 8⁰.
Tageblatt der Versammlung. 1897. 4⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:*

Abhandlungen. Band XIV, 3. 1898. 8⁰.
Beiträge z. nordwestdeutschen Volks- und Landeskunde. Heft 2. 1897. 8⁰.

*Queensland Museum in Brisbane:*

Annals No. 4. 1897. 8⁰.

*Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:*

Zeitschrift. 2. Jahrg., 1. u. 2. Heft. 1898. 8⁰.

*Naturforschender Verein in Brünn:*

Verhandlungen. Band 35, 1896. 1897. 8⁰.
XV. Bericht der meteorol. Commission, 1895. 1897. 8⁰.

*Académie Royale de médecine in Brüssel:*

Mémoires couronnés. Tome XV, fasc. 2. 3. 1898. 8⁰.
Bulletin. IV. Série, Tome XI, No. 11. 1897. Tome XII, No. 1—5. 1898. 8⁰.

*Académie Royale des sciences in Brüssel:*

Bulletin. 3. Série, Tome 34, No. 12, 1897; Tome 35, No. 1—5. 1898. 8⁰.
Annuaire 1898. 64ᵉ année. 8⁰.
Programme du concours 1898 et 1899. 1898. 8⁰.
Classe des lettres. Concours pour les années 1897—99. 1897. 8⁰.

*Société des Bollandistes in Brüssel:*

Analecta Bollandiana. Tome 16, fasc. 4. 1897. Tome 17, fasc. 1. 2. 1898. 8⁰.

*Société entomologique de Belgique in Brüssel:*

Annales. Tome 41. 1897. 8⁰.
Mémoires. Tome 6. 1897. 8⁰.

*Société belge de géologie in Brüssel:*

Bulletin. Tome X, 2. 3. XI. 1898. 8⁰.

*Observatoire Royale in Brüssel:*

Annales. Nouv. Sér.
Annales astronomique. Tome 7.
Annales météorologique. Tome 3. 4. 1895—96. 4⁰.
Annuaire. Année 56—64. 1889—97. 8⁰.
Bibliographie générale de l'astronomie par J. C. Houzeau et A. Lancaster. Tome I, 2. 1889. 4⁰.

*K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:*

Mittheilungen. Band XI, 6—8. 1897. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 37, 10—12. 1897. Bd. 38, 1—4. 1898. 4⁰.
Jahresbericht für 1895. 1898. 4⁰.

*K. ungarisches Ackerbauministerium in Budapest:*

Landwirthschaftliche Statistik der Länder der ungarischen Krone. Bd. II. III. 1897. 4⁰.

*Officina meteorologica Argentina in Buenos Aires:*

Anales. Tomo XI. 1897. 4⁰.

*Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):*

Mededeelingen. No. XXII—XXIV. 1898. 4⁰.

*Academia Romana in Bukarest:*

Analele. Ser. II. Vol. XV, Sect. istor; Vol. XVI, Sect. istor. sciintif.; Vol. XVII, Partea administrat. Sect. istor. 1895. 4⁰.
Actes et Documents rel. à l'histoire de la régénération de la Roumanie. Vol. I, 2; II—V; VI, 1; VII. 1888—92. 8⁰.
N. Manolescu, Igiena tĕranŭlŭi. 1895. 8⁰.
G. Crăiniceanu, Igiena tĕranŭlŭi Român. 1895. 8⁰.

*Rumänisches meteorologisches Institut in Bukarest:*

Analele. Tom. XII, 1896. 1898. 4⁰.
Buletinul. Anul VI, 1897. 1898. 4⁰.

*Société Linnéenne de Normandie in Caen:*

Bulletin. 4ᵉ Sér., Vol. 10, fasc. 3. 4; 5ᵉ Sér., Vol. 1, fasc. 1. 1897. 8⁰.

*Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:*

Monthly Weather Review. August-Dezember 1897. Januar 1898. fol.
Rainfall of India 5th year 1895. 1896. fol.

*Asiatic Society of Bengal in Calcutta:*

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 901—909. 1897. 8⁰.
Journal. No. 362—369. 1897/98. 8⁰.
Proceedings. 1897, No. V—XI. 1898, No. I—IV. 8⁰.
The Kaçmīraçabdāmrta, a Kāçmīrī gramar by Içvara-Kaula. Ed. by G. A. Grierson. Part I. 1897. 4⁰.

*Geological Survey of India in Calcutta:*

Memoirs. Vol. 25. 26. 1895—96. 27, part 2. 1898. 4⁰.
Palaeontologica Indica. Ser. XV, Vol. I, 4, Vol. II, 1, Ser. XVI, Vol. I, part 1—3. 1895/97. fol.

*Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:*

Annals. Vol. 41, No. 5. 1898. Vol. 42, part 1. 1897. 4⁰.

*Philosophical Society in Cambridge:*

Proceedings. Vol. IX, 7. 8. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. XVI, 3. 4. 1898. 4⁰.

*Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:*

Bulletin. Vol. 28, No. 4. 5; Vol. 31, No. 5—7; Vol. 32, No. 1—5. 1897/98. 8⁰.

*Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:*

Atti. Serie IV, Vol. 10. Anno 74. 1897. 4⁰.
Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 50—52. 1898. 8⁰.

*Physikalisch-technische Reichsanstalt in Charlottenburg:*

Die Thätigkeit der physikalisch-technischen Reichsanstalt im Jahre 1897. Berlin 1898. 4⁰.

*K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:*

Jahrbuch. XIII. Jahrg. 1895, II. Hälfte; XIV. Jahrg. 1896, Abth. 1. 2. 1896/97. 4⁰.

*Société des sciences naturelles in Cherbourg:*

Mémoires. Tome 30. Paris 1896—97. 8⁰.

*John Crerar Library in Chicago:*

3d annual Report for 1897.

*Field Columbian Museum in Chicago:*

Publications. No. 22. 24. 25. 1897. 8⁰.

*Zeitschrift „The Monist“ in Chicago:*

The Monist. Vol. 8, No. 2—4. 1898. 8⁰.

*Zeitschrift „The Open Court“ in Chicago:*

The Open Court. Vol. XII, No. 1—7. 1898. 4⁰.

*Norsk Folkemuseum in Christiania:*

Aarsberetning 1897. 1898. 4⁰.

*Chemiker-Zeitung in Cöthen:*

Chemiker-Zeitung 1898. No. 1—42. 45—52. fol.

*Academia nacional de ciencias in Córdoba (Republ. Argent.):*

Boletin. Tom. 14, No. 2. 1894. 15, No. 4. Buenos Aires 1898. 8⁰.

*Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:*

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1898. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors am 4. Oktober 1897. 1898. 8⁰.

*Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:*

Quartalblätter. N. F., 1896, No. 1—4. 1897, No. 1—4. 8⁰.

*École polytechnique in Delft:*

Annales. Tome VIII, 3. 4. Leiden 1897. 4⁰.

*Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:*

The Proceedings. Vol 5. 1894—96. 8⁰.
Bulletin. No. 10 and 11 of 1897; No. 1 of 1898. 8⁰.

*Académie des Sciences in Dijon:*

Mémoires. IV. Série. Tome 5. 1896. 8⁰.

*Union géographique du Nord de la France in Douai:*

Bulletin. Vol. 18, trimestre 4. 1897. Vol. 19, trimestre 1. 1898. 8⁰.

*Royal Irish Academy in Dublin:*

Proceedings. Ser. III. Vol. IV, 4, 5. 1897/98 8°.
Transactions. Vol. 31, part 1—6. 1896—98. 4°.
List of the Members. 1898. 8°.

*Royal Dublin Society in Dublin:*

The Scientific Proceedings. N. S. Vol. VIII, part 5. 1897. 8°.
The Scientific Transactions. Series II. Vol. V, No. 13; Vol. VI, No. 2—13. 1896—97. 4°.

*American Chemical Society in Easton, Pa.:*

The Journal. Vol. XX, No. 1—7. 1898. 8°.

*Royal Society in Edinburgh:*

Proceedings. Vol. XXI, p. 473—549. 1897. Vol. XXII, No. 1. 1898. 8°.
Transactions. Vol. 28, part III, IV; Vol. 29, part I. 1896—98. 4°.

*Geological Society in Edinburgh:*

Transactions. Vol. VII, 3. 1897. 8°.
Rolland Lans of the Edinburgh Geological Society. 1897. 8°.

*Scottish Microscopical Society in Edinburgh:*

Proceedings. Vol. 2, No. 2. 1897. 8°.

*Royal Physical Society in Edinburgh:*

Proceedings. Session 1896—97. 1897. 8°.

*Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach:*

Jahresbericht f. d. J. 1897—98. 1898. 4°.

*K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften in Erfurt:*

Jahrbücher. N. F. Heft 24. 1898. 8°.

*Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:*

Abhandlungen. Band XXI, 1; XXIV, 1. 2. 1897. 4°.
Katalog der Reptilien-Sammlung, Theil II. 1898. 8°.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Frankfurt a/O.:*

Helios. Band XV. Berlin 1898. 8°.
Societatum Litterae. Jahrg. XI, 1897, No. 7—12; XII, 1898, 1—4. 8°.

*Naturforschende Gesellschaft in Freiburg i/Br.:*

Berichte. Bd. X, Heft 1—3. 1897—98. 8°.

*Kirchlich-historischer Verein in Freiburg i/Br.:*

Freiburger Diöcesan-Archiv. 26. Band. 1898. 8°.

*Universität Freiburg in der Schweiz:*

Index lectionum per menses aestivos anni 1898. 8°.
Behörden, Lehrer und Studirende. Sommer-Semester 1898. 8°.

*K. Gymnasium in Fürth:*

Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8°.

*Société d'histoire et d'archéologie in Genf:*

Bulletin. Tome II, livr. 1. 1898. 8°.

*Museo civico di storia naturale in Genua:*

Annali. Serie II. Vol. XVIII. 1897. 8°.

*Oberhessischer Geschichtsverein in Giessen:*

Mittheilungen. N. F. 7. Band. 1898. 8°.

*Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:*

Neues Lausitzisches Magazin. Band 73, Heft 2. 1897. Band 74, Heft 1. 1898. 8⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:*

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1898. No. I—VII. Berlin. 4⁰.

Nachrichten. a) Mathem.-phys. Classe. 1897, Heft 3. 1898, Heft 1. Berlin. 4⁰.
b) Philol.-hist. Classe. 1897, Heft 3. 1898, Heft 1. Berlin. 4⁰.
c) Philos.-hist. Classe. Geschäftliche Mittheilungen. 1897, Heft 2. 1898, Heft 1. Berlin. 4⁰.

Abhandlungen. N. F. Bd. I, No. 1 u. 2. N. F. Bd. II, No. 4—6. Berlin 1898. 4⁰. Mathem.-physikal. Classe.

*The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):*

The Journal. Vol. VII, No. 3. 4. 1898. 8⁰.

*Scientific Laboratories of Denison University in Granville, Ohio:*

Bulletin. Vol. IX, part 2. 1897. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein für Neu-Vorpommern in Greifswald:*

Mittheilungen. 29. Jahrgang 1897. Berlin 1898. 8⁰.

*Fürsten- und Landesschule in Grimma:*

Jahresbericht von 1897—98. 1898. 4⁰.

*K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:*

Bijdragen. VI. Reeks. Deel V, aflev. 1. 2. 1898. 8⁰.

Naamlijst der leden. 1898. 8⁰.

*Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:*

Archives Néerlandaises des sciences exactes. Sér. II. Tome 1, livr. 4. 5. La Haye 1898. 8⁰.

*Nova Scotian Institute of Science in Halifax:*

The Proceedings and Transactions. Vol. IX, part 3. 1897. 8⁰.

*K. K. Obergymnasium zu Hall in Tirol:*

Programm für das Jahr 1897/98. Innsbruck 1898. 8⁰.

*Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:*

Leopoldina. Heft 33, No. 12. 1897. Heft 34, No. 1—6. 1898. 4⁰.

*Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:*

Zeitschrift. Band 51, Heft 4. 1897. Band 52, Heft 1. 1898. Leipzig. 8⁰.

Indische Studien. Bd. XVIII. Leipzig 1898. 8⁰.

*Universität in Halle:*

Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Halbjahr 1898. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:*

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 70, Heft 3—6. Leipzig 1898. 8⁰.

*Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:*

Neue Mittheilungen. Band 19, Heft 1. 1898. 8⁰.

*Mathematische Gesellschaft in Hamburg:*

Mitteilungen. Band III, 8. Leipzig 1898. 8⁰.

*Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:*

Mitteilungen. 18. Jahrgang 1896/97. 1897. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:*

Verhandlungen. 1897. IV. Folge. V. 1898. 8⁰.

*Naturhistorische Gesellschaft in Hannover:*

Festschrift zur Feier des 100 jährigen Bestehens. 1897. 8⁰.
Flora der Provinz Hannover von W. Brandes. 1897. 8⁰.
Verzeichnis der im Provinzialmuseum zu Hannover vorhandenen Säugetiere. 1897. 8⁰.
Katalog der Vogelsammlung aus der Provinz Hannover. 1897. 8⁰.
Katalog der systematischen Vogelsammlung des Provinzialmuseums in Hannover. 1897. 8⁰.

*Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:*

Zeitschrift. Jahrgang 1897. 8⁰.

*Historisch-philosophischer Verein in Heidelberg:*

Neue Heidelberger Jahrbücher. Jahrg. VIII, Heft 1. 1898. 8⁰.

*Geschäftsführender Ausschuss der Reichslimeskommission in Heidelberg:*

Der Obergermanisch-Raetische Limes. Lfg. I—VIII. 1894—97. 4⁰.
Limesblatt. No. 1—28. Trier 1892—98. 8⁰.

*Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:*

Observations de l'Institut météorologique central. Vol. XV, livr. 1 und Résumé des années 1881—90. 1897. fol.

*Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:*

Archiv. N. F. Band XXVIII, Heft 1. 1898. 8⁰.
Urkundenbuch zur Geschichte der Deutschen in Siebenbürgen. Band II. 1897. gr.-8⁰.

*Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:*

Schriften. 28. u. 29. Heft. 1897/98. 8⁰.

*Ungarischer Karpathen-Verein in Igló:*

Jahrbuch. XXV. Jahrg. 1898. 8⁰.

*Ostsibirische Abtheilung der Kaiserlich russischen Geographischen Gesellschaft in Irkutsk:*

Iswestija. Bd. 28, No. 4. 1897. Bd. 29, No. 1. 1898. 8⁰.
Sapiski. Tom. I, Heft 1. 3; II, Heft 1. 3; III, Heft 1. 1889—96. 8⁰.

*Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:*

The Journal. Vol. I, No. 12. 1897. Vol. II, No. 1—3. 5—6. 1898. 8⁰.

*Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:*

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. Band XXXI. Heft 3 u. 4. Band XXXII. 1898. 8⁰.

*Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Jurjew (Dorpat):*

Sitzungsberichte. Band XI. Jurjew 1898. 8⁰.

*Centralbureau für Meteorologie etc. in Karlsruhe:*

Jahresbericht des Centralbureaus f. d. J. 1897. 1898. 4⁰.

*Société physico-mathématique in Kasan:*

Bulletin. II. Série. Tome VII, No. 4; VIII, No. 1. 1898. 8⁰.

*Universität Kasan:*

Utschenia Sapiski. Bd. 64, Heft 12. 1897. Bd. 65, Heft 1—4. 1898. 8⁰.
7 medicinische Dissertationen von 1897/98.

*Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:*

Zeitschrift. N. F. Band XXII. 1897. 8⁰.
Mittheilungen. Jahrgang 1896. 1897. 8⁰.

*Verein für Naturkunde in Kassel:*

Abhandlungen und Bericht XLII. 1897. 8⁰.

*Société mathématique in Kharkow:*

Communications. 2ᵉ Série, Tome VI, No. 2. 3. 1897. 4⁰.

*Société de médecine in Kharkow:*

Travaux 1896. No. 1. 1897. 8⁰.

*Université Impériale in Kharkow:*

Sapiski 1898. Band 1—3. 8⁰.
Annales 1897. Heft 4. 8⁰.

*Universität in Kiew:*

Iswestija. Band 37, No. 11. 12. 1897. Band 38, No. 1—5. 1898. 8⁰.

*Medic.-naturwissenschaftl. Sektion des Museumsvereins in Klausenburg:*

Értesitö. 2 Hefte. 1897. 8⁰.

*Physikalisch-ökonomische Gesellschaft in Königsberg:*

Schriften. 38. Jahrgang. 1897. 4⁰.

*K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:*

Oversigt. 1897, No. 6; 1898, No. 1—3. 8⁰.
Mémoires. 6ᵉ Série. Section des Lettres, Tome IV, 4; Section des Sciences, Tome VIII, 6. 1898. 4⁰.

*Nordiska Museet in Kopenhagen:*

Samfundet för Nordiska Museets främjande 1895 och 1896. 1897. 8⁰ nebst 5 kleineren Schriften.

*Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:*

Aarböger. II. Raekke, 12. Bind, 4. Heft und Tillaeg. 1897. 13. Bind, 1. Heft. 1898. 8⁰.
Mémoires. Nouv. Sér. 1897. 1898. 8⁰.

*Genealogisk Institut in Kopenhagen:*

Etatsraad Knud Nicolai Knudsens Ungdomserindringer. I uddrag meddelte af Sofus Elvius. 1898. 8⁰.

*Akademie der Wissenschaften in Krakau:*

Anzeiger. 1897, December; 1898, Januar—Mai. 8⁰.
Rozprawy. Ser. II. Tom. 11. 1897. 8⁰.
Biblioteka pisarzow polskich. Tom. 34. 35. 1897. 8⁰.
Rocznik. Rok 1896/97. 1897. 8⁰.
Scriptores rerum Polonicarum. Tom. 16. 1897. 8⁰.
Acta Rectoralia. Tom. 1, fasc. 4. 1897. 8⁰.
Sprawozdanie komisyi fizyograf. Tom. 32. 1897. 8⁰.
M. Federowski, Lud Biatoruski. Tom. 1. 1897. 8⁰.
F. Kiekosiński, Rycerstwo Polskie. Tom. 1. 2. 1896. 8⁰.

*Botanischer Verein in Landshut:*

15. Bericht über d. J. 1896—97. 8⁰.

*Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:*

Bulletin. IV. Série, Vol. 33, No. 126. 127. 1897/98. 8⁰.

*Kansas Academy of Science in Lawrence, Kansas:*
Transactions. Vol. XV. Topeka 1898. 8⁰.

*Kansas University in Lawrence, Kansas:*
The Kansas University Quarterly. Vol. VI, No. 4, Series A u. B. 1897. Vol. VII, Serie A, No. 1. 1898. 8⁰.

*Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:*
Tijdschrift. N. Serie. Deel XVII, 1. 2. 1898. 8⁰.

*Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:*
Archiv. II. Reihe. Band 16, Heft 2. 1898. 8⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:*
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXIV, No. 2. 3. 1898. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Band 50, No. 2.
Berichte der mathem.-physik. Classe. 1897, V, VI. 1898, I. II. 8⁰.

*Journal für praktische Chemie in Leipzig:*
Journal. N. F. Bd. 56, Heft 10—12; Bd. 57, Heft 1—9. 1897/98. 8⁰.

*Verein für Erdkunde in Leipzig:*
Mittheilungen 1897. 1898. 8⁰.

*Anthropologischer Verein in Lemberg:*
Lud. Organ des anthropologischen Vereins in Lemberg. Tom. IV, Heft 1. 2. 1898. 8⁰.

*Sociedade de geographia in Lissabon:*
Boletin. 16. Serie, No. 7. 8. 1897. 8⁰.

*Université Catholique in Loewen:*
Annuaire 1898. 8⁰.
Schriften der Universität a. d. J. 1891—97. 8⁰.

*Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:*
La Cellule. Tome XIII, 2. 1897. Tome XIV, 1. 4⁰.

*Royal Institution of Great Britain in London:*
Proceedings. Vol. XV, part 2. 1898. 8⁰.

*The English Historical Review in London:*
Historical Review. Vol. XIII, No. 49. 50. 1898. 8⁰.

*Royal Society in London:*
Year-Book 1897—8. 8⁰.
Proceedings. Vol. 62, No. 382—388. Vol. 63, No. 389—398. 1898. 8⁰.

*R. Astronomical Society in London:*
Monthly Notices. Vol. 58, No. 2—7. 1897/98. 8⁰.

*Chemical Society in London:*
Journal. No. 422—427 (January—June 1898). 8⁰.
Proceedings. No. 187—197. Session 1897/98. 8⁰.

*Geological Society in London:*
The quarterly Journal. Vol. 53, part 1—4. 1897. 8⁰.
Geological Literature 1896. 1897. 8⁰.

*Royal Microscopical Society in London:*
Journal. 1898, part 1—3. 8⁰.

*Zoological Society in London:*

Proceedings. 1897. Part IV. 1898. Part I. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. XIV, part 5. 6. 4⁰.

*Zeitschrift „Nature" in London:*

Nature. No. 1472—1495. 1898. 4⁰.

*Missouri Botanical Garden in St. Louis:*

3ᵈ and 9ᵗʰ annual Report. 1892 u. 1898. 8⁰.

*Société géologique de Belgique in Lüttich:*

Annales. Tome 22, livr. 3; Tome 23, livr. 3; Tome 24, livr. 2; Tome 25, livr. 1. 1894—98. 8⁰.

*Société Royale des Sciences in Lüttich:*

Mémoires. II. Série, Tome 20. Bruxelles 1898. 8⁰.

*Universität in Lund:*

Acta Universitatis Lundensis. Tom. 33, afdel. 1. 2. 1897. 4⁰.

*Société botanique in Luxemburg:*

Récueil des mémoires et des travaux. No. XIII. 1890—96. 1897. 8⁰.

*Académie des sciences in Lyon:*

Mémoires. Sciences et Lettres. IIIᵉ Série. Tome 4. Paris 1896. gr.-8⁰.

*Société d'agriculture science et industrie in Lyon:*

Annales. VII. Série. Tome 4. 1896. 1897. gr.-8⁰.

*Société Linnéenne in Lyon:*

Annales. Tome 43. 1896. gr.-8⁰.

*R. Academia de ciencias exactas in Madrid:*

Memorias. Tomo XVII. 1897. 4⁰.
Discursos leidos en la recepción pública de Pr. M. Sagasta. 1897. 4⁰.
Anuario 1898. 8⁰.

*R. Academia de la historia in Madrid:*

Boletin. Tomo 32, cuad. 1—6. 1898. 8⁰.

*Biblioteca Nazionale di Brera in Mailand:*

Lud. Frati, I Codici Morbio della R. Biblioteca di Brera. Forli 1897. 4⁰.

*R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:*

Memorie. Vol. XVIII, fasc. 5. 1898. 4⁰.

*R. Osservatorio astronomico in Mailand:*

Osservazioni meteorologiche eseguite nell' anno 1897. 1898. 4⁰.

*Società Italiana di scienze naturali in Mailand:*

Atti. Vol. 37, fasc. 2. 1898. 8⁰.

*Società Storica Lombarda in Mailand:*

Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 24, fasc. 16. 1897. Anno 25, fasc. 17. 18. 1898. 8⁰.

*Ortsausschuss für deutsche Nationalfeste in Mainz:*

Die Reichsfeststätte bei Mainz. Denkschrift. 1897. 8⁰.

*Literary and philosophical Society in Manchester:*

Memoirs and Proceedings. Vol. 42, part I. II. 1898. 8⁰.

*Faculté des sciences in Marseille:*

Annales. Tome VIII, fasc. 5—10 et tables. 1898. 4⁰.

*Fürsten- und Landesschule St. Afra in Meissen:*

Jahresbericht für das Jahr 1897/98. 1898. 4°.

*Royal Society of Victoria in Melbourne:*

Transactions and Proceedings. Vol. XXII, XXIII, XXIV, part I. II. New Series. Vol. I—IX, X, part I. 1888—97. 8°.

*Rivista di Storia Antica in Messina:*

Rivista. Anno III, fasc. 1. 1898. 8°.

*Observatorio meteorológico-magnético central in México:*

Boletin mensual. Octubre—Diciembre 1897. Enero, Febrero 1898. 4°.
Resumenes mensuales de 1891 y 1892. 1897. 4°.

*Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:*

Memorias. Tomo 10, No. 5—10. 1897. Tomo 11, No. 1—4. 1898. 8°.

*Amministrazione delle Pubblicazioni Cassinesi in Montecassino (Caserta):*

Spicilegium Casinense. Tomus III, pars prior. 1897. 4°.

*Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:*

Anuario estadístico de l'Uruguay. Año 1896. 1898. 4°.

*Académie de sciences et lettres in Montpellier:*

Mémoires. Section des lettres. 2e Série. Tome 1, No. 5—7. Tome 2, No. 1.
Section des sciences. 2e Sér. Tome 2, No. 2—4. 1895—97. 8°.

*Numismatic and Antiquarian Society in Montreal:*

The Canadian Antiquarian. IIId Series. Vol. I, No. 2. 1898. 8°.

*Société Impériale des Naturalistes in Moskau:*

Bulletin. Année 1897, No. 2—4. 1897/98. 8°.

*Mathematische Gesellschaft in Moskau:*

Matematitscheskij Sbornik. Band I—XX. 1866—97. 8°.

*Statistisches Amt der Stadt München:*

Münchener Jahresübersichten für 1896 (Mitteilungen XVI, 1). 1898. 4°.

*Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:*

Correspondenzblatt. Jahrg. 28, No. 11. 12. 1897. Jahrg. 29, No. 1—6. 1898. 4°.

*K. Armeebibliothek in München:*

I. Nachtrag zum Bücherkatalog der k. Armeebibliothek vom Jahr 1885. 1898. 8°.

*K. bayer. technische Hochschule in München:*

Personalstand. Sommer-Semester 1898. 8°.

*Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:*

Schematismus der Geistlichkeit für das Jahr 1898. 8°.
Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1898, No. 1—18. 8°.

*K. Staatsministerium des Innern für Kirchen- und Schulangelegenheiten in München:*

Ergebnisse der Untersuchung der Hochwasserverhältnisse im deutschen Rheingebiete. Heft V. Berlin 1898. fol.

*Universität in München:*

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4° u. 8°.
Amtliches Verzeichniss des Personals. Sommer-Semester 1898. 8°.
Verzeichniss der Vorlesungen. Sommer-Semester 1898. Winter-Semester 1898/99. 4°.

*Aerztlicher Verein in München:*

Sitzungsberichte. Vol. VII, 1897. 1898. 8⁰.

*Historischer Verein in München:*

Monatsschrift. 1898, No. 1—4. 8⁰.

*K. Oberbergamt in München:*

Geognostische Jahreshefte. IX. Jahrgang 1896. Cassel 1897. 4⁰.

*Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:*

Hochschul-Nachrichten. 1898, No. 88—93 (Januar—Juni). 4⁰.

*K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:*

Beobachtungen der meteorologischen Stationen des Königreichs Bayern. 19. Jahrgang, Heft 1—3. 1897/98. 4⁰.

Uebersicht über die Witterungsverhältnisse. 1897, November—December. 1898, Januar—Mai. fol.

*Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:*

25. Jahresbericht für 1896/97. 1897. 8⁰.

*Académie de Stanislas in Nancy:*

Mémoires. 5e Série. Tome 14. 1897. 8⁰.

*Société des sciences in Nancy:*

Bulletin. Série II. Tome 14, fasc. 31, 1896. 1897. 8⁰.

*Reale Accademia di scienze morali et politiche in Neapel:*

Atti. Vol. 29. 1898. 8⁰.

Rendiconto. Anno 36. 1897. 8⁰.

*Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:*

Rendiconto. Serie 3. Vol. 3, fasc. 12. 1897. Vol. 4, fasc. 1—5. 1898. 4⁰.

*Zoologische Station in Neapel:*

Mittheilungen. 13. Band, Heft 1 u. 2. Berlin 1898. 8⁰.

*North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):*

Transactions. Vol. 46, part 6; Vol. 47, part 2. 3. 1898. 8⁰.

An Account of the Strata of Northumberland U—Z. 1897. 8⁰.

*The American Journal of Science in New-Haven:*

Journal. IV. Series. Vol. V, No. 25—29. Vol. VI, No. 31. 1898. 8⁰.

*American Museum of Natural History in New-York:*

Bulletin. Vol. IX. 1897. 8⁰.

*American Geographical Society in New-York:*

Bulletin. Vol. 29, No. 4. 1897. Vol. 30, No. 1. 2. 1898. 8⁰.

*Archaeological Institute of America in New-York:*

American Journal of Archaeology. Vol. XI, No. 4. (Oct.—Dec. 1896.) II. Series. Vol. I, No. 1. 2. 4. 5. 1897/98. 8⁰.

*Verein für Geschichte der Stadt Nürnberg:*

Jahresbericht 1895, 1896 u. 1897. 1896—98. 8⁰.

Mittheilungen. Heft XII, Abth. 1. 2. 1896—98. 8⁰.

Des Hieronymus Braun Prospekt der Stadt Nürnberg vom Jahre 1608. 1896. fol.

*Germanisches Nationalmuseum in Nürnberg:*

Anzeiger. Jahrgang 1897. 8⁰.

Mittheilungen. Jahrgang 1897. 8⁰.

Katalog der Gewebesammlung. Th. I. 1897. 8⁰.

*Neurussische naturforschende Gesellschaft in Odessa:*

Sapiski. Tom. XVIII, XXI, 2; XXII, 1. 1897—98. 8⁰.

*Historischer Verein in Osnabrück:*

Osnabrücker Geschichtsquellen. Band III, Heft 1. 1898. 8⁰.

*Verein für Geschichte und Landeskunde in Osnabrück:*

Mittheilungen. 22. Band, 1897. 1898. 8⁰.

*Verein für Geschichte und Altertumskunde Westfalens in Paderborn:*

Zeitschrift für vaterländische Geschichte. Bd. 55 und Ergänzungsheft I, Liefg. 4. Münster 1897. 8⁰.

*R. Accademia di scienze in Padua:*

Atti e Memorie. Nuova Serie. Vol. XIII. 1897. 8⁰.

*Circolo matematico in Palermo:*

Rendiconti. Tomo XII, fasc. 1—4. 1898. 4⁰.

*Collegio degli Ingegneri in Palermo:*

Atti. Anno 1897, Agosto—Dicembre. 1898, Gennaio—Aprile. 1897—98. 4⁰.

*Académie de médecine in Paris:*

Rapport sur les vaccinations pendant l'année 1894 et 1895. Melun 1896. 4⁰.

Rapports annuels de la Commission permanente de l'hygiène de l'enfance pour l'année 1895 et 1896. 1895/96. 8⁰.

Memoires. Tome 36, fasc. 1. 2; Tome 37, fasc. 1. 2. 1891—95. 4⁰.

Bulletin. 1898, No. 1—27. 8⁰.

*Académie des sciences in Paris:*

Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Série I. Tome 9. 10. 1896/97. Série II. Tome 3. 1897. 4⁰.

Comptes rendus. Tome 126, No. 1—26. 1898. 4⁰.

*Bibliothèque nationale in Paris:*

Notice sur les manuscrits syriaques acquis depuis 1874. Par J. B. Chabot. 1896. 4⁰.

*École polytechnique in Paris:*

Journal. II. Série. 2ᵉ cahier. 1897. 4⁰.

*Comité international des poids et mesures in Paris:*

Procès-verbaux des séances de 1897. 8⁰.

*Ministère de l'instruction publique in Paris:*

Bibliographie des travaux scientifiques des sociétés savantes de la France par J. Deniker. Tome 1, livr. 2. 1897. 4⁰.

*Moniteur Scientifique in Paris:*

Moniteur. Livr. 671 (Nov. 1897), Livr. 674—679 (Février-Juillet 1898). 4⁰.

*Musée Guimet in Paris:*

Petit Guide illustré, par L. de Milloué. Nouv. récension. 1894. 8⁰.

Annales in 4⁰. Tome XXVI, part 2. 3. 1897.

Revue de l'histoire des réligions. Tome 33, No. 3; Tome 34, No. 1—3; Tome 35, No. 1—3; Tome 36, No. 1. 2. 1896/97. 8⁰.

*Muséum d'histoire naturelle in Paris:*

Bulletin. Année 1896, No. 7. 8. Année 1897, No. 1—8. 8⁰.

Nouvelles Archives. Sér. III. Tome VIII, fasc. 1. 2. 1896. Tome IX, fasc. 1. 1897. 4⁰.

*Société d'anthropologie in Paris:*

Bulletins. IV. Série, Tome VII, 5. 6. 1896. Tome VIII, 1—4. 1897. 8⁰.

*Société des études historiques in Paris:*

Revue. 63e année 1897, No. 4, 64e année 1898, No. 1—3. 8⁰.

*Société de géographie in Paris:*

Comptes rendus. 1897, No. 18—20; 1898, No. 1—5. 8⁰.
Bulletin. VII. Série. Tome 17, 4e trimestre; Tome 18, 3e trimestre; Tome 19, 1e trimestre. 1896/98. 8⁰.

*Société mathématique de France in Paris:*

Bulletin. Tome 25, No. 8. 9 et dernier. 1897. Tome 26, No. 1—3. 1898. 8⁰.

*Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:*

Mémoires. VIIIe Série. 1. Classe historico-philologique, Vol. I, No. 7, Vol. II, No. 1. 2. 2. Classe physico-mathématique, Tome 5, No. 6—13. Tom. 6, No. 1—3. 5. 1897—98. 4⁰.
Byzantina Chronika. Tom. IV, 3 u. 4. 1897. 4⁰.
Bulletin. V. Série, Tome VII, No. 2.

*Comité géologique in St. Petersburg:*

Bulletins. 1897, XVI, 3—9. 8⁰.

*Kaiserlich russische archäologische Gesellschaft in St. Petersburg:*

Sapiski. Orientalische Abtheilung. Bd. 10, Heft 1—4. 1897. 4⁰.

*Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:*

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 35, Lfg. 1. 1897. 8⁰.
Sach- und Namenregister der II. Serie 1885—1895. 1898. 8⁰.

*Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:*

Schurnal. Tom. 29, No. 9, 1897; Tom. 30, No. 1 u. 2. 3. 1898. 8⁰.

*Musée zoologique de l'Académie Impériale in St. Petersburg:*

Annuaire 1897. No. 4. 8⁰.

*Physikalisches Central-Observatorium in St. Petersburg:*

Annalen. Jahrg. 1896, partie I. II. 1897. 4⁰.

*Kaiserliche Universität in St. Petersburg:*

Godischni Akt (Jahrbuch). 1898. 8⁰.

*Academy of natural Sciences in Philadelphia:*

Proceedings. 1897, part II. III. 8⁰.

*American pharmaceutical Association in Philadelphia:*

Proceedings. 45th Meeting at Lake Minnetonka, August 1897. 8⁰.

*Geographical Society in Philadelphia:*

Charter, By-Laws, List of Members. 1898. 8⁰.

*Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:*

Alumni Report. Vol. 34, No. 1—5. 1898. 8⁰.

*American Philosophical Society in Philadelphia:*

Proceedings. Vol. 36, No. 156. 1897. 8⁰.

*R. Scuola normale superiore di Pisa:*

Annali. Vol. XIX. 1897. 8⁰.

*Società Toscana di scienze naturali in Pisa:*

Atti. Processi verbali. Vol. X, p. 243—292; Vol. XI, p. 1—10. 1897—98. 4⁰.

*K. Gymnasium in Plauen:*

Jahresbericht für 1897/98 nebst Programm. 1898. 4°.

*Historische Gesellschaft in Posen:*

Zeitschrift. 12. Jahrg., Heft 2—4. 1897. 8°.

*K. geodätisches Institut in Potsdam:*

Die Polhöhe von Potsdam, Heft I. Berlin 1898. 4°.
Bestimmungen von Azimuten im Harzgebiete. Berlin 1898. 4°.

*Astrophysikalisches Observatorium in Potsdam:*

Publicationen. Bd. XI. 1898. 4°.

*Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Literatur in Prag:*

Beiträge zur deutsch-böhmischen Volkskunde. Bd. I, 3; II, 1. 1898. 8°.
Mittheilung. No. VIII. 1898. 8°.
Rechenschaftsbericht für das Jahr 1897. 1898. 8°.

*K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:*

Památník na oslavu stých narozenin Františka Palackeko. 1898. 8°.
Jahresbericht für das Jahr 1897. 1898. 8°.
Sitzungsberichte 1897. a) Classe für Philosophie, 1897. b) Mathem.-naturw. Classe, 1897. I. II. 1898. 8°.

*Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:*

Časopis. Bd. 26, No. 4; Bd. 27, No. 3 u. 5. 1898. 8°.

*Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:*

Bericht über das Jahr 1897. 1898. 8°.

*Museum des Königreichs Böhmen in Prag:*

Památky. Vol. 17, sešit 4—8; Vol. 18, sešit 1. 2. 1896—98. 4°.
Časopis. Bd. 71, Heft 1—6. 1897. 8°.

*K. K. Sternwarte in Prag:*

Magnetische und meteorologische Beobachtungen im Jahre 1897. 58. Jahrgang. 1898. 4°.

*Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:*

Die feierliche Installation des Rectors für das Jahr 1897/98. 1897. 8°.
Ordnung der Vorlesungen. Sommer-Semester 1898. 8°.

*Zeitschrift „Krok“ in Prag:*

„Krok“. Bd. XII, No. 1—3. 1898. 8°.

*Verein für Natur- und Heilkunde in Pressburg:*

Verhandlungen. Jahrg. 1894—96, N. Folge, Heft 9. 1897. 8°.

*Archaeological Institute of America in Princeton (New-Jersey):*

American Journal of Archaeology. Vol. XI, No. 1—4; XII, No. 1—4. 1895—96. 8°.

*R. Accademia dei Lincei in Rom:*

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. VI, Semestre 2, fasc. 12; Vol. VII, Semestre 1, fasc. 1—11. 1897—98. 4°.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. 4, parte 1. Memorie. Vol. 5, parte 2. Notizie degli scavi. Novembre-Decembre 1897. Gennaio-Marzo 1898. 4°.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. VI, fasc. 11. 12. 1897. Vol. VII, fasc. 1—4. 1898. 8°.
Annuario 295 (1898). 8°.

*Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:*

Atti. Anno 51, Sessione I—III. 1897/98. 4°.

*R. Comitato geologico d'Italia in Rom:*

Bollettino. Anno 1897, No. 3. 4. 8°.

*Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:*

Mittheilungen. Band XII, fasc. 3. 4. 1898. 8°.

*R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:*

Indici e cataloghi IV. I. codici Palatini. Vol. 2, fasc. 5. 1897. 8°.
Le opere di Galileo Galilei. Vol. VII. Firenze 1897. 4°.

*R. Corpo delle miniere, Ufficio geologico in Rom:*

Carta geologica delle Alpi Apuane in 4 fogli e 3 tavole di sezioni. 1897. fol.

*Service de la carte géologique d'Italie in Rom:*

Carte géologique d'Italie feuilles 236—238, 241—243, 245—247, 255, 263, 264 et Table 1. 2. 1897. fol.

*R. Società Romana di storia patria in Rom:*

Archivio. Vol. XX, fasc. 3. 4. 1897. 8°.

*Société Batave de philosophie experimentale in Rotterdam:*

Programme 1897. 8°.

*Académie des sciences in Rouen:*

Précis analytique des travaux. Année 1895—96. 1897. 8°.

*R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:*

Atti. Serie III, Vol. 3, fasc. 4. 8°.

*Essex Institute in Salem:*

Bulletin. Vol. 26, p. 65—202; Vol. 27, p. 1—147; Vol. 28, p. 1—56; Vol. 29, p. 1—49. 1894/97. 8°.

*Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:*

Mittheilungen. 37. Vereinsjahr. 1897. 8°.

*Historischer Verein in St. Gallen:*

Die Vadianische Briefsammlung der Stadtbibliothek St. Gallen. III. Herausg. v. Emil Arbenz. 1897. 8°.
Ferdinand Fürchtegott Huber v. Karl Nef. 1898. 4°.

*Naturwissenschaftliche Gesellschaft in St. Gallen:*

Bericht über das Jahr 1895—96. 1897. 8°.

*Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):*

Almanaque naútico 1899. 1897. 8°.

*Californio Academy of Sciences in San Francisco:*

Contributions to Biology. No. X, XI. 1897. 8°.
Proceedings. III^d Series, Zoology, Vol. I, No. 5; Botany, Vol. 1, No. 2; Geology, Vol. 1, No. 3. 1897. 4°.

*Museu Paulista in S. Paulo:*

Revista do Museu Paulista. Vol. 2. 1897. 8°.

*Bosnisch-Herzegowinische Landesregierung in Sarajevo:*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im Jahre 1896. Wien 1897. 4°.

*Verein für mecklenburgische Geschichte in Schwerin:*

Mecklenburgisches Urkundenbuch. Band 17. 18. 1897. 4⁰.

*K. K. archäologisches Museum in Spalato:*

Bullettino di Archeologia. Anno XX, 1897, No. 12; XXI, 1898, No. 1—3. 8⁰.

*Verein für Geschichte und Alterthümer in Stade:*

Geschichte der Stadt Stade, v. M. Bahrfeldt. 1897. 8⁰.

*Gesellschaft für Pommer'sche Geschichte in Stettin:*

Baltische Studien. Neue Folge, Band 1. 1897. 8⁰.

*K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:*

Handlingar. N. F. Band 29. 1896—97. 4⁰.

*K. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademie in Stockholm:*

Månadsblad. 23. Jahrg. 1894. 1897—98. 8⁰.
Antiquarisk Tidskrift för Sverige. Bd. XVI. 4. 1895—98. 8⁰.

*K. öffentliche Bibliothek in Stockholm:*

Register 1886—95. 1896—98. 8⁰.
Sveriges offentliga bibliotek Accessions-Katalog 12. 1897. 1898. 8⁰.

*Geologiska Förening in Stockholm:*

Förhandlingar. Band XIX, Heft 7; Band XX, Heft 1—4. 1898. 8⁰.

*Institut Royal géologique in Stockholm:*

Sveriges geologiska undersökning. Series C, No. 161. 163—171. 173—175. 1896—97. 8⁰.

*Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:*

Monatsbericht. Bd. 31, No. 8—10. 1897. Bd. 32, No. 1—4. 1898. 8⁰.

*K. Württemb. statistisches Landesamt in Stuttgart:*

Württembergische Jahrbücher für Statistik. Jahrg. 1897. 1898. 4⁰.

*Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:*

Records. Vol. 5, part 4. 1898. 4⁰.
Mineral Resources, No. 1. 2. 1898. 8⁰.

*Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:*

Boletín. Tomo 2, No. 3. Mexico 1898. 4⁰.
Anuario. Año XVIII. Año de 1898. 1897. 8⁰.

*Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):*

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. III, No. 3. 1897. 4⁰.

*Canadian Institute in Toronto:*

Proceedings. Vol. I, parts 4 and 5. 1898. 8⁰.
Transactions. Vol. V, part 2. 1898. 8⁰.

*Faculté des sciences in Toulouse:*

Annales. Tome 11, Année 1897; 12, Année 1898. 4⁰.

*R. Accademia delle scienze in Turin:*

Atti. Vol. 33, disp. 1—13. 1897—98. 8⁰.

*Gesellschaft „Eranos" in Upsala:*

Eranos. Acta philologica Luecana. Vol. II, fasc. 3. 4; Vol. III, fasc. 1. 2. 1897—98. 8⁰.

*Humanistika Vetenkaposamfund in Upsala:*

Skrifter. Band V. 1897. 8⁰.

*Meteorolog. Observatorium der Universität Upsala:*

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. XXIX, Année 1897. 1897—98. fol.

*Historisch Genootschap in Utrecht:*

Werken. Ser. III, No. 8, 1897; N. Ser., No. 60, 1898. s'Gravenhage. 8⁰.

*Provincial Utrechtsch Genootschap in Utrecht:*

Aanteekeningen 1897. 8⁰.
Verslag. 1897. 8⁰.

*Bureau of American Ethnology in Washington:*

XVIth annual Report for 1894—95. 1897. 4⁰.

*U. S. Department of Agriculture in Washington:*

Yearbook 1897. 1898. 8⁰.

*American Jewish Historical Society in Washington:*

Publications. No. 6. 1897. 8⁰.

*U. S. Coast and Geodetic Survey in Washington:*

Report for 1896. 1897. 4⁰.

*Smithsonian Institution in Washington:*

Miscellaneous Collections. No. 1084. 1087. 1898. 8⁰.
History of the first half Century of the Smithsonian Institution 1846—96. 1897. 4⁰.

*Surgeon General's Office, U. S. Army in Washington:*

Index-Catalogue. II. Series. Vol. 2. 1897. 4⁰.

*United States Geological Survey in Washington:*

Bulletin. No. 87. 127. 130. 135—148. 1897. 8⁰.
Monographs. No. XXV—XXVIII und 1 Atlas in fol. 1896—97. 4⁰.
XVIIth annual Report for 1895—96. Part I. II. 1896. 4⁰.

*K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:*

Jahrbuch. Jahrg. 1897. Band 47, Heft 2. 1897. 4⁰.
Verhandlungen. 1897, No. 14—18; 1898, No. 1—8. 4⁰.
Abhandlungen. Band XVII, Heft 4. 1897. fol.

*Geographische Gesellschaft in Wien:*

Mittheilungen. Band 40. 1897. 8⁰.

*K. K. Gradmessungs-Commission in Wien:*

Astronomische Arbeiten. Band IX. 1897. 4⁰.

*K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:*

Wiener klinische Wochenschrift. 1898, No. 1—26. 4⁰.

*Anthropologische Gesellschaft in Wien:*

Mittheilungen. Band XXVII, 6. 1897. Band XXVIII, 1—3. 1898. 4⁰.

*Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:*

Verhandlungen. Band 47, Heft 10; Band 48, Heft 1—5. 1898. 8⁰.

*K. K. militär-geographisches Institut in Wien:*

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Band X u. XI. 1897. 4⁰.

*K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:*

Annalen. Band XII, 2—4. 1897. 4⁰.

*Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:*

Mittheilungen. 1898, No. 3 u. 4. 4⁰.

*Oriental Nobility Institute in Woking:*

Vidyodaya. Vol. 26, No. 12; Vol. 27, No. 1—6. 1897/98. 8⁰.

*Ortsverein für Geschichte und Alterthumskunde in Wolfenbüttel:*

Braunschweigisches Magazin. 3. Band, 1897. Braunschweig 1897. 4⁰.

*Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:*

Verhandlungen. N. F. Band XXXI, No. 8. 1898. 8⁰.
Sitzungsberichte. Jahrg. 1897, No. 3—9. 8⁰.

*Historischer Verein von Unterfranken in Würzburg:*

Archiv. 39. Jahrgang. 1897. 8⁰.
Jahresbericht für 1896. 1897. 8⁰.

*Antiquarische Gesellschaft in Zürich:*

Mittheilungen. Band XXIV, 5. 1898. 4⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Zürich:*

Vierteljahrsschrift. 42. Jahrg., 1897, Heft 3 u. 4; 43. Jahrg., 1898, Heft 1. 1898. 8⁰.

*Physikalische Gesellschaft in Zürich:*

9. Jahresbericht. 1896 u. 1897. Uster-Zürich 1898. 8⁰.

*Sternwarte in Zürich:*

Astronomische Mitteilungen. No. 89. 1898. 8⁰.

*Universität in Zürich:*

Schriften a. d. J. 1897—98 in 4⁰ u. 8⁰.

*Schweizerische meteorologische Zentralstation in Zürich:*

Annalen. 32. Jahrgang, 1895. 1897. 4⁰.

### Von folgenden Privatpersonen:

*Prinz Albert I. von Monaco:*

Sur la quatrième campagne scientifique de la „Princesse Alice". Paris 1898. 4⁰.
Sur les observations météorologiques de l'Océan Atlantique. Paris 1898. 4⁰.

*Robert Ball in Dublin:*

The XIIth and concluding Memoir on the Theorie of Screws. Dublin 1898. 4⁰.

*Antonio Cabreira in Lissabon:*

Sur l'aire des polygones. Lisbonne 1897. 8⁰.
Sur les vitesses sur la spirale. Lisbonne 1898. 8⁰.

*Auguste Daubrée's Relicten in Paris:*

Auguste Daubrée 25. Juin 1814 bis 29. Mai 1896. Paris 1897. 4⁰.

*Ja. Denisov in Kharkow:*

Die Dochmien bei Aeschylus (russ.). Kharkow 1898. 8⁰.

*Alexander Dietz in Frankfurt a/M.:*

Frankfurter Bürgerbuch. Frankfurt 1897. 4⁰.

*Charles Janet in Bauvais (Oise):*

Études sur les fourmis No. 14—16; Limoges, Paris, Lille 1897. 8⁰.
Notice sur les travaux scientifiques de M. Charles Janet. Lille 1896. 8⁰.

*Friedrich Keinz in München:*

Ein vergessener bayerischer Dichter des XV. Jahrhunderts aus Passau. München 1898. 8⁰.

*A. Lacroix in Paris:*

A. des Cloizeaux 1817—1897. Paris 1897. 4⁰.

*Vito La Mantia in Palermo:*

Consuetudini di Trapani. Trapani 1895—97. 8⁰.
Consolato del mare e dei mercanti. Palermo 1897. 8⁰.
Privilegi inediti di Messina. Palermo 1897. 8⁰.

*Auguste Le Jolis in Cherbourg:*

Remarques sur la Nomenclature algologique. Paris 1896. 8⁰.

*Tito Martini in Venedig:*

Intorno al calore che si sviluppa nel bagnare le polveri nuove ricerche. Venezia 1898. 8⁰.

*Gabriel Monod in Versailles:*

Revue historique. Tome 66, No. I. II; Tome 67, No. I. II. Paris 1898. 8⁰.

*Giovanni Omboni in Padua:*

Il gabinetto di geologia della R. Università di Padova. Padova 1898. 8⁰.

*Ed. Piette in Rumigny, Ardennes:*

Études d'ethnographie préhistorique. Paris 1897. 8⁰.

*Dietrich Reimer in Berlin:*

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. 3. Jahrgang 1897, Heft 3 u. 4. Berlin. 4⁰.

*Hugo Schuchardt in Graz:*

Tchèques et Allemands. Paris 1898. 8⁰.

*Jr. Skwortzow in Kharkow:*

Soleil, terre et électricité. Kharkow 1898. 8⁰ (in französischer und in russischer Sprache).

*Jerge Socolow in Moskau:*

Nouvelles recherches astronomiques. Moscou 1896. 8⁰.
Des planètes se trouvant vraisemblablement au delà de Mercure et de Neptune. Moscou 1897. 8⁰.

*Béla Szentesy in Budapest:*

Die geistige Ueberanstrengung des Kindes. Budapest 1898. 8⁰.

*A. Thieullen in Paris:*

Les véritables instruments usuels de l'âge de la pierre. Paris 1897. 4⁰.

*N. Wecklein in München:*

Euripidis fabulae. Vol. I, pars 4, Electra. Lips. 1898. 8⁰.

*Melchior Weiss in Freising:*

Ueber mariologische Schriften des seligen Albertus. Paris 1898. 8⁰.
Primordi novae bibliographiae Alberti Magni. Parisiis 1898. 8⁰.

# Sitzungsberichte

der

# königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

---

## Mathematisch-physikalische Classe.

### Sitzung vom 2. Juli 1898.

1. Herr H. Seeliger hält den in der Juni-Sitzung zurückgestellten, für die Denkschriften bestimmten Vortrag: „Betrachtungen über die räumliche Vertheilung der Fixsterne."

2. Herr Gustav Bauer beantragt eine in dem Nachlasse des verstorbenen ordentlichen Mitgliedes der Classe, Ludwig v. Seidel, gefundene Abhandlung: „Ueber die Bedingungen möglichst präciser Abbildung eines Objekts von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat", welche in der Classen-Sitzung vom 6. März 1880 vorgetragen und zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmt worden war, aber nicht zur Publikation gelangte, in den Sitzungsberichten zu veröffentlichen; Herr Professor Dr. Sebastian Finsterwalder hatte die Güte, dieselbe durchzusehen und eine Einleitung dazu zu schreiben.

3. Herr Eugen v. Lommel überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. Ludwig Fomm, Assistenten am physikalischen Institut der Universität: „Ueber eine neue Erscheinung bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen.“

4. Herr Walter Dyck legt eine Abhandlung des Herrn Dr. Eduard v. Weber, Privatdozenten an der Universität: „Ueber Schaaren von Bilinearformen“, vor.

# Ueber eine neue Erscheinung bei elektrischen Entladungen in verdünnten Gasen.

Von Dr. **Ludwig Fomm.**

(*Eingelaufen 2. Juli.*)

Legt man um eine Glasröhre zwei Ringe von dünnem Drahte und verbindet dieselben mit den Polen eines Induktoriums, so zeigen sich beim Evakuieren der Röhre folgende Erscheinungen:

Die Glasröhre hatte eine Länge von 20 cm, einen Durchmesser von 3 cm und war mittelst eines seitlich angeblasenen Rohres mit einer Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Die Ringe aus 0,5 mm starkem Aluminiumdrahte waren in gegenseitiger Entfernung von 15 cm angebracht und mit den Polen eines Induktoriums von 15 cm Maximal-Funkenlänge in Verbindung.

Bei den ersten Pumpenzügen hat man ganz ähnliche Erscheinungen, wie bei den gewöhnlichen Geissler-Röhren. Zuerst funkenartige Entladung, dann Auftreten von positivem und negativem Licht, Bildung eines dunklen Raumes und Schichtung des positiven Lichtes.

In Röhren mit äusseren Elektroden treten nur oscillatorische Entladungen auf, da die Elektroden, in unserem Falle die Ringe, die eine Belegung, das leitende Gas die andere Belegung eines Kondensators darstellen, während das Glas die Rolle des Dielektrikums übernimmt.

Bei solchen Entladungen erscheinen beide Elektroden für das Auge gleichzeitig als Anode und Kathode. Mit Hülfe eines Magneten, dessen Kraftlinien senkrecht zur Röhrenaxe verlaufen, lassen sich jedoch leicht die übereinander gelagerten Erscheinungen trennen.

Bei weiterem Evakuieren bildet sich konzentrisch zu den Ringen an der inneren Glaswand ein blauer Ring und aus der Mitte desselben quillt scheinbar positives Licht, den ganzen Querschnitt der Röhre erfüllend und sich allmählich schichtend.

Das blaue Licht unter den Ringen wächst dann sowohl seitlich als gegen die Röhrenaxe hin, bis es den Querschnitt ganz ausfüllt, während das positive Licht allmählich verschwindet.

Jetzt tritt eine merkwürdige Erscheinung auf. Während das Vakuum höher wird, löst sich das blaue Licht unter den Ringen von den Glaswänden los und schnürt sich in der Ringebene gegen deren Mittelpunkt zusammen, so dass ein Doppelkegel entsteht, dessen Spitze im Mittelpunkt des Ringes sitzt.

Der vordere Theil verwandelt sich dann in einen langgestreckten graublauen Strahl, während der hintere Kegel, d. h. der der anderen Elektrode abgewandte Kegel, zu einem wulstartigen Gebilde wird.

Diese blaugrauen Strahlen zeigen nun alle Eigenschaften von Kathodenstrahlen. Sie breiten sich unbekümmert um die Stellung des zweiten Ringes aus, stehen in ihrer Hauptmasse senkrecht zur Ringebene, gleichgültig, welche Neigung dieselbe zur Axe der Glasröhre haben mag, erwecken, wo sie an die Glaswand treffen, lebhafte Phosphorescenz, setzen ein in ihren Weg gestelltes Rädchen in Bewegung und werden vom Magneten abgelenkt, wobei sie sich um den Mittelpunkt des Ringes als Ausgangspunkt drehen. Der Wulst dagegen, der als rückwärtige Fortsetzung dieser Strahlen zu betrachten ist, unterliegt dem Einfluss des Magneten weniger und erregt die Glaswand zu rothgelber Phosphorescenz.

Bei Anwendung von zwei Ringen als Elektroden entstehen diese blaugrauen Strahlen nur in dem Raume zwischen den beiden Elektroden. Verbindet man dagegen nur einen

Ring mit dem Induktorium, während man den freien Pol des Letzteren zur Erde ableitet, so treten diese Strahlen auf beiden Seiten des Ringes auf.

Ist das Vakuum hoch genug, so werden diese Strahlen allmählich unsichtbar und sind nur mehr an ihrer phosphorescenzerregenden Wirkung zu erkennen; zugleich bildet sich zu beiden Seiten der Ringe ein dunkler Streifen auf dem Glase, dem ein breiter phosphorescierender sich anschliesst.

Schaltet man zwischen die Ringe eine metallische Platte, welche die Röhre ziemlich gut abschliesst, so verhält sich diese wie eine metallische Trennungsfläche in einem Elektrolyten. Die Platte wird zur Elektrode und sendet intensive Strahlen aus senkrecht zu ihrer Oberfläche und zwar aus ihrem Mittelpunkte, welche lebhafte Phosphorescenz und Röntgenstrahlen erzeugen. Dasselbe findet auch statt, wenn die Platte in ihrer Mitte durchbohrt ist.

Was für eine Metallplatte gilt, findet auch bei mehreren statt; sobald dieselben als Trennungsflächen auftreten, übernehmen sie die Rolle von Elektroden.

# Ueber Schaaren von Bilinearformen.

Von **E. von Weber.**

*(Eingelaufen 11. Juli.)*

In der vorliegenden Mitteilung soll die Invariantentheorie einer Schaar von Bilinearformen

$$(1)\qquad u\cdot\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta + v\sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, y_\beta \quad (\alpha\,\beta = 1, 2 \ldots n)$$

für den Fall entwickelt werden, dass die Formen (1) schiefsymmetrisch sind, d. h. den Relationen

$$(2)\qquad a_{\alpha\beta} = -\, a_{\beta\alpha};\; b_{\alpha\beta} = -\, b_{\beta\alpha}$$

unterliegen, und dass nur congruente lineare Transformationen der beiden Variabelngruppen $x$ und $y$ in Betracht gezogen werden. Dieser Fall, dem u. a. in der allgemeinen Theorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen eine hervorragende Wichtigkeit zukommt, erscheint umsomehr einer besonderen Untersuchung bedürftig, als auf ihn die von Weierstrass[1]) und Kronecker[2]) angegebenen Reductionsmethoden nicht ohne wesentliche Modificationen anwendbar sind.

## I.

1. Es sei $r$ der Rang der Matrix

$$(3)\qquad u p_{ik} + v q_{ik} \quad (i = 1, \ldots r;\; k = 1 \ldots s),$$

d. h. es mögen alle $r+1$-reihigen, nicht aber alle $r$-reihigen Determinanten dieser Matrix für beliebige Werte $u$, $v$ ver-

[1]) Berl. Monatsber. 1868 = Werke II p. 19.

[2]) Sitzungsber. Berl. Ak. 1890 p. 1225.

schwinden. Ist ferner $a = uv' - vu'$ ein gemeinsamer Linearfaktor aller $\tau$-reihigen Determinanten von (3), so werde für $h = \tau, \tau - 1, \dots 2, 1$ die höchste Potenz von $a$, die in den grössten gemeinschaftlichen Divisor aller $h$-reihigen Determinanten von (3) aufgeht, mit $a^{\tau_h}$ bezeichnet.

Nennt man dann eine $h$-reihige Determinante von (3) hinsichtlich $a$ „regulär", falls sie $a$ genau in der $\tau_h^{\text{ten}}$ Potenz enthält, so gilt nach Herrn Frobenius[1]) der Satz, dass jede reguläre $h$-reihige Determinante von (3) eine reguläre $h-1$-reihige Determinante als Unterdeterminante enthält.

2. Dies vorausgeschickt, sei $2\varrho$ der Rang der schiefsymmetrischen Matrix

$$(4) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0, & ua_{12} + vb_{12} & \dots & ua_{1n} + vb_{1n} \\ ua_{21} + vb_{21}, & 0 & \dots & ua_{2n} + vb_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ua_{n1} + vb_{n1}, & ua_{n2} + vb_{n2} & \dots & 0 \end{array} \right\|;$$

wir setzen

$$(ik) = -(ki) = ua \quad + vb_{ik}$$

und definieren den Ausdruck $(i_1, i_2 \dots i_{2k})$ in bekannter Weise durch die Recursionsformel

$$(5) \qquad (i_1 i_2 \dots i_{2k}) = \sum^{(c)} (i_1 i_2)(i_3 \dots i_{2k});$$

darin bedeuten $i_1, i_2 \dots$ irgend $2k$ Zahlen der Reihe 1 bis $n$, und $\sum^{(c)}$ ist eine Summe von $2k-1$ Gliedern, die alle aus dem ersten Glied durch einmalige, zweimalige ... $2k-2$-malige cyclische Vertauschung der Zahlen $i_2, i_3 \dots i_{2k}$ entstehen. Der Ausdruck (5) werde ein „Pfaff'sches Aggregat" der Ordnung $2k$ genannt; er ist eine binäre Form vom Grade $k$ in den Variabeln $u, v$ und sein Quadrat ist eine $2k$-reihige Hauptunterdeterminante der Matrix (4). Es gilt nun der Satz:

„Ist $d_\varrho$ der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Pfaff'schen Aggregate der Form

$$(i_1 i_2 \dots i_{2\varrho}),$$

[1]) Sitzungsber. Berl. Ak. 1894 p. 31.

also $d_\varrho^2$ der grösste gemeinschaftliche Divisor aller $2\varrho$-reihigen Hauptunterdeterminanten von (4), so ist $d_\varrho^2$ auch der grösste gemeinschaftliche Divisor aller $2\varrho$-reihigen Unterdeterminanten von (4)."

In der That, ist $A$ eine $2\varrho$-reihige Unterdeterminante von (4), und sind $D$ bezw. $D'$ diejenigen $2\varrho$-reihigen Hauptunterdeterminanten, die aus denselben Horizontalreihen bezw. Vertikalreihen entnommen sind, wie $A$, ferner $A'$ die $2\varrho$-reihige Determinante, deren Elemente zu denen von $A$ symmetrisch liegen, so hat man, da $2\varrho$ der Rang von (4)[1]:

$$DD' = AA' \equiv A^2.$$

Darnach ist $A^2$ durch $d_\varrho^4$, also $A$ durch $d_\varrho^2$ teilbar, und da auch umgekehrt der grösste gemeinsame Divisor aller Determinanten $A$ in $d_\varrho^2$ aufgeht, so ist unsere Behauptung erwiesen.

3. Es enthalte nun $d_\varrho$ den Linearfaktor $a$ in der Potenz $\lambda_\varrho$. Wir können dann, um die Ideen zu fixieren, annehmen, dass insbesondere das Aggregat

$$(1, 2 \ldots 2\varrho)$$

keine höhere Potenz von $a$ enthalte, dass also die Determinante

(6) $$D_{2\varrho} = |u a_{ik} + v b_{ik}| \quad (i, k = 1, 2 \ldots 2\varrho)$$

hinsichtlich $a$ regulär sei. Der grösste gemeinschaftliche Divisor aller Pfaff'schen Aggregate der Form:

$$(i_1 i_2 \ldots i_{2k})$$

wo $i_1 \ldots i_{2k}$ irgend $2k$ Zahlen der Reihe $1 \ldots 2\varrho$ bedeuten, enthalte $a$ in der Potenz $\lambda_k$.

Es seien nun mit $A_{ik}$ die $2\varrho - 1$-reihigen Minoren der Determinante $D_{2\varrho}$ bezeichnet. Nach bekannten Sätzen hat man dann:

$$A_{ii} A_{kk} - A_{ik} A_{ki} \equiv A_{ik}^2 \equiv D_{2\varrho} D_{2\varrho-2},$$

wo $D_{2\varrho-2}$ eine $2\varrho - 2$-reihige Hauptunterdeterminante von $D_{2\varrho}$ bezeichnet. Darnach ist der grösste gemeinschaftliche Divisor

---

[1]) Frobenius, Crelle's J. 82 p. 240 f.

aller $A_{ik}$ durch die Potenz $a^{\lambda_\varrho+\lambda_{\varrho-1}}$ und durch keine höhere Potenz von $a$ teilbar; wir wissen nach Nr. 1 überdies, dass eine der Determinanten $A_{ik}$ hinsichtlich $a$ regulär ist.

Es seien jetzt $i_1$, $i_2$; $k_1$, $k_2$ irgend welche Zahlen der Reihe $1 \dots 2\varrho$; dann hat man:

$$A_{i_1 k_1} A_{i_2 k_2} - A_{i_1 k_2} A_{i_2 k_1} \equiv D_{2\varrho} \cdot A',$$

wo $A'$ eine $2\varrho - 2$-reihige Unterdeterminante von $D_{2\varrho}$ bezeichnet. Alle diese Unterdeterminanten sind darnach durch $a^{2\lambda_{\varrho-1}}$ teilbar, und eine derselben ist nach Nr. 1 regulär. Da aber eine der Hauptunterdeterminanten $D_{2\varrho-2}$ durch keine höhere Potenz von $a$ teilbar ist, als $a^{2\lambda_{\varrho-1}}$, so ergibt sich, dass $D_{2\varrho}$ eine **reguläre** Hauptunterdeterminante $D_{2\varrho-2}$ enthält.

4. Auf die letztere lassen sich nun offenbar dieselben Schlüsse anwenden, wie auf $D_{2\varrho}$; man findet, dass $a$ in den grössten gemeinsamen Divisor aller $2\varrho - 3$-reihigen Unterdeterminanten von $D_{2\varrho-2}$ in der Potenz $a^{\lambda_{\varrho-1}+\lambda_{\varrho-2}}$ aufgeht, und dass eine dieser Determinanten, also auch eine $2\varrho - 4$-reihige Hauptunterdeterminante von $D_{2\varrho-2}$ regulär ist. Durch Wiederholung dieser Schlussweise erhält man folgende Sätze:

„Ist $d_h$ der grösste gemeinsame Divisor aller Pfaff'schen Aggregate der Form:

(7) $\qquad (i_1 i_2 \dots i_{2h}) \qquad (i_1, i_2 \dots = 1 \dots n;\ h \leqq \varrho),$

so ist $d_h^2$ der grösste gemeinschaftliche Divisor aller $2h$-reihigen Unterdeterminanten, und $d_h \cdot d_{h-1}$[1]) derjenige aller $2h - 1$-reihigen Unterdeterminanten der schiefsymmetrischen Matrix (4).“

„Ist $2\varrho$ der Rang der Matrix (4), und geht der Linearfaktor $a$ in $d_h$ in der Potenz $\lambda_h$ auf, so kann man die Zeilen und Colonnen der Matrix (4) so anordnen, dass die $\varrho$ Pfaff'schen Aggregate

$$P^{(i)} = (2i+1,\ 2i+2 \dots 2\varrho) \quad (i = 0,\ 1 \dots \varrho - 1)$$

bezw. durch $a^{\lambda_\varrho}, a^{\lambda_{\varrho-1}}, \dots a^{\lambda_1}$ und durch keine höhere Potenz von $a$ teilbar sind.“

---

[1]) $d_0 = 1$.

5. Wir setzen zur Abkürzung

$$\varphi = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta; \quad \psi = \sum b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

$$f = w\varphi - \psi; \quad w = -\frac{u}{v}.$$

Offenbar lässt sich die Form $\varphi$ von vorneherein so aus der Schaar (1) auswählen, dass die $2\varrho$-reihigen Determinanten der Matrix (4) für $v = 0$ nicht sämtlich verschwinden. Dann können wir schreiben:

$$d_h = (-v)^{\sum_1^r \nu \lambda_h^{(\nu)}} \cdot (w - w^{(1)})^{\lambda_h^{(1)}} (w - w^{(2)})^{\lambda_h^{(2)}} \ldots (w - w^{(r)})^{\lambda_h^{(r)}},$$

indem wir die Anzahl der verschiedenen Linearfaktoren von $d_\varrho$ mit $r$ bezeichnen. Setzt man

$$\lambda_0^{(\nu)} = 0; \quad \lambda_h^{(\nu)} - \lambda_{h-1}^{(\nu)} = e_{\varrho-h+1}^{(\nu)} \ (h = \varrho,\ \varrho - 1 \ldots 1),$$

so sind nach Nr. 4 die Elementarteiler der Matrix (4) die folgenden:

$$(w - w^{(\nu)})^{e_1^{(\nu)}},\ (w - w^{(\nu)})^{e_1^{(\nu)}};\ (w - w^{(\nu)})^{e_2^{(\nu)}},\ (w - w^{(\nu)})^{e_2^{(\nu)}};\ \ldots$$
$$(\nu = 1, 2 \ldots r),$$

sie sind also paarweise identisch.

6. Ist der Rang $2\varrho$ der Matrix (4) kleiner als $n$, und schreiben wir

$$n - 2\varrho = \bar{\omega};$$

$$\varphi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial y_i};\ \psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial y_i};\ \bar{\varphi}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i};\ \bar{\psi}_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

so bestehen zwischen den Ausdrücken $w\varphi_i - \psi_i$ genau $\bar{\omega}$ linear unabhängige lineare Identitäten, deren Coefficienten ganze Funktionen von $w$ sind; wir wollen sie in der Form schreiben:

$$\sum_1^n{}^k \sum_0^{m_s}{}^h c_{hk}^{(s)} w^h (w\varphi_k - \psi_k) \equiv 0 \ (s = 1, 2, \ldots \bar{\omega}). \tag{8}$$

Natürlich hat man aus Symmetriegründen ebenso

$$\sum_1^n{}^k \sum_0^{m_s}{}^h c_{hk}^{(s)} w^h (w\bar{\varphi}_k - \bar{\psi}_k) \equiv 0 \ (s = 1, 2 \ldots \bar{\omega}). \tag{9}$$

Wir dürfen voraussetzen, dass diese Identitäten von vornherein auf eine solche Form gebracht wurden, dass die Zahlen $m_1 \ldots m_{\tilde{\omega}}$ so klein als möglich ausfallen.

Nach den allgemeinen Untersuchungen von Weierstrass und Kronecker lässt sich daher die Schaar $w\varphi - \psi$ auf die folgende Normalform bringen:

$$(10) \quad \begin{aligned} &\sum_1^{\tilde{\omega}} {}^s \sum_0^{m_s} {}^h \left[\bar{\mathfrak{X}}_h^{(s)} (w \mathfrak{Y}_h^{(s)} - \mathfrak{Y}_{h-1}^{(s)}) - \bar{\mathfrak{Y}}_h^{(s)} (w \mathfrak{X}_h^{(s)} - \mathfrak{X}_{h-1}^{(s)})\right] \\ &\qquad + \sum_1^r {}^\nu \sum_1^\varrho {}^\mu \left[(w - w^{(\nu)}) \Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}\right]; \end{aligned}$$

dabei ist gesetzt

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\sigma, \tau} (X_{\mu\sigma}^{(\nu)} \bar{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} - \bar{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} Y_{\mu\tau}^{(\nu)})$$

$$(\sigma + \tau = e_\mu^{(\nu)} - 1; \ \sigma = 0, 1 \ldots e_\mu^{(\nu)} - 1);$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\sigma, \tau} (X_{\mu\sigma}^{(\nu)} \bar{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} - \bar{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} Y_{\mu\tau}^{(\nu)})$$

$$(\sigma + \tau = e_\mu^{(\nu)} - 2; \ \sigma = 0, 1 \ldots e_\mu^{(\nu)} - 2),$$

und es ist $\Psi_\mu^{(\nu)} = 0$ zu setzen, wenn $e_\mu^{(\nu)} = 1$, ferner $\Phi_\mu^{(\nu)} = \Psi_\mu^{(\nu)} = 0$, falls $e_\mu^{(\nu)} = 0$; auch ist in der ersten Doppelsumme (10) die Summation nur auf diejenigen Indices $s$ zu erstrecken, für die $m_s > 0$ ist.

Die mit $\mathfrak{X}$, $\bar{\mathfrak{X}}$, $X$, $\bar{X}$ bezeichneten Grössen sind linear unabhängige Linearfunktionen der Variabeln $x_1 \ldots x_n$, die $\mathfrak{Y}$, $\bar{\mathfrak{Y}}$, $Y$, $\bar{Y}$ ebenso linear unabhängige Linearfunktionen der $y$. Ferner hat man:

$$(11) \qquad n = \sum_1^{\tilde{\omega}} {}^s (2 m_s + 1) + 2 \sum_1^\varrho {}^\mu \sum_1^r {}^\nu e_\mu^{(\nu)},$$

mithin

$$2\varrho = \sum_1^{\tilde{\omega}} {}^s 2 m_s + \sum_1^\varrho {}^\mu \sum_1^r {}^\nu 2 e_\mu^{(\nu)},$$

also

$$(12) \qquad \varrho = M + \sum e_\mu^{(\nu)},$$

wenn

$$(13) \qquad M = m_1 + m_2 + \ldots + m_{\tilde{\omega}}$$

gesetzt wird. Die Normalform (10) hat, wie man sieht, die schiefsymmetrische Form; es ist aber zu zeigen, dass diese Normalform stets durch congruente lineare Transformationen der $x$ und $y$ hergestellt werden kann, d. h. dass die $\mathfrak{X}$, $\bar{\mathfrak{X}}$, $X$, $\bar{X}$ ebenso von $x_1 \ldots x_n$ abhängen, wie die entsprechenden $\mathfrak{Y}$, $\bar{\mathfrak{Y}}$, $Y$, $\bar{Y}$ von den Variabeln $y_1 \ldots y_n$.

## II.

7. Um die soeben ausgesprochene Behauptung zu erweisen, betrachten wir zunächst den Fall, dass die Determinante

$$D = | w a_{ik} - b_{ik} | \quad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nicht für beliebiges $w$ verschwindet, dass also $n$ gerade, und die oben mit $2\varrho$ bezeichnete Zahl $= n$ ist. Aus den Identitäten

$$w\varphi_\beta - \psi_\beta = \sum_\alpha (w a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) x_\alpha$$

$$w\bar{\varphi}_\alpha - \bar{\psi}_\alpha = \sum_\beta (w a_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}) y_\beta$$

gewinnen wir, wenn mit

$$(-1)^{\alpha+\beta} D_{\alpha\beta}$$

die aus $D$ durch Streichung der $\alpha^{\text{ten}}$ Zeile und der $\beta^{\text{ten}}$ Colonne entstehende Unterdeterminante bezeichnet wird, folgende Formeln:[1])

$$y_\beta = \sum_\alpha \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w\bar{\varphi}_\alpha - \bar{\psi}_\alpha)$$

$$x_\alpha = \sum_\beta \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w\varphi_\beta - \psi_\beta)$$

$$\varphi = \sum_\beta \varphi_\beta y_\beta = \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w\varphi_\beta \bar{\varphi}_\alpha - \varphi_\beta \bar{\psi}_\alpha)$$

$$\psi = \sum_\alpha \bar{\psi}_\alpha x_\alpha = \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w\varphi_\beta \bar{\psi}_\alpha - \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta)$$

$$w\varphi + \psi = \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} (w^2 \bar{\varphi}_\alpha \varphi_\beta - \bar{\psi}_\alpha \psi_\beta).$$

---

[1]) Weierstrass, Werke II p. 24.

Wir schliessen daraus mit Weierstrass, dass, wenn der Ausdruck

$$F(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) \equiv \sum_{\alpha\beta} \frac{D_{\alpha\beta}}{D} \eta_\alpha \xi_\beta$$

nach fallenden Potenzen von $w$ in der Form:

$$F = w^{-1} F_1(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) + w^{-2} F_2(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n)$$

entwickelt wird, für $\varphi$ und $\psi$ sich die folgenden Darstellungen ergeben:

$$(14) \qquad \begin{cases} \varphi \equiv F_1(\varphi_1 \ldots \varphi_n \mid \overline{\varphi}_1 \ldots \overline{\varphi}_n) \\ \psi \equiv F_2(\varphi_1 \ldots \varphi_n \mid \overline{\varphi}_1 \ldots \overline{\varphi}_n). \end{cases}$$

8. Indem wir in den Bezeichnungen der Nr. 2 überall $u$ durch $w$ und $v$ durch $-1$ ersetzen, können wir schreiben:

$$P = (1, 2, \ldots n); \;\; D = P^2.$$

Ist ferner $\alpha < \beta$, so verstehen wir unter:

$$(-1)^{\alpha+\beta+1} \cdot P_{\alpha\beta}$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $n-2$, das aus $P$ durch Weglassung der Ziffern $\alpha$ und $\beta$ entsteht; ferner sei allgemein

$$P_{\alpha\beta} = -P_{\beta\alpha}; \;\; P_{\alpha\alpha} = 0.$$

Dann hat man

$$D_{\alpha\beta} = P \cdot P_{\alpha\beta},$$

und die Funktion $F$ wird

$$F = \sum \frac{P_{\alpha\beta}}{P} \eta_\alpha \xi_\beta.$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun als rationale Funktion von $w$ in Partialbrüche zerlegen.

Zu diesem Zwecke betrachten wir irgend eine vierreihige Hauptunterdeterminante der zu $D$ adjungierten, schiefsymmetrischen Determinante

$$| D_{\alpha\beta} | \quad \alpha, \beta = 1 \ldots n.$$

Eine solche Hauptunterdeterminante lässt sich dann in den beiden Formen

$$(15) \qquad (D_{\alpha\beta} D_{\gamma\delta} + D_{\alpha\gamma} D_{\delta\beta} + D_{\alpha\delta} D_{\beta\gamma})^2 = D \cdot D''$$

darstellen, wo $D''$ diejenige Hauptunterdeterminante der Ordnung $n - 4$ darstellt, die aus $D$ durch Streichung der Zeilen und Colonnen mit den Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht. Wir nehmen an, dass $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ sei, und verstehen unter dem Ausdruck

$$(-1)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \cdot P_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat, das aus $P$ durch Weglassung der Ziffern $\alpha\beta\gamma\delta$ entsteht. Dann folgt aus (15):

$$(16) \qquad P_{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} + P_{\alpha\gamma} P_{\delta\beta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma} = \varepsilon P \cdot P_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist. Um dies Zeichen zu bestimmen, bemerken wir, dass der Coefficient von $a_{\alpha\beta}$ in der Entwickelung von $P$ mit $P_{\alpha\beta}$ identisch ist. Daraus folgt sofort, dass der Coefficient des Produkts $a_{\alpha\beta}\, a_{\gamma\delta}$ in der Entwickelung von $P$ mit $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ identisch wird. Der Coefficient dieses Produkts auf der rechten Seite von (16) ist sonach $\varepsilon P^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$, und auf der linken $P^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$, woraus $\varepsilon = +1$ folgt. Setzt man ausserdem fest, dass der Ausdruck $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ sein Zeichen wechsele, wenn zwei seiner Indices vertauscht werden, also null sei, wenn er zwei gleiche Indices enthält, so folgt allgemein:

$$(17) \qquad P_{\alpha\beta} P_{\gamma\delta} + P_{\alpha\gamma} P_{\delta\beta} + P_{\alpha\delta} P_{\beta\gamma} = P \cdot P_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

für 4 beliebige Indices $\alpha\beta\gamma\delta$ der Reihe 1 bis $n$.

9. Wir verstehen nun unter

$$P^{(\varkappa)}\text{[1]}$$

dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $n - 2\varkappa$, das aus $P$ durch Weglassung der Ziffern $1, 2 \ldots 2\varkappa$ entsteht, und setzen $P^{(\varrho)} = P^{(\frac{1}{2}n)} = 1$. Ferner bezeichne der Ausdruck

$$(18) \qquad (-1)^{\alpha+\beta+1}\, P^{(\varkappa)}_{\alpha\beta}$$

---

[1] $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$ etc.

falls $\beta > \alpha > 2\varkappa$ dasjenige Pfaff'sche Aggregat der Ordnung $2n - 2\varkappa - 2$, das aus $P^{(\varkappa)}$ durch Weglassung der Ziffern $\alpha$ und $\beta$ entsteht; allgemein sei

$$P^{(\varkappa)}_{\alpha\beta} = -P^{(\varkappa)}_{\beta\alpha};\;\; P^{(\varkappa)}_{\alpha\alpha} = 0 \;\; (\alpha, \beta = 1 \ldots n);$$

endlich wollen wir festsetzen, dass der Ausdruck (18) immer dann verschwinde, wenn eine der Zahlen $\alpha$, $\beta$ nicht grösser als $2\varkappa$ ist. Die wiederholte Anwendung des Satzes (17) führt dann auf die folgende Serie von Relationen:

$$P_{12}P_{\alpha\beta} + P_{1\alpha}P_{\beta 2} + P_{1\beta}P_{2\alpha} \equiv PP'_{\alpha\beta},$$
$$P'_{34}P'_{\alpha\beta} + P'_{3\alpha}P'_{\beta 4} + P'_{3\beta}P'_{4\alpha} = P'P''_{\alpha\beta}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P^{(h-1)}_{2h-1,2h}\cdot P^{(h-1)}_{\alpha\beta} + P^{(h-1)}_{2h-1,\alpha}\cdot P^{(h-1)}_{\beta,2h} + P^{(h-1)}_{2h-1,\beta}\cdot P^{(h-1)}_{2h,\alpha} = P^{(h-1)}\cdot P^{(h)}_{\alpha\beta}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

wo $h$ die Werte $0, 1 \ldots \varrho$ annehmen kann, wenn $P^{(\varrho)}_{\alpha,\beta}$ null gesetzt wird.

Man findet hieraus:

$$\frac{P^{(h-1)}_{\alpha\beta}}{P^{(h-1)}} = \frac{P^{(h-1)}_{2h-1,\alpha}\cdot P^{(h-1)}_{2h,\beta} - P^{(h-1)}_{2h-1,\beta}\cdot P^{(h-1)}_{2h,\alpha}}{P^{(h-1)}P^{(h)}} + \frac{P^{(h)}_{\alpha\beta}}{P^{(h)}},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{P_{\alpha\beta}}{P} = \sum_1^{\varrho} \frac{P^{(h-1)}_{2h-1,\alpha}P^{(h-1)}_{2h,\beta} - P^{(h-1)}_{2h-1,\beta}\cdot P^{(h-1)}_{2h,\alpha}}{P^{(h-1)}P^{(h)}}.$$

Setzt man nun

$$\mathfrak{X}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\beta} P^{(h)}_{2h+1,\beta}\zeta_\beta;\quad \bar{\mathfrak{X}}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\beta} P^{(h)}_{2h+2,\beta}\zeta_s;$$

$$\mathfrak{Y}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\alpha} P^{(h)}_{2h+1,\alpha}\eta_\alpha;\quad \bar{\mathfrak{Y}}^{(h)} = \sum_{2h+1}^{n}{}^{\alpha} P^{(h)}_{2h+2,\alpha}\eta_\alpha$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots \varrho - 1),$$

so erhält man:

$$F(\xi_1 \ldots \xi_n \mid \eta_1 \ldots \eta_n) = \frac{\mathfrak{Y}\bar{\mathfrak{X}} - \mathfrak{X}\bar{\mathfrak{Y}}}{PP'} + \frac{\mathfrak{Y}'\bar{\mathfrak{X}}' - \mathfrak{X}'\bar{\mathfrak{Y}}'}{P'P''} + \ldots;$$

die Summe auf der rechten Seite besteht aus $\frac{1}{2}n$ Gliedern.

10. Es sei nun

$$w - w^{(\nu)}$$

irgend einer der $r$ Linearfaktoren von $D$, und $e_1^{(\nu)}, e_2^{(\nu)} \dots e_\varrho^{(\nu)}$ seien die zu demselben gehörigen, in Nr. 5 definierten Exponenten; ferner sei $e_\mu^{(\nu)} > 0$. Dann ist $P^{(\mu-1)}$ als Pfaff'sches Aggregat der Ordnung $n - 2\mu + 2$ durch die $\lambda_{\varrho-\mu+1}^{(\nu)}$te Potenz von $w - w^{(\nu)}$, ebenso $P^{(\mu)}$ durch die $\lambda_{\varrho-\mu}^{(\nu)}$te Potenz von $w - w^{(\nu)}$ teilbar; wir dürfen nach Nr. 4 überdies annehmen, dass $P^{(\mu-1)}$ und $P^{(\mu)}$ durch keine höheren Potenzen von $w - w^{(\nu)}$ teilbar sind. Ferner sind die Ausdrücke $\mathfrak{X}^{(\mu-1)}, \bar{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)}, \mathfrak{Y}^{(\mu-1)}, \bar{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}$ sämtlich durch die $\lambda_{\varrho-\mu}^{(\nu)}$te Potenz von $w - w^{(\nu)}$ teilbar. Erinnern wir noch daran, dass nach Nr. 5

$$\lambda_{\varrho-\mu+1}^{(\nu)} - \lambda_{\varrho-\mu}^{(\nu)} = e_\mu^{(\nu)}$$

zu setzen ist, so erkennt man, dass, wenn man die Ausdrücke

$$P^{(\mu-1)},\ P^{(\mu)},\ \mathfrak{X}^{(\mu-1)},\ \bar{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)},\ \mathfrak{Y}^{(\mu-1)},\ \bar{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}$$

nach steigenden Potenzen von $w - w^{(\nu)}$ entwickelt, das Anfangsglied der ersten dieser Entwickelungen um $e_\mu^{(\nu)}$ Einheiten grösser ist, als dasjenige aller übrigen. Hieraus folgt für genügend kleine Werte des absoluten Betrages von $w - w^{(\nu)}$:

$$(19)\quad \begin{cases} \dfrac{\mathfrak{X}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} = (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty {}_\sigma\, X_{\mu\sigma}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\sigma; \\[2ex] \dfrac{\bar{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} = (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty {}_\sigma\, \bar{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\sigma; \\[2ex] \dfrac{\mathfrak{Y}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} = (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty {}_\tau\, Y_{\mu\tau}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\tau; \\[2ex] \dfrac{\bar{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}}{\sqrt{P^{(\mu-1)} \cdot P^{(\mu)}}} = (w - w^{(\nu)})^{-\frac{1}{2} e_\mu^{(\nu)}} \cdot \sum_0^\infty {}_\tau\, \bar{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} (w - w^{(\nu)})^\tau; \end{cases}$$

dabei ist:

$$(20)\begin{cases} X_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[C_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu-1} + C_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu} + \ldots + C_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\zeta_n\right]; \\ \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[\overline{C}_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu-1} + \overline{C}_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\xi_{2\mu} + \ldots + \overline{C}_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\zeta_n\right]; \end{cases}$$

$$(21)\begin{cases} Y_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[C_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu-1} + C_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu} + \ldots + C_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_n\right]; \\ \overline{Y}_{\mu\sigma}^{(\nu)} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{\mu\nu}}}\left[\overline{C}_{2\mu-1,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu-1} + \overline{C}_{2\mu,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_{2\mu} + \ldots + \overline{C}_{n,\mu,\sigma}^{(\nu)}\eta_n\right]; \end{cases}$$

worin die Constanten $C$ ganze Funktionen der Grössen $w^{(\nu)}$, $a_{ik}$, $b_{ik}$ bedeuten.

Aus den Identitäten (19) folgt:

$$\frac{\mathfrak{Y}^{(\mu-1)}\overline{\mathfrak{X}}^{(\mu-1)} - \overline{\mathfrak{Y}}^{(\mu-1)}\mathfrak{X}^{(\mu-1)}}{P^{(\mu-1)}P^{(\mu)}} =$$

$$= \sum_{\sigma,\tau}^{0,\ldots\infty}\left(Y_{\mu,\tau}^{(\nu)}\overline{X}_{\mu,\sigma}^{(\nu)} - \overline{Y}_{\mu,\tau}^{(\nu)}X_{\mu,\sigma}^{(\nu)}\right)(w - w^{(\nu)})^{\sigma+\tau-e_{\mu}^{(\nu)}}.$$

Bilden wir daher die Summe:

$$\sum_{1}^{\varrho}{}^{\mu}\sum_{\sigma,\tau}^{0\ldots\infty}\left(Y_{\mu\tau}^{(\nu)}\overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} - \overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)}X_{\mu\sigma}^{(\nu)}\right)(w - w^{(\nu)})^{\sigma+\tau-e_{\mu}^{(\nu)}},$$

worin sich die Summation hinsichtlich $\mu$ nur auf diejenigen Werte zu erstrecken hat, für die $e_{\mu}^{(\nu)} > 0$ ist, so stimmt diese Reihe mit der Reihenentwickelung von $F$ in allen Gliedern überein, die für $w = w^{(\nu)}$ unendlich werden. Denkt man sich nun für jeden der $r$ verschiedenen Linearfaktoren $w - w^{(\nu)}$ der Determinante $D$ die analoge Entwickelung durchgeführt, wobei natürlich für jede einzelne Wurzel $w^{(\nu)}$ die Determinante durch congruente Vertauschungen der Zeilen und Colonnen nötigenfalls erst so umgeformt werden muss, dass die Pfaff'schen Aggregate $P$, $P'$ ... der Bedingung der Nr. 4 genügen, so ergibt sich, da $F$ für $w = \infty$ verschwindet:

$$F(\xi_1 \dots \xi_n \mid \eta_1 \dots \eta_n) =$$
$$= \sum_1^r{}^{\nu} \sum_1^{\varrho}{}^{\mu} \sum_{\sigma,\tau} (Y_{\mu\tau}^{(\nu)} \overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)} - \overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)} X_{\mu\sigma}^{(\nu)}) (w - w^{(\nu)})^{\sigma+\tau-e_\mu^{(\nu)}}$$
$$(\sigma + \tau < e_\mu^{(\nu)};\ \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots e_\mu^{(\nu)} - 1),$$

wobei die Summation hinsichtlich $\mu$ auf alle Werte zu erstrecken ist, für die $e_\mu^{(\nu)} > 0$.

11. Verstehen wir jetzt unter $X_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $\overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ diejenigen linearen homogenen Ausdrücke der ursprünglichen Variabeln $x_1 \dots x_n$, die sich aus (20) ergeben, wenn man darin $\xi_1 \dots \xi_n$ bezw. durch $\varphi_1\, \varphi_2 \dots \varphi_n$ ersetzt, dagegen unter $Y_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $\overline{Y}_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ die Linearfunktionen der $y_1 \dots y_n$, in welche die Ausdrücke (21) übergehen, wenn man $\eta_1 \dots \eta_n$ bezw. durch $-\overline{\varphi}_1, -\overline{\varphi}_2 \dots -\overline{\varphi}_n$ ersetzt, so werden die $X$, $\overline{X}$ in der gleichen Weise von den $x$ abhängen, wie die entsprechenden $Y$, $\overline{Y}$ von den $y$. Mittels der Identitäten (14) erhält man nunmehr für die Schaar $w\varphi - \psi$ die Darstellung:

$$\sum_1^r{}^{\nu} \sum_1^{\varrho}{}^{\mu} \left[(w - w^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}\right],$$

wo die $\Phi$, $\Psi$ aus Nr. 6 zu entnehmen sind. Da sich jetzt hinterher leicht zeigen lässt, dass die Variabeln $X_{\mu\sigma}^{(\nu)}$, $\overline{X}_{\mu\sigma}^{(\nu)}$ genau $\eta$ linear unabhängige Linearformen der $x$ darstellen,[1]) und analoges für die $Y_{\mu\tau}^{(\nu)}$, $\overline{Y}_{\mu\tau}^{(\nu)}$ gilt, so haben wir den Satz bewiesen:

„Jede schiefsymmetrische Schaar von Bilinearformen $w\varphi - \psi$ mit nicht verschwindender Determinante lässt sich durch congruente lineare Transformationen der $x$ und $y$ in eine Summe von „elementaren" schiefsymmetrischen Schaaren

$$(w - w^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}$$

überführen."

Eine solche Formenschaar bezeichnen wir als „elementar", weil sie nur zwei (identische) Elementarteiler besitzt, und weil

[1]) Weierstrass, Werke II p. 29.

dies nach Nr. 5 die Minimalzahl von Elementarteilern ist, die bei einer schiefsymmetrischen Schaar auftreten kann.

Wir wollen noch die für das folgende wichtige Bemerkung hinzufügen, dass alle Formen der Schaar (1), falls die Determinante (4) nicht null ist, durch $\frac{1}{2}n$ congruente lineare Gleichungspaare, in der $x_i$ und $y_i$ zum Verschwinden gebracht werden können; z. B. dadurch, dass man alle Ausdrücke $X_{\mu\sigma}^{(r)}$, $Y_{\mu\sigma}^{(r)}$ null setzt.

## III.

12. Indem wir uns nunmehr zu der Betrachtung des allgemeineren Falles wenden,[1]) dass der Rang $2\varrho$ der Matrix (4) kleiner als $n$ ist, und die Bezeichnungen der Nr. 6 beibehalten, bemerken wir zunächst, dass die $M+\bar{\omega}$ Grössensysteme

$$c_{h1}^{(s)}\, c_{h2}^{(s)} \ldots c_{hn}^{(s)} \quad (h = 0, 1 \ldots m_s;\ s = 1, 2, \ldots \bar{\omega})$$

linear unabhängig sind. Andernfalls könnte man nämlich das System der Identitäten (8) durch ein anderes ersetzen, in welchem die Summe der Gradzahlen $< M$ wäre,[2]) was mit der über die Zahlen $m_s$ gemachten Annahme in Widerspruch steht.

Darnach können wir durch die congruenten Transformationen

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_0^{m_1}{}^h c_{hi}^{(1)} X_h^{(1)} + \ldots + \sum_0^{m_{\bar{\omega}}}{}^h c_{hi}^{(\bar{\omega})} X_h^{(\bar{\omega})} + \sum_{M+\bar{\omega}+1}^{n}{}^r C_r X_r \\ y_i &= \sum_0^{m_1}{}^h c_{hi}^{(1)} Y_h^{(1)} + \ldots + \sum_0^{m_{\bar{\omega}}}{}^h c_{hi}^{(\bar{\omega})} Y_h^{(\bar{\omega})} + \sum_{M+\bar{\omega}+1}^{n}{}^r C_r Y_r \end{aligned} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

statt der $x$, $y$ die neuen Variabeln

$$X_h^{(s)},\ X_r,\ Y_h^{(s)},\ Y_r$$

---

[1]) Wir beziehen uns im Folgenden mehrfach auf die Darstellung, die Herr Sauvage (Ec. Norm. 1893) von den pag. 369 citierten Kronecker'schen Untersuchungen über Bilinearformen mit verschwindender Determinante geliefert hat.

[2]) Sauvage, l. c. pag. 12 ff.

in die Schaar $w\varphi - \psi$ einführen. Die Constanten $C_s$ sind nur der Bedingung unterworfen, dass die Determinante der obigen Substitution nicht null sei, im übrigen aber willkürlich.

Gehen nun durch diese Substitutionen die Formen $\varphi$, $\psi$ und:

$$f = w\varphi - \psi$$

bezw. über in $\Phi$, $\Psi$, $F$, so hat man

$$\frac{\partial F}{\partial X_h^{(s)}} = \sum_1^n {}^i \frac{\partial f}{\partial x_i} c_{hi}^{(s)}; \quad \frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}} = \sum_1^n {}^i \frac{\partial f}{\partial y_i} c_{hi}^{(s)};$$

also ist nach (8):

$$(22) \qquad \sum_0^{m_s} {}^h w^h \frac{\partial F}{\partial X_h^{(s)}} = 0, \qquad \sum_0^{m_s} {}^h w^h \frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}} = 0 \;\; (s = 1, 2 \ldots \bar\omega).$$

Diese Relationen drücken aus, dass $F$ die Variabeln $X_h^{(s)}$, bezw. $Y_h^{(s)}$, für welche $m_s > 0$ ist, nur in den Verbindungen

$$w X_{h-1}^{(s)} - X_h^{(s)} \text{ bezw. } w Y_{h-1}^{(s)} - Y_h^{(s)} \;\; (h = 1, 2, \ldots m_s),$$

während die Variabeln $X_0^{(s)}$, $Y_0^{(s)}$, für die $m_s = 0$ ist, in $F$ überhaupt nicht vorkommen. Daraus folgt sofort, dass in $F$ keine der Variabeln $X_h^{(s)}$ mit einer der Variabeln $Y_k^{(t)}$ multipliciert auftreten kann, da andernfalls $F$ in $w$ quadratisch wäre. Mit Rücksicht auf die schiefe Symmetrie von $F$ dürfen wir daher setzen:

$$(23) \qquad \begin{aligned} F = \sum_1^{\bar\omega} {}^s \sum_1^{m_s} {}^h \left[\bar X_h^{(s)}(w Y_{h-1}^{(s)} - Y_h^{(s)}) - \bar Y_h^{(s)}(w X_{h-1}^{(s)} - X_h^{(s)})\right] + \\ + w\Phi' - \Psi', \end{aligned}$$

worin die $\bar X_h^{(s)}$, $\bar Y_h^{(s)}$ congruente Linearformen der vorhin mit $X_r$, $Y_r$ bezeichneten Variabeln, ferner $\Phi'$, $\Psi'$ schiefsymmetrische Bilinearformen derselben Grössen bezeichnen. Die Summation hinsichtlich $s$ ist in (23) natürlich nur auf diejenigen Zahlen $1 \ldots \bar\omega$ zu erstrecken, für die $m_s > 1$ ist.

13. Wir bemerken vorab, dass die Coefficienten der Linearformen $\bar X_h^{(s)}$, $\bar Y_h^{(s)}$ von $w$ nicht abhängen können. In der That,

es muss zunächst $\overline{X}^{(s)}_{m_s}$ von $w$ frei sein, da sonst $F$ die Grösse $w$ in einer höheren als der ersten Potenz enthielte, ferner können die Ausdrücke:

$$X^{(s)}_{m_s-1}\, w - X^{(s)}_{m_s},\;\; X^{(s)}_{m_s-2}\cdot w - X^{(s)}_{m_s-1} \;\; \text{etc.}$$

die Grösse $w$ nur in der ersten Potenz enthalten, woraus der Reihe nach folgt, dass die Formen

$$\overline{X}^{(s)}_{m_s-1},\;\; \overline{X}^{(s)}_{m_s-2} \;\; \text{etc.}$$

von $w$ frei sein müssen.

14. Nach Nr. 6 und 12 enthält der Ausdruck $F\ \nu$ Variable $X^{(s)}_h$, $X_r$ und ebenso viele Variable $Y^{(s)}_h$, $Y_r$, wenn mit $n-\nu$ die Anzahl der verschwindenden unter den Zahlen $m_s$ bezeichnet wird. Es ist nun leicht zu zeigen, dass auch umgekehrt, wenn die Schaar $f$ durch congruente lineare Substitutionen der $x$ und $y$ auf eine Form mit $\nu$ (und nicht weniger) Variabelnpaaren reducierbar sein soll, genau $n-\nu$ der Zahlen $m_s$ verschwinden müssen, oder anders ausgedrückt, dass dann der Rang der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} 0 & a_{12} \dots a_{1n} & 0 & b_{12} \dots b_{1n} \\ a_{21} & 0 \;\dots\; a_{2n} & b_{21} & 0 \;\dots\; b_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\; 0 & b_{n1} & b_{n2} \;\dots\; 0 \end{matrix} \right\|$$

gleich $\nu$ sein muss. In der That, soll vermöge der Substitution

$$\begin{aligned} x_i &= \sum_1^{\nu}{}^k \gamma_{ik}\, x'_k + \sum_{\nu+1}^{n}{}^r \gamma_{ir}\, x'_r \\ y_i &= \sum_1^{\nu}{}^k \gamma_{ik}\, y'_k + \sum_{\nu+1}^{n}{}^r \gamma_{ir}\, y'_r \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

die transformirte Schaar $f'$ von $x'_{\nu+1} \dots x'_n$, $y'_{\nu+1} \dots y'_n$ frei werden, so muss man haben:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_r} = \sum_1^{n}{}^i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, \gamma_{ir} = 0, \quad \sum_1^{n}{}^i \frac{\partial f}{\partial y_i}\, \gamma_{ir} = 0 \quad (r = \nu + 1 \dots n).$$

Aus diesen Bedingungen erhält man unmittelbar die folgenden

$$\sum_1^n{}^i a_{ik}\gamma_{ir}=0,\quad \sum_1^n{}^i b_{ik}\gamma_{ir}=0\ \ (k=1\ldots n;\ r=\nu+1\ldots n),$$

woraus die obige Behauptung ohne weiteres hervorgeht.

Wir schliessen daraus, dass die Zahl der Variabeln in dem Ausdruck (23) durch congruente Transformationen der $X$ und $Y$ nicht vermindert werden kann.

15. Die in (23) auftretenden $M$ Linearformen $\overline{X}_h^{(s)}$ der Variabeln $X_r$, und ebenso die $M$ Linearformen $\overline{Y}_h^{(s)}$ sind von einander linear unabhängig. Man hat nämlich:

$$\frac{\partial F}{\partial Y_0^{(s)}}=w\,X_1^{(s)};\quad \frac{\partial F}{\partial Y_{m_s}^{(s)}}=-\,\overline{X}_{m_s}^{(s)}$$

$$\frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}}=w\,X_{h+1}^{(s)}-\overline{X}_h^{(s)}\quad (h=1,2,\ldots m_s-1),$$

und hieraus:

$$\overline{X}_h^{(s)}=\sum_0^{m_s-h}{}^i(-1)^{i+1}w^i\frac{\partial F}{\partial Y_{h+i}^{(s)}}\quad (h=1,2,\ldots m_s).$$

Bestände also eine Relation der Form:

$$(24)\qquad \sum_1^{\bar\omega}{}^s\sum_1^{m_s}{}^h a_h^{(s)}\,\overline{X}_h^{(s)}=0$$

mit constanten Coefficienten $a_h^{(s)}$, so erhielte man daraus zwischen den Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial Y_h^{(s)}}$ eine lineare Identität, deren Coefficienten ganze Funktionen von $w$ wären. Diese Identität müsste sich andererseits auch dadurch gewinnen lassen, dass man die linken Seiten der Identitäten (22) mit gewissen Funktionen von $w$ multiplicierte und addierte; dies ist aber unmöglich, da die Identität (24) die Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial Y_0^{(s)}}$ nicht enthält.

16. Nach dem soeben Bewiesenen können wir die Ausdrücke $\overline{X}_h^{(s)}$, $\overline{Y}_h^{(s)}$ als neue Variable statt ebenso vieler $X_r$, $Y_r$ einführen, was auf congruente lineare Transformationen der beiden Variabelngruppen $X_r$, $Y_r$ hinaus kommt. Der bequemeren Schreibweise halber wollen wir die Variabeln

$$\overline{X}_1^{(1)} \dots \overline{X}_{m_1}^{(1)}, \overline{X}_1^{(2)} \dots \overline{X}_{m_2}^{(2)} \dots \overline{X}_1^{(\bar{\omega})} \dots \overline{X}_{m_{\bar{\omega}}}^{(\bar{\omega})}$$

in dieser Reihenfolge mit

$$\xi_1\, \xi_2 \dots \xi_M \quad (M = \sum m_s)$$

und ebenso die Variabeln $\overline{Y}_h^{(s)}$ in derselben Reihenfolge mit:

$$\eta_1\, \eta_2 \dots \eta_M$$

bezeichnen. Ferner wollen wir die noch übrig bleibenden Variabeln $X_r$, $Y_r$ mit

$$\begin{array}{ll} & x_1'\, x_2' \dots x_N' \\ \text{bezw.} & y_1'\, y_2' \dots y_N' \end{array} \quad \left(N = n - \sum_1^{\bar{\omega}}{}^i (2\, m_i + 1) = 2 \sum_{\mu, \nu} e_\mu^{(\nu)}\right)$$

bezeichnen. Die in (23) auftretende Schaar von Bilinearformen

$$F' = w\, \Phi' - \Psi'$$

nimmt dann die Form an

$$(25) \qquad F' = F'(w;\ \xi_1 \dots \xi_M,\ x_1' \dots x_N' \mid \eta_1 \dots \eta_M,\ y_1' \dots y_N').$$

17. Um den Ausdruck $F'$ weiter zu behandeln, schicken wir folgenden Hülfssatz voraus:

„Ist $\tau < \frac{1}{2}\, n$, und verschwinden alle Formen einer schiefsymmetrischen Schaar (1) identisch vermöge eines Systems von $\tau$ unabhängigen, congruenten Relationenpaaren:

$$U_i \equiv \sum_1^n{}^k a_{ik}\, x_k = 0,\ \ V_i \equiv \sum_1^n{}^k a_{ik}\, y_k = 0 \ \ (i = 1, 2 \dots \tau),$$

so ist der Rang der Matrix (4) höchstens gleich $2\tau$."

Unter der gemachten Annahme sind nämlich die Formen $\varphi$, $\psi$ in folgender Weise darstellbar:

$$\varphi = \sum_1^{\tau} {}^s (U_s V_{\tau+s} - V_s U_{\tau+s})$$

$$\psi = \sum_1^{\tau} {}^s (U_s V'_{\tau+s} - V_s U'_{\tau+s})$$

worin:

$$U_{\tau+s} = \beta_{s1} x_1 + \ldots + \beta_{sn} x_n; \quad V_{\tau+s} = \beta_{s1} y_1 + \ldots + \beta_{sn} y_n;$$
$$U'_{\tau+s} = \gamma_{s1} x_1 + \ldots + \gamma_{sn} x_n; \quad V'_{\tau+s} = \gamma_{s1} y_1 + \ldots + \gamma_{sn} y_n$$

gesetzt ist, und die $\beta$, $\gamma$ gewisse Constante bedeuten.

Man hat daher:

$$w a_{ik} - b_{ik} = \sum_1^{\tau} {}^s [a_{si}(w \beta_{sk} - \gamma_{sk}) - a_{sk}(w \beta_{si} - \gamma_{si})].$$

Die Matrix (4) entsteht also durch Zeilencomposition der folgenden beiden Matrices:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\, a_{21} \cdot a_{\tau 1} & w\beta_{11} - \gamma_{11}, & w\beta_{21} - \gamma_{21} \ldots w\beta_{\tau 1} - \gamma_{\tau 1} \\ a_{12}\, a_{22} \cdot a_{\tau 2} & w\beta_{12} - \gamma_{12}, & w\beta_{22} - \gamma_{22} \ldots w\beta_{\tau 2} - \gamma_{\tau 2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n}\, a_{2n} \cdot a_{\tau n} & w\beta_{1n} - \gamma_{1n}, & w\beta_{2n} - \gamma_{2n} \ldots w\beta_{\tau n} - \gamma_{\tau n} \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} w\beta_{11} - \gamma_{11}, w\beta_{21} - \gamma_{21} \ldots w\beta_{\tau 1} - \gamma_{\tau 1}, -a_{11}, -a_{21}, \ldots -a_{\tau 1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w\beta_{1n} - \gamma_{1n}, w\beta_{2n} - \gamma_{2n} \ldots w\beta_{\tau n} - \gamma_{\tau n}, -a_{1n}, -a_{2n}, \ldots -a_{\tau n} \end{matrix} \right\|$$

woraus obiger Satz sofort folgt.

18. Wir nehmen nun zunächst an, dass in dem Ausdruck $F'$ keine der Variabeln $x'$ mit einer Variabeln $y'$ multipliciert auftritt. Dann treten die Variabeln $x'$, $y'$ in $F'$ überhaupt nicht auf; denn es verschwindet jetzt die Schaar $F$ oder $f$ identisch, wenn man alle Variabeln $\xi$, $\eta$ null setzt, was $M$ congruente lineare Relationenpaare in den $x$, $y$ liefert. Nach dem soeben bewiesenen Satze hat man daher

(26) $$2\varrho < \sum_1^{\tilde{\omega}} {}^s 2 m_s;$$

andererseits aber ist nach Nr. 6:

$$2\varrho \geq \sum 2 m_s.$$

Also gilt in (26) das Gleichheitszeichen, und man hat:

$$(27)\qquad n = \sum_1^{\bar{\omega}}{}^i\,(2\,m_i + 1);\ e_\mu^{(r)} = 0;$$

d. h. die Schaar (23) enthält überhaupt nur die Variabeln

$$\bar{X}_h^{(s)},\ X_h^{(s)},\ \bar{Y}_h^{(s)},\ Y_h^{(s)}.$$

Nun lässt sich die schiefsymmetrische Schaar von Bilinearformen

$$F' = F'(w,\zeta_1 \ldots \zeta_M \mid \eta_1 \ldots \eta_M)$$

stets in der Form schreiben:

$$(28)\qquad \sum_1^M{}^i\,\xi_i(w\,P_{i-1} - P_i) - \sum_1^M{}^i\,\eta_i(w\,Q_i - Q_{i-1})$$

worin:

$$\begin{array}{l} P_i \equiv A_{i1}\,\eta_1 + A_{i2}\,\eta_2 + \ldots + A_{in}\,\eta_n \\ Q_i \equiv A_{i1}\,\xi_1 + A_{i2}\,\xi_2 + \ldots + A_{in}\,\xi_n \end{array} \quad (i = 0, 1 \ldots M)$$

gesetzt ist, und die Constanten $A_{ik}$ von $w$ frei sind. In der That, ist

$$F' = \sum_1^M{}^k \sum_1^M{}^i\,(w\,a_{ik} - \beta_{ik})\,\xi_i\,\eta_k,$$

so liefert die Vergleichung der beiden Darstellungen von $F'$ für die Unbekannten $A_{ik}$ die Gleichungen:

$$(29)\qquad \begin{array}{l} A_{ik} \;-\; A_{ki} \;= a_{ik} \\ A_{i-1,k} - A_{k-1,i} = \beta_{ik} \end{array} \quad (i, k = 1, 2, \ldots M),$$

die sich auf $M(M-1)$ unabhängige reducieren. Schreibt man die zweite Gleichung (29) in der Form

$$A_{ik} - A_{k-1,i+1} = \beta_{i+1,k}$$

und subtrahiert von ihr die erste Relation (29), so folgen die Bedingungen

$$A_{ki} - A_{k-1,i+1} = \beta_{i+1,k} - a_{ik}\ (i = 1, \ldots M-1;\ k = 1 \ldots M),$$

die ebenfalls $M(M-1)$ unabhängige Gleichungen darstellen, also mit (29) aequivalent sind. Man kennt sonach in dem Schema

$$\begin{matrix} A_{01} & A_{02} & \dots & A_{0M} \\ A_{11} & & \dots & A_{1M} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{M1} & A_{M2} & \dots & A_{MM} \end{matrix}$$

den Unterschied irgend zweier benachbarter Elemente in derselben von rechts oben nach links unten verlaufenden Diagonalreihe, und kann mithin $A_{01} \dots A_{0M}$, $A_{1M} \dots A_{MM}$ willkürlich wählen, worauf die übrigen $A_{ik}$ eindeutig bestimmt sind.

Schreibt man jetzt statt der $\xi$, $\eta$ wieder $\overline{X}_h^s$, $\overline{Y}_h^{(s)}$, und vereinigt man diejenigen Glieder der ersten Doppelsumme von (23) und des Ausdrucks (28), die mit demselben $\overline{X}_h^{(s)}$ bezw. $\overline{Y}_h^{(s)}$ multipliciert sind, so erhält man durch einfache Aenderung der Bezeichnungsweise für die Schaar $w\varphi - \psi$ die folgende Darstellung

$$(30) \qquad \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_1^{m_s}{}^h \left[\mathfrak{X}_h^{(s)}(w\,\overline{\mathfrak{Y}}_{h-1}^{(s)} - \overline{\mathfrak{Y}}_h^{(s)}) - \overline{\mathfrak{Y}}_h^{(s)}(w\,\mathfrak{X}_{h-1}^{(s)} - \mathfrak{X}_h^{(s)})\right],$$

worin die $\mathfrak{X}$, $\overline{\mathfrak{X}}$ unabhängige Linearformen von $x_1 \dots x_n$ und die $\mathfrak{Y}$, $\overline{\mathfrak{Y}}$ die dazu congruenten Linearformen der $y$ bedeuten. Diese Darstellung gilt natürlich nur für den Fall, dass die Bedingungen (27) erfüllt sind, die Matrix (4) also überhaupt keinen Elementarteiler besitzt.

19. Wir betrachten nun zweitens den Fall, dass der Ausdruck (25) die Variabeln $x'$, $y'$ wirklich enthält; denn zerlegt sich $F'$ in 3 Bestandteile

$$(31) \qquad F_0(w;\zeta_1 \dots \zeta_M \,|\, \eta_1 \dots \eta_M) + F_1 + F_2(w; x'_1 \dots x'_N \,|\, y'_1 \dots y'_N),$$

worin $F_1$ die Form hat:

$$F_1 \equiv \sum_1^M{}^i \sum_1^N{}^k (\mu_{ik} w - \nu_{ik})(\xi_i y'_k - \eta_k x'_i)$$

und die $\mu_{ik}$, $\nu_{ik}$ Constante bedeuten; die Ausdrücke $F_0$, $F_1$, $F_2$ sind Schaaren schiefsymmetrischer Bilinearformen.

Es lässt sich nun leicht einsehen, dass die Determinante der Formenschaar $F_2$ nicht für jedes $w$ verschwindet. In der

That, verschwindet die Determinante von $F_2$ nicht identisch, so lässt sich nach der Schlussbemerkung von § II die Form $F_2$ durch $\frac{1}{2}N$ congruente Paare von Gleichungen annullieren, und indem man diesen Gleichungen die Relationen $\xi_i = 0$, $\eta_i = 0$ hinzufügt, kommt man zu dem Resultat, dass sich alle Formen $w\varphi - \psi$ durch

$$M + \tfrac{1}{2}N = \sum m_s + \sum_{\mu,\nu} e_\mu^{(\nu)} = \varrho$$

congruente Relationenpaare in $x$ und $y$ annullieren lassen. Verschwände nun aber die Determinante $P$ von $F_2$, und wäre $2\varrho'$ $(< N)$ ihr Rang, so könnte man auf $F_2$ dieselbe Schlussweise anwenden wie vorher auf die Schaar $f = w\varphi - \psi$; d. h. man könnte $F_2$ in 4 Bestandteile $\Phi + F_0' + F_1' + F_2'$ zerlegen, wo $\Phi$ die Form (30) besässe, während $F_0'$, $F_1'$, $F_2'$ den vorhin mit $F_0$, $F_1$, $F_2$ bezeichneten Formenschaaren analog wären. Wäre dann $F_2'$ identisch null, so könnte man nach Nr. 18 die Formenschaar $F_2$ durch $\varrho'$ congruente Relationenpaare annullieren; das Gleiche wäre der Fall, wenn die Determinante von $F_2'$ nicht null wäre. Unter der Annahme endlich, dass die Determinante von $F_2'$ identisch null wäre, konnte man auf $F_2'$ die gleiche Ueberlegung anwenden wie auf $F_2$, etc. In allen Fällen käme man zu dem Resultate, dass $F_2$ durch $\varrho'$ oder weniger congruente Relationenpaare zum Verschwinden gebracht werden könnte; dann aber wäre die Schaar $w\varphi - \psi$ vermöge weniger als $\varrho$ congruenter Relationenpaare identisch null, was nach Nr. 17 mit der Voraussetzung, dass $2\varrho$ der Rang der Matrix (4) sei, in Widerspruch steht. Setzt man also

$$(32)\qquad F_2 = \sum_1^N{}_i \sum_1^N{}_k (w p_{ik} - q_{ik})\, x_i\, y_k,$$

so ist die Determinante

$$(33)\qquad w p_{ik} - q_{ik} \quad (i, k = 1 \ldots N)$$

nicht für jedes $w$ null.

Beiläufig ergibt sich hieraus noch der Satz: „**Damit alle Formen der Schaar $w\varphi - \psi$ durch $\varrho$ und nicht weniger**

unabhängige, lineare, congruente Paare von Gleichungen zwischen den $x$ und den $y$ zum Verschwinden gebracht werden können, ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, dass der Rang der Matrix (4) gleich $2\varrho$ sei."

20. Es sei jetzt:

$$(34) \qquad x_i = \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_0^{m_s}{}^h c_{hi}^{(s)} X_h^{(s)} + \sum_1^{\bar{\omega}}{}^s \sum_1^{m_s}{}^h \bar{c}_{hi}^{(s)} \bar{X}_h^{(s)} + \sum_1^{N}{}^k c'_{ki}\, x'_k$$

$$(i = 1, 2, \dots n)$$

die lineare Substitution, welche den Uebergang von den ursprünglichen $x$ zu den neuen Variabeln $X_h^{(s)}$, $\bar{X}_h^{(s)}$, $x'_k$ vermittelt. Die Constanten $c_{hi}^{(s)}$ sind dabei dieselben, wie diejenigen, die in den Identitäten (8), (9) auftreten. Ersetzt man nun in der Schaar $f$ den Parameter $w$ durch $w + w_0$, wo $w_0$ eine Constante bedeutet, so verwandeln sich die Identitäten (8) in die folgenden:

$$\sum_0^{m_s}{}^h \sum_1^{n}{}^k C_{hk}^{(s)} w^h [w\varphi_k - (\psi_k - w_0 \varphi_k)] = 0,$$

worin

$$C'^{(s)}_{hk} = \sum_h^{m_s}{}^i \binom{i}{h} c_{ik}^{(s)} w_0^{i-h}$$

gesetzt ist. Die Linearformen

$$\bar{X}_h^{(s)} \equiv \sum_1^{n}{}^k c_{hk}^{(s)} \bar{\psi}_k \quad (h = 1, 2, \dots m_s)$$

verwandeln sich hierdurch in die folgenden:

$$\bar{\mathfrak{X}}_h^{(s)} \equiv \sum_1^{n}{}^k C'^{(s)}_{hk} \bar{\psi}_k \equiv \sum_h^{m_s}{}^i \binom{i}{h} w_0^{i-h} \bar{X}_i^{(s)};$$

hieraus folgt ohne weiteres: die Ersetzung des Parameters $w$ durch $w + w_0$ kommt darauf hinaus, in der $n$-reihigen Determinante der linearen Substitution (34) jede der Colonnen:

$$(35) \qquad c_{h1}^{(s)}\, c_{h2}^{(s)} \dots c_{hn}^{(s)}$$

bezw. durch die Colonnen

$$C_{h1}^{(s)}\, C_{h2}^{(s)} \ldots C_{hn}^{(s)},$$

und ebenso jede der Colonnen

$$\bar{c}_{h1}^{(s)}\, \bar{c}_{h2}^{(s)} \ldots \bar{c}_{hn}^{(s)} \tag{36}$$

durch eine lineare Combination der mit demselben Index $s$ versehenen Colonnen (36) zu ersetzen. Hierdurch erfahren aber die aus (34) zu berechnenden Ausdrücke der $x'$ keine Aenderung. Ersetzt man in der Schaar $f$ die Grösse $w$ durch $\frac{1}{w}$, so kommt dies nach (8) offenbar darauf hinaus, in der Determinante von (34) die Colonnen (35), (36) in gewisser Weise zu vertauschen. Schreibt man endlich in der Schaar (1) $aw$ statt $w$, so werden die Colonnen (35) und (36) mit gewissen Potenzen von $a$ multipliciert. Beide Substitutionen aber lassen die aus (34) folgenden Darstellungen der Variabeln $x'_1 \ldots x'_N$ vollkommen ungeändert. Da nun jede lineargebrochene Substitution des Parameters $w$ sich aus den drei genannten zusammensetzen lässt, so haben wir den Satz:

Eine lineargebrochene Transformation des Parameters $w$ unserer Schaar (1) ist aequivalent mit einer gewissen linearen Transformation der Variabeln $X_h^{(s)}$, $\overline{X}_h^{(s)}$ unter sich, wobei die Variabeln $Y_h^{(s)}$, $\overline{Y}_h^{(s)}$ die congruente Substitution erleiden, während die Veränderlichen $x'$, $y'$ völlig ungeändert bleiben.

Wir dürfen in Folge davon annehmen, dass keine der beiden Determinanten

$$|p_{ik}|;\ |q_{ik}| \quad (i, k = 1, 2 \ldots N)$$

verschwinde. In der That, wäre eine dieser Determinanten (oder beide) null, so könnten wir nach Nr. 19 zwei Zahlen $w_0$ und $w_1$ so wählen, dass die Determinante (33) weder für $w = w_0$ noch für $w = w_1$ verschwindet. Ersetzt man dann in der Formenschaar $f$ den Parameter $w$ durch

$$\frac{w_0\, w - w_1}{w - 1}$$

und führt man in den Coefficienten der Substitution (34) die dieser Substitution entsprechenden Aenderungen aus, so verwandelt sich $F_2$ in eine Formenschaar, die den gestellten Anforderungen genügt.

21. Dies vorausgesetzt, wollen wir nun durch congruente lineare Transformationen der $x'$ und $y'$ aus dem Ausdruck (31) die Terme $F_0$ und $F_1$ wegschaffen. Wir setzen zu diesem Zwecke:[1])

$$x'_i = x''_i + H_i;\ \ y'_i = y''_i + K_i \quad (i = 1 \dots N)$$
$$H_i = \lambda_{i1}\,\xi_1 + \lambda_{i2}\,\xi_2 + \dots + \lambda_{iM}\,\xi_M$$
$$K_i = \lambda_{i1}\,\eta_1 + \lambda_{i2}\,\eta_2 + \dots + \lambda_{iM}\,\eta_M,$$

wodurch der Ausdruck (31) in die Summe der drei folgenden übergeht:

1. $F_0 + \sum_1^M{}^i \sum_1^N{}^\alpha (\mu_{i\alpha} w - \nu_{i\alpha})(\xi_i K_\alpha - \eta_i H_\alpha) + \sum_1^N{}^\alpha \sum_1^N{}^\beta (p_{\alpha\beta} w - q_{\alpha\beta}) H_\alpha K_\beta$

2. $\sum_1^M{}^i \sum_1^N{}^\alpha (\mu_{i\alpha} w - \nu_{i\alpha})(\xi_i y''_\alpha - \eta_i x''_\alpha) + \sum_1^M{}^\alpha \sum_1^N{}^\beta (p_{\alpha\beta} w - q_{\alpha\beta})(x''_\alpha K_\beta + y''_\alpha H_\beta)$

3. $\sum_1^N{}^\alpha \sum_1^N{}^\beta (p_{\alpha\beta} w - q_{\alpha\beta})\, x''_\alpha y''_\beta.$

Wir wollen nun die Unbekannten $\lambda_{ik}$ so bestimmen, dass der Ausdruck (2) die Form annimmt:

$$(37) \qquad \sum \xi_i (w P_{i-1} - P_i) - \sum \eta_i (w Q_{i-1} - Q_i)$$

wo die $P$, $Q$ congruente Linearformen der $y''$ bezw. $x''$ bedeuten, oder also, dass der Coefficient von $\xi_i \cdot w$ in dem Ausdruck (2) mit demjenigen von $-\xi_{i-1}$ und ebenso natürlich der Coefficient von $\eta_i w$ mit demjenigen von $-\eta_{i-1}$ identisch sei. Dies liefert die Bedingungen:

$$(38) \qquad \mu_{is} + \sum_1^N{}^k p_{sk}\,\lambda_{ki} = \nu_{i-1,s} + \sum_1^N{}^k q_{sk}\,\lambda_{k,i-1}$$
$$(s = 1, 2, \dots N;\ i = 2, 3 \dots M).$$

---

[1]) Sauvage l. c. p. 20 f.

Da nun die Determinante der $q_{sk}$ nicht null ist, kann man hieraus die Unbekannten $\lambda_{1,i-1} \ldots \lambda_{N,i-1}$ berechnen, wenn $\lambda_{1i} \ldots \lambda_{Ni}$ bekannt sind. Wir können also $\lambda_{1M} \ldots \lambda_{NM}$ willkürlich annehmen, worauf alle andern $\lambda_{ik}$ durch (38) eindeutig bestimmt sind. Nunmehr lassen sich die Terme (37) mit den entsprechenden Termen der Doppelsumme in (23) vereinigen (vgl. Nr. 18). Ferner können wir jetzt auch den Ausdruck (1) als Schaar von Bilinearformen der Variabeln $\xi$, $\eta$ wie in Nr. 18 in der Form (37) darstellen und mit der Doppelsumme in (23) vereinigen, worauf die Schaar $w\varphi - \psi$ dargestellt ist als eine Summe zweier Ausdrücke, von denen der erste die Form (30) besitzt, während der zweite mit der Formenschaar 3. pag. 393 identisch ist. Da nun die Determinante der $p_{\alpha\beta}$ nicht null ist, lassen sich auf diese letztere Formenschaar unmittelbar die Entwickelungen des § II anwenden, und wir kommen schliesslich zu dem Resultat:

„Jede Schaar $w\varphi - \psi$ von schiefsymmetrischen Bilinearformen lässt sich durch congruente lineare Transformationen der beiden Variabelnsysteme $x$ und $y$ als eine Summe (10) von elementaren schiefsymmetrischen Schaaren darstellen."

Man schliesst daraus in bekannter Weise,[1]) dass das volle Invariantensystem einer schiefsymmetrischen Schaar $u\varphi - v\psi$ gegenüber congruenten Transformationen der $x$ und $y$ und linearen Transformationen von $u$, $v$ durch die ganzen Zahlen $m_s$ und $e_\mu^{(\nu)}$, sowie durch die $r-3$ unabhängigen Doppelverhältnisse der Zahlen $w^{(1)}$, $w^{(2)} \ldots w^{(r)}$ dargestellt wird.

---

[1]) Kronecker l. c. pag. 1233.

# Ueber die Bedingungen möglichst präziser Abbildung eines Objekts von endlicher scheinbarer Grösse durch einen dioptrischen Apparat.

Von **L. v. Seidel.**

Aus dem Nachlasse herausgegeben von **S. Finsterwalder.**

(*Eingelaufen 4. Oktober.*)

## Vorbemerkung des Herausgebers.

Die vorliegende Arbeit fand sich im Nachlasse Ludwig v. Seidel's in nahezu druckfertiger Form (redigiert im Jahre 1881) vor. Ihr Inhalt wurde bereits in der Akademie-Sitzung vom 6. März 1880 vorgetragen. Sie bot zur Zeit ihrer Entstehung entschieden viel Neues und, wenn auch in den 18 Jahren, während welcher sie im Schreibtische geruht hat, das Meiste davon wieder entdeckt wurde, so ist sie doch für die Stellung des Verfassers in der Dioptrik so charakteristisch, dass sich ihre Veröffentlichung auch jetzt noch verlohnt. Seidel's Verdienste um die rechnende Dioptrik liegen nach zwei Richtungen; er hat einerseits praktische Formeln nebst Controlen zur strengen trigonometrischen Durchrechnung einzelner Strahlen in und ausser der Axenebene eines zentrierten Systems angegeben, welche gegenwärtig allgemein benützt werden; andrerseits hat er aber auch Näherungsformeln (Reihenentwicklungen) aufgestellt, welche mit für viele Fälle ausreichender Genauigkeit die Gesamtheit des Strahlengangs in seiner Abhängigkeit von den Componenten des Linsensystemes darstellen und Schlüsse allgemeiner Natur gestatten. Im Bereiche der letzteren Näherungsformeln bewegt sich die vorliegende Untersuchung, die

durch den Abbe'schen Sinussatz angeregt war und zunächst das Ziel verfolgt, dessen Uebereinstimmung mit der sogenannten Fraunhoferbedingung zu zeigen. Nebenher wurden die bereits früher aus den Formeln gezogenen Resultate zusammengefasst und ergänzt; offenbar in der Absicht, die Brauchbarkeit der Formeln, die, trotzdem sie bereits vor einem Vierteljahrhundert veröffentlicht waren, kaum Beachtung gefunden hatten, aufs neue zu zeigen. Zu dieser Inslichtstellung seiner Erfolge hatte v. Seidel allen Grund, denn das in seinen Formeln längst gelöste Problem ist von verschiedenen Seiten wiederholt aufgegriffen worden, ohne dass die von ihm von Anfang an gewollte und erzielte Vollständigkeit und Eleganz der Resultate wieder erreicht wurde. Keiner von den Späteren hat an Seidel's Untersuchungen angeknüpft, ja sie auch nur genannt und dem Verfasser dieser Bemerkungen blieb es vorbehalten, nach 35 Jahren auf dem von Seidel gelegten Grunde weiter zu bauen.[1]) Indessen hat auch Seidel einen ihm unbekannt gebliebenen Vorgänger auf dem Gebiete der Dioptrik gehabt, dessen Leistungen auf diesem Gebiete allerdings selbst heute noch gar nicht gewürdigt werden und dessen Unbekanntheit bei Seidel um so weniger ins Gewicht fällt, als er über seine Leistungen nur einen vorläufigen, in seiner Kürze schwer verständlichen Bericht der Oeffentlichkeit übergeben hat. Der Genannte ist kein Geringerer als William R. Hamilton, der Entdecker des nach ihm benannten mechanischen Princips. Der erwähnte Bericht findet sich im Report of the third meeting of the British Association held at Cambridge in 1833. London 1834, S. 360—370 (On some Results of the View of a Characteristic Function in Optics). Herr F. Klein in Göttingen hat in einem Vortrage gelegentlich der Naturforscher-Versammlung in Halle 1891 die Fäden aufgedeckt, welche die wohlbekannten allgemeinen Untersuchungen Hamil-

[1]) Die von optischen Systemen grösserer Oeffnung und grösseren Gesichtsfeldes erzeugten Bilder. Auf grund der Seidel'schen Formeln untersucht von S. Finsterwalder. Abhandl. der k. b. Akad. d. Wiss., II. Cl., XVII. Bd., III. Abth. 1891.

ton's über Strahlensysteme mit seiner Integrationstheorie der mechanischen Differentialgleichungen verknüpfen, und dargethan, wie erstere rein analytisch betrachtet einen speciellen Fall der letzteren betreffen. Ihm verdanke ich auch den Hinweis auf den oben erwähnten Bericht. Das Studium dieses Berichtes überzeugte mich, dass Hamilton in der Theorie der Aberrationen eines dioptrischen Apparates nicht nur weiter vorgedrungen war, als Seidel in seinen bereits früher veröffentlichten Untersuchungen, sondern auch in der hier vorliegenden. Von den Resultaten, die ich selber im Jahre 1891 auf grund der Seidel'schen Formeln entwickelt habe, sind fast alle, die sich nicht auf die Verteilung der Helligkeit des Lichtfleckes und die Aenderung desselben bei veränderter Abblendung beziehen, angedeutet. Die Hamilton'sche Methode zur Herleitung der Formeln ist bei weitem umfassender als die Seidel'sche, obschon letztere im Gegensatz zur ersteren die Formeln in unmittelbar praktisch verwendbarer Gestalt liefert; sie ist von Herrn Thiesen[1]) im Jahre 1890 von neuem entdeckt worden. In jüngster Zeit wurde sie noch übertroffen durch die Theorie des Eikonals[2]) von Herrn H. Bruns, der Lie's Lehre von den Berührungstransformationen für die Dioptrik fruchtbar gemacht hat.

Hiernach stellt sich die Geschichte der Entdeckung der Aberrationen 3. Ordnung kurz folgendermassen. Nachdem Euler in den Jahren 1757—61 die Aberration in der Axe systematisch berechnen gelehrt hatte, erkannte Fraunhofer etwa im Jahre 1825 den Einfluss des in der Praxis erheblichsten Gliedes der Aberrationen ausser der Axe und verstand es, ihn praktisch zu beseitigen. Im Jahre 1833 fand Hamilton, weit seiner Zeit vorauseilend, die allgemeine Gestalt der Formeln, welche sämmtliche 5 Aberrationen in und ausser der Axe darstellen, mittels der ihm eigentümlichen Methode der

---

[1]) Beiträge zur Dioptrik. Sitzungsber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1890.

[2]) Das Eikonal von Heinrich Bruns. Abhandl. der math.-phys. Classe der k. sächs. Akad. d. Wiss., 21. Bd. Leipzig 1895.

Variation einer charakteristischen Funktion (in diesem Falle der Zeit, die das Licht braucht, um von einem Punkte des Weges zu einem andern zu kommen). Doch hat er vermutlich den Zusammenhang der Constanten seiner Formeln mit den Bestimmungsstücken des dioptrischen Apparates nicht abgeleitet, wie er überhaupt seinen diesbezüglichen Untersuchungen mehr theoretisches als praktisches Interesse beimisst. Bewundernswert bleibt die uns im Detail allerdings unbekannte vollständige Diskussion der Formeln, die auf nichts weniger als die Bestimmung der Gestalt der Centrafläche einer Fläche 2. Grades hinauskommt. Unter dem Einflusse von Gauss' dioptrischen Untersuchungen 1838—43 hat Seidel die Reihenentwicklung der Bestimmungsstücke eines Strahles, die dort beim 2. Gliede abbricht, auf Glieder 3. Ordnung ausgedehnt und die zur numerischen Berechnung aufs beste vorbereiteten Formeln im Jahre 1855 publiciert. Auf ähnlichem Wege war seit 1842 bereits Petzval in Wien vorgegangen, aber trotz unendlichen Rechenaufwandes, der allerdings zu dem praktisch höchst bedeutsamen Petzval'schen Porträtobjektiv führte, gelangte er nicht zu sicheren Resultaten allgemeinerer Natur. Ohne von Seidel's Resultaten Kenntnis zu besitzen, hat sich Zinken-Sommer[1]) in Braunschweig im Jahre 1870 das gleiche Ziel gesetzt, dasselbe indessen in ähnlicher Vollkommenheit wie Seidel nicht erreicht. Durch eine Betrachtung von Clausius aus dem Jahre 1864, die sich auf den 2. Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie stützt, war ein wichtiger dioptrischer Satz vorbereitet worden, dessen weittragende Bedeutung allerdings erst von Abbe (1873) und Helmholtz (1874) erkannt worden war und der heute den Namen des Abbe'schen Sinussatzes führt. Dieser gibt die Bedingung an, die zu der Vernichtung der Kugelabweichung hinzutreten muss, damit beliebig weit geöffnete Büschel nicht nur einen Punkt der Axe selbst, sondern auch noch benachbarte Punkte scharf abbilden.

---

[1]) Untersuchungen über die Dioptrik der Linsensysteme. Braunschweig 1870.

Seine Uebereinstimmung mit der Fraunhoferbedingung auf dem beschränkten Gebiet der Aberrationen 3. Ordnung zeigt Seidel in vorliegender Abhandlung. Aus etwas späterer Zeit dürfte die auf Abbe zurückgehende getrennte Behandlung der einzelnen Aberrationen stammen, welche durch Herrn Czapski 1893 an die Oeffentlichkeit gekommen ist. Ganz unbeeinflusst von Seidel's Arbeiten ist die Wiederentdeckung des Hamilton'schen Weges zur Ableitung der Aberrationen durch Herrn Thiesen 1890, welche durch Helmholtz angeregt war.

Aber auch sie führte nicht zu unmittelbar numerisch verwertbaren Formeln. Die gleiche Bemerkung gilt von der methodisch am höchsten stehenden Arbeit des Herrn H. Bruns vom Jahre 1895. Herr Abbe hat seit Beginn der 70er Jahre die gewöhnliche Näherungstheorie der optischen Instrumente auf grund der Bemerkung entwickelt, dass dieselben eine strahlen- und punktweise Abbildung des Objekt- und Bildraumes vermitteln. Lässt man die Eigenschaft der punktweisen Abbildung fallen und führt man dafür jene ein: Nomalensysteme des Objektraumes in solche des Bildraumes überzuführen, so kommt man zu einer Erweiterung der Abbe'schen Auffassung, welche auch die Theorie der Aberrationen einschliesst. Herr Bruns hat diesen Schritt gemacht und gezeigt, dass sich die Abbildungsformeln, dann immer aus einer erzeugenden Funktion (Eikonal) der Strahlencoordinaten in analoger Weise durch Differentiieren ableiten lassen, wie die Formeln für die Componenten der Kraft aus dem Potential. Er ist sich, wie aus seinen einleitenden Bemerkungen hervorgeht, der nahen Verwandtschaft seiner Methode mit dem mechanischen Principe Hamilton's wohl bewusst, ahnt aber

---

[1]) Aus dem Jahre 1893 nach dem Erscheinen meiner eigenen an Seidel anknüpfenden Untersuchung (1891) ist mir eine Arbeit von Herrn M. L. V. Charlier bekannt geworden, aus welcher hervorgeht, dass derselbe wenigstens die allgemeine Gestalt der Formeln für die Aberrationen 3. Ordnung wieder entwickelt hat, ohne seine Vorgänger zu kennen (Sur la marche de la lumière à travers un système de lentilles sphériques. Comptes Rendus de l'Acad. des Sciences 1893, S. 58.

nicht, dass der Urheber jenes Princips schon vor 60 Jahren das gleiche Problem mit ähnlichen Mitteln behandelt hat. Auch die Entwicklungen Seidel's, Zinken-Sommer's und Thiesen's finden keine Erwähnung bei Bruns, wenn man nicht annehmen will, dass er sie unter die „in der Literatur gelegentlich vorkommenden langathmigen Entwickelungen, die die Schwierigkeit der numerischen Berechnung überwunden zu haben vorgeben," zählt. Dieses harte Urteil würde am allerwenigsten auf Seidel's Leistungen in der Dioptrik passen.

---

In einem im November 1879 veröffentlichten Aufsatz[1]) bespricht Herr Abbe in Jena, dessen scharfsinnige Untersuchungen der Vervollkommnung der Optik sowohl auf theoretischem wie auf praktischem Gebiete zugewendet sind, die bekanntlich zuerst von Fraunhofer ins Auge gefasste und der Konstruktion seines Fernrohrobjektivs zu grunde gelegte Bedingung, gemäss welcher die genaue Vereinigung der Lichtstrahlen von mittlerer Brechbarkeit zu einem Bildpunkte, wie sie durch Aufhebung der sogenannten sphärischen Aberration für die Mitte des Gesichtsfeldes erzielt ist, nunmehr auch herbeigeführt wird für die die Mitte zunächst umgebenden Regionen des Sehfeldes. Wenn man sich erlaubt, nach abgekürzter Redeweise, in dem Fall, in welchem die erste Bedingung zur Aufhebung der Kugelabweichung erfüllt ist, zu sagen, dass infolgedessen ein Lichtbüschel von endlicher Oeffnung zur strengen Konvergenz gebracht werde, so darf man in ganz analogem Sinn die Fraunhofer'sche Bedingung als diejenige bezeichnen, durch deren Hinzutritt ein Objekt von endlicher Grösse zur präzisen Abbildung gelangt. Faktisch wird man dabei nicht vergessen, dass, da das Lichtbüschel unendlich viele Strahlen enthält, zur mathematisch strengen Vereinigung aller in einen Konvergenzpunkt unendlich viele

[1]) Ueber die Bedingungen des Aplanatismus der Linsensysteme, Sitzungsber. der Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. 1879 Nov.

Bedingungen erfüllt sein müssten, und dass ebenso auch die Ausdehnung der für einen leuchtenden Punkt erst erreichten Genauigkeit auf ein endliches Gesichtsfeld stricte genommen unendlich viele Bedingungen erfordern würde. Unsere dioptrische Theorie, soweit sie einen analytischen Charakter trägt und nicht lediglich Vorschriften zur Zahlenrechnung aufstellt, setzt bekanntlich voraus, dass das anguläre Mass des Gesichtsfeldes und ebenso das entsprechende der Oeffnung des Apparats kleine Grössen sind, nach deren Potenzen die für die Untersuchung massgebenden Grössen in rasch konvergierende Reihen entwickelt werden können. Berücksichtigt man von diesen Reihen nur die Glieder der niedrigsten Ordnung, so ergeben sich bekanntlich die Näherungsformeln, wie sie in vorzüglichster Eleganz in den „dioptrischen Untersuchungen" von Gauss gegeben sind: Formeln, die als eine erste Approximation für jeden Apparat gelten, die aber zugleich das Ideal für den Optiker repräsentieren, weil der Apparat allen Ansprüchen, die man an seine Leistungen stellen kann, dann vollkommen entsprechen würde, wenn seine Wirkung durch jene Näherungsformeln genau dargestellt wäre. Unter den vorhin gemachten Voraussetzungen erscheinen die Dimensionen des auf irgend einer Transversalebene aufgefangenen Bildes von einem endlichen Objekt als kleine Grössen erster Ordnung, welche man aus jenen Näherungsformeln erhält. Die Fehler in diesem Bild, d. h. die Differenzen zwischen den Punkten, in welchen die Transversalebene von den aus dem Apparat hervorgehenden Lichtstrahlen wirklich passiert wird, und den Stellen, an welchen dieser Durchgang stattfinden müsste, um eine präzise Abbildung der leuchtenden Punkte zu erzeugen, sind durch kleine Grössen von der dritten Ordnung dargestellt, da ihre vollständige Reihenentwicklung überhaupt nur Glieder ungerader Dimension enthält, und sonach der Ausdruck dessen, was den Unterschied zwischen der Aberration und der genauen Betrachtung enthält, in der dritten Ordnung, als seiner niedrigsten, und unter den vorausgesetzten Verhältnissen wichtigsten, beginnen muss. Soll die Leistung des optischen Apparats ihrem

Ideal möglichst nahe gebracht werden, so handelt es sich zunächst um die Aufhebung dieser Glieder dritter Ordnung als der wichtigsten Bestandteile der Ausdrücke für die im Bild zur Entstehung kommenden Fehler. Ihre Vernichtung, soweit dieselbe mit disponiblen Mitteln erreichbar ist, muss bewirkt werden durch die Disposition über die optischen Elemente des herzustellenden Apparats, d. i. solche Konstanten, welche die Krümmungen und die gegenseitigen Abstände der den Apparat konstituierenden, zentrierten sphärischen Flächen bestimmen.

Die alten Ausdrücke, wie sie zuerst von Euler für die Berechnung und Aufhebung der sog. sphärischen Aberration, als des unter gewöhnlichen Umständen wichtigsten unter den Fehlergliedern dritter Ordnung, aufgestellt worden sind, stellen dieselbe nicht explicite durch die Elemente des optischen Systems dar und sind ausserdem ungenau wegen der Vernachlässigung der Dicke der Glaslinsen. Vermöge dieser Vernachlässigung und durch Einführung von gewissen, sehr sinnreich gewählten, für die Form der Linsen massgebenden Hilfsgrössen (die man, verbunden mit den Brennweiten als die von ihm angewandten Elemente des Systems betrachten kann) hat übrigens Euler zunächst für den Fall des nur aus zwei Linsen bestehenden Doppelobjektivs der Bedingung für die Aufhebung der Kugelabweichung die bekannte, für den Gebrauch hinlänglich bequeme, und viel benutzte Gestalt gegeben. Ich glaube der erste zu sein, der den Ausdruck dieser Grösse vollständig, ohne Vernachlässigung der Dicke der Gläser, und für beliebig viele brechende Flächen gegeben hat,[1]) und zwar explicite durch das ursprünglich zunächst zu diesem Zwecke eingeführte Elementensystem, nämlich durch die von mir mit $\sigma$ und $h$ bezeichneten Grössen, für welche ich später den Namen der auf eine bestimmte Objektebene bezogenen Elemente des Apparats vorgeschlagen habe.[2])

Mit Hilfe eben dieser Elemente lassen sich in gleicher Weise die sämtlichen Glieder dritter Ordnung explicite in über-

[1]) Astr. Nachr. Nr. 835, Aufsatz vom 24. Aug. 1852.

[2]) Astr. Nachr. Nr. 1027 ff.

sichtlichen Ausdrücken darstellen, welche die Fehler in der Abbildung irgend eines Objekts durch den aus sphärischen und gegen einander centrierten Flächen bestehenden Apparat darstellen, und zwar in solcher Weise, dass die Untersuchung in gleicher Weise die in der Theorie früher beiseite gelassenen zur Axe „windschiefen“ Strahlen umfasst, wie diejenigen, welche sich in einer durch die optische Axe gelegten Ebene fortpflanzen. Die vollständig entwickelten Ausdrücke habe ich in den Nummern 1027—1029 der Astr. Nachr. in einem Aufsatz vom 6. April 1855 gegeben.[1] Mit Hilfe dieser Ausdrücke wird also die Lage jedes austretenden Strahls explicite durch die Grössen, welche seine Lage vor dem Eintritt in den Apparat angeben, und durch die Elemente des Systems soweit dargestellt, dass die vernachlässigten Bestandteile in den Fehlern des Bildes nurmehr von der 5. Ordnung sind. Auch gewisse Konsequenzen findet man a. a. O. bereits zur Sprache gebracht in betreff von Hindernissen, die sich vollständiger Aufhebung aller Fehler dritter Ordnung entgegenstellen, ebenso die günstigere Ausnahmestellung, welche einerseits ein Apparat, der zur Abbildung eines Objekts in Naturgrösse zu dienen hat, und andrerseits das Fernrohr, als ein Ganzes betrachtet, in Anspruch nehmen. Zur Bestimmung der ursprünglichen Lage des Strahls, sowie derjenigen, die er nach beliebig vielen Brechungen angenommen hat, erscheint es passend, die Koordinaten der Punkte einzuführen, in welchen zwei verschiedene, auf der Axe stehende Ebenen von ihm durchdrungen werden. Dabei erweist es sich als nützlich, nicht dieselben Ebenenpaare für den einfallenden und den gebrochenen Strahl zu betrachten, sondern die Ebenen, welche für den gebrochenen Strahl dienen, an jene Stellen zu legen, wo durch den Apparat selbst die für den einfallenden Strahl beliebig gewählten Ebenen ihre Abbilder finden würden,

[1] Einen vorläufigen Bericht über diese Arbeit, worin insbesondere die „Fraunhofer'sche Bedingung“ zur Sprache kommt, ist schon gegeben in den Sitzungsber. der hies. Akad. v. Jan. 1855, eine weitere Besprechung der abgeleiteten Resultate habe ich gegeben in den Abh. der naturw. techn. Kommission bei der kgl. Akad. d. Wiss., Bd. 1, pag. 227.

sodass für das ganze System brechender Flächen und Medien zwei Systeme von Transversalebenen sich ergeben, deren jedes durch seine Grundebenen für jeden bestimmten Apparat bestimmt ist. In den gewöhnlichen Fällen lässt man am passendsten die Grundebene des einen Systems auf das Objekt fallen, die des zweiten aber die erste brechende Fläche in ihrer Mitte berühren. Mit der Einführung dieser beiden Ebenensysteme stellt sich sozusagen von selbst auch der gleichzeitige Gebrauch zweier verschieden gewählten Koordinatensysteme für den Apparat ein, nämlich derjenigen, welche nach dem obigen Sprachgebrauch auf die Grundebene des einen und des andern Systems bezogen sind: Es ist aber ein Hauptvorteil von der Anwendung dieser Art Elemente, dass zwischen ihren Systemen einfache Verbindungsgleichungen bestehen, sodass man (wie ich gethan habe) in den Endformeln alles durch die Grössen des einen Systems allein ausdrücken kann,[1]) wodurch die Zahl der Variabeln auf das notwendige und ausreichende Mass reduziert wird. Gleichfalls in Verbindung mit dem Gebrauch dieser Ebenensysteme steht, zur Bestimmung der Punkte, in welchen die Lichtstrahlen die Transversalebenen durchsetzen, die Einführung eines von Medium zu Medium innerhalb jedes Ebenensystems sich ändernden Massstabs für die linearen Koordinaten jener Punkte, oder die Einführung reduzierter Werte für die Koordinaten, mittels deren bewirkt wird, dass (mit Ausschluss ihrer Korrektionsglieder dritter Ordnung) die erwähnten Koordinaten konstant für alle (den verschiedenen Medien zugehörigen) Ebenen eines jeden der beiden Systeme werden, wobei sie auch endlich bleiben an unendlich entfernten Objekten von endlicher scheinbarer Grösse. Führt man nun diese reduzierten Grössen als Mass für die transversalen (das ist auf der optischen Axe senkrecht stehenden) Koordinaten in den beiden Grundebenen ein, die hier der Kürze wegen als Objektebene

[1]) Diese Gleichungen habe ich abgeleitet in Nr. 871 der Astr. Nachr., ihre umfassende Anwendung zu obigem Zweck in dem späteren Aufsatz Nr. 1027 ff. dess. Journ.

und als Oeffnungsebene benannt werden mögen, und bezeichnet man in den hiedurch vorgeschriebenen Massen mit $R$ in der Objektebene den Abstand eines bestimmten leuchtenden Punktes von der optischen Axe, dagegen in der Oeffnungsebene mit $x$ die dem $R$ parallel gezählte, oder, wie sie hier heissen soll, radiale, mit $y$ die auf ersterer senkrechte, oder laterale Koordinate des Punktes, in welchem im speziellen der von jenem leuchtenden Punkt kommende Strahl die Oeffnungsebene trifft, so werden zufolge des früher Gesagten $R$, $x$, $y$ als kleine Grössen erster Ordnung angesehen im Vergleich mit den der Axe parallel gezählten Längen, welche beim Apparat in Betracht kommen. Wäre nun der ideale Grenzfall genau gegeben, welchen die bekannten Näherungsformeln repräsentieren, so würden alle von dem Punkte $R$ kommenden Strahlen einer gewissen Bildebene, welche zugleich die letzte Ebene unseres ersten Systems ist (und ebenso auch jede einzelne frühere Ebene dieses Systems), in einem und demselben, von $x$ und $y$ ganz unabhängigen Punkt durchstossen und hier das präzise Bild des leuchtenden Punktes erzeugen, dessen radiale Koordinate in dem hier geltenden, reduzierten Mass ausgedrückt gleichfalls $R$, und dessen laterale Koordinate 0 wäre. In Wirklichkeit aber treten zu diesen beiden Koordinatenwerten die mit Gliedern dritter Ordnung der kleinen Grössen beginnenden Korrekturen hinzu, welche von $x$ und $y$ abhängig, also für die verschiedenen, von dem leuchtenden Punkte kommenden Strahlen verschieden sind, und sonach die Undeutlichkeit des Bildes, sowie auch nach Umständen eine Verzerrung in demselben bedingen. Unsere drei Grössen $R$, $x$, $y$ liefern folgende 10 Produkte dritter Ordnung:

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\ & x^2R & & xyR & & y^2R & \\ & & xR^2 & & yR^2 & & \\ & & & R^3 & & & \end{array}$$

und in den Hauptgliedern dritter Ordnung, welche als Korrektionen zur radialen Koordinate $R$ und zur lateralen Ko-

ordinate 0 in der Bildebene hinzutreten, hat man also nebeneinander die 10 Produkte zu erwarten, jedes multipliziert mit einem von den Elementen des Apparats abhängenden Koeffizienten. Die Entwicklung dieser verschiedenen Koeffizienten bildet die eigentliche Schwierigkeit der Aufgabe. Aus der Symmetrie, welche beiderseits derjenigen Ebene notwendig stattfindet, die zugleich die optische Axe und den leuchtenden Punkt enthält, und in welche unsere radialen Koordinaten fallen, während die lateralen auf ihr senkrecht stehen, ist übrigens sofort zu erkennen, dass die radialen Fehlerabweichungen im Bilde gerade, die lateralen ungerade Funktionen von $y$ sein müssen, dass also unsere 10 Produkte in der Weise in zwei Hauptgruppen zerfallen müssen, dass nur vorkommen können in dem Ausdruck der radialen Fehler des Bildes die 6 Glieder mit $x^3$, $xy^2$, $Rx^2$, $Ry^2$, $R^2x$, $R^3$, und in dem der lateralen Fehler die 4 Glieder mit $x^2y$, $y^3$, $Rxy$, $R^2y$. In der That finden sich auch in den ersten Ausdrücken jene 6, in den zweiten die letzteren 4 wirklich alle vor. Die Anzahl von 10 Koeffizienten, welche zur vollständigen Kenntnis der Fehlerbestandteile dritter Ordnung durch die Elemente des optischen Systems demgemäss darzustellen waren, reduziert sich jedoch erheblich. Aus der Erwägung, dass in dem einfachen Hauptfalle $R = o$, wo der leuchtende Punkt sich in der Axe selbst befindet, der Strahl die Ebene nicht verlassen kann, welche die Axe und seine erste Richtung enthält, und dass die absolute Grösse der ganzen Abweichung, die er im Bilde zeigt, hier notwendig proportional wird der dritten Potenz des Abstandes von der Axe, in welchem er die Oeffnungsebene trifft, ergibt sich, dass nachbenannte 4 Glieder alle ein und denselben Koeffizienten haben müssen, nämlich die beiden mit $x \cdot x^2$ und $x \cdot y^2$ im ersten, und die beiden mit $y \cdot x^2$ und $y \cdot y^2$ im zweiten Ausdruck. Mit der Vernichtung des gemeinschaftlichen Koeffizienten dieser 4 Glieder wird für die Mitte des Gesichtsfeldes $R = o$ die Kugelabweichung (genauer gesagt ihr Bestandteil dritter Ordnung) völlig aufgehoben: in der That hat sich die Bedingungsgleichung für die Beseitigung

dieses Fehlers aus der auf den Raum ausgedehnten Untersuchung in den Astr. Nachr. No. 1027 ff. genau ebenso ergeben, wie ich sie früher auf wesentlich anderem Wege in No. 835 für sich allein abgeleitet hatte. Durch diese notwendigen Beziehungen vermindert sich die Anzahl der Koeffizienten für unsere $6 + 4$ Produkte von 10 auf 7. Dass diese Anzahl sich noch weiter vermindert, nämlich von 7 auf 5, ist ein Umstand, von welchem es nicht scheint, dass auch er sich als notwendig a priori ohne Rechnung oder eine dieselbe ersetzende Deduktion erkennen lasse. Wirklich verhält es sich so, da die Entwicklung der Werte all dieser Koordinaten dargethan hat, dass in dem Ausdruck der radialen Fehler die beiden Produkte $Rx^2$ und $Ry^2$ nur in der Verbindung auftreten $R(3x^2 + y^2)$, und weiter, dass diese Verbindung mit demselben Koeffizienten multipliziert erscheint, welcher in dem Ausdruck der lateralen Fehler das Produkt $2\,R\,x\,y$ enthält.

Sonach treten im ganzen im Ausdruck der radialen Fehler 4 Koeffizienten auf, multipliziert mit den Grössen $x(x^2 + y^2)$, $R(3\,x^2 + y^2)$, $R^2 x$ und $R^3$, in dem Ausdruck der lateralen Fehler aber drei Koeffizienten, multipliziert mit den Grössen $y(x^2 + y^2)$, $2\,R\,x\,y$, $R^2\,y$, und dabei ist der erste Koeffizient des einen Ausdrucks dem ersten des andern, ebenso der zweite des einen dem zweiten des andern gleich, während die Koeffizienten der beiderseitigen dritten Glieder verschieden sind. Das vierte mit $R^3$ multiplizierte Glied im Ausdruck der radialen Abweichung steht ebenfalls isoliert. Da dieses Glied für alle von demselben leuchtenden Punkt kommenden ($R =$ const.), an den verschiedenen Stellen der Oeffnungsebene auffallenden Strahlen konstant ist, so bewirkt es nur eine Verschiebung im radialen Sinn des ganzen, in der Bildebene von jenem leuchtenden Punkt herrührenden Lichtphantom, hat aber auf die Ausdehnung desselben keinen Einfluss, oder mit andern Worten, dieses Glied ist nicht für die Schärfe der Abbildung, sondern nur für die Richtigkeit ihrer Perspektive von Einfluss. Bezeichnen wir die 5 Koeffizienten mit $A, B \ldots E$, die radiale Abweichung, welche der durch $R, x, y$ bestimmte Strahl schliess-

lich in der Bildebene erleidet, durch $\xi$, die laterale durch $\eta$, so hat man nach dem Gesagten

$$\text{I.}\quad \xi = A\,x\,(x^2 + y^2) + B\,R\,(3\,x^2 + y^2) + C\,R^2 x + E\,R^3$$
$$\text{II.}\quad \eta = A\,y\,(x^2 + y^2) + 2\,B\,R\,x\,y + D\,R^2\,y.$$

Die Ausdrücke der Koeffizienten $A$—$E$ durch die Elemente $\sigma, h$ des optischen Systems findet man entwickelt in der schon zitierten Abh. No. 1027 der Astr. Nachr. Ich habe sie dort in doppelter Form gegeben, — unter gleichzeitiger Anwendung der Elemente $\sigma, h$, die sich auf das der Objektebene zugehörige Ebenensystem beziehen, und der Elemente $\sigma', h'$, welche in ganz gleicher Weise auf das System der Oeffnungsebene Bezug haben (siehe die Formeln I—VII a. a. O.) — sodann aber, weil selbstverständlich die Grössen $\sigma', h'$ in notwendiger Verbindung mit $\sigma, h$ stehen, nach Elimination der erstgenannten durch letztere allein (siehe die Ausdrücke VIII und IX a. a. O.). Für die meisten Fälle, aber nicht für alle, ist die letztere Darstellung die bequemere.[1]) In jener Abhandlung habe ich übrigens statt der rechtwinkligen Koordinaten $x, y$ in der Oeffnungsebene Polarkoordinaten angewendet. Für die Vergleichung ist zu bemerken, dass unser $x$ dem dortigen $R' \cos(\nu' - \nu)$, unser $y$ dem dortigen $R' \sin(\nu' - \nu)$ gleich ist.

Bei Apparaten von sehr kleinem, angulärem Radius des Gesichtsfeldes und verhältnismässig beträchtlicher Oeffnung (d. i. für ganz kleine Werte des Winkels, unter welchem der Halbmesser von ihrem Krümmungsmittelpunkt aus erscheint,) bleibt der extreme Wert von $R$, der für den Rand des Gesichtsfeldes gilt, sehr wesentlich kleiner als die dem Rand der Oeffnung zugehörigen Werte $x, y$. In diesem Fall, welcher u. a. derjenige eines Fernrohrs von stärkerer Vergrösserung ist,

---

[1]) Ein paar Fehler, welche sich im Abdruck der erstgenannten Formeln befinden und welche auch bei der Vergleichung mit dem oben Gesagten ohne Belang sind, werden am Schluss des vorliegenden Aufsatzes berichtigt. (Diese Berichtigung hat der Herausgeber in der S. 396 citierten Arbeit bereits vorgenommen.)

werden in den Ausdrücken I. und II. die Glieder an Wichtigkeit der Reihe nach abnehmen, wenn in ihnen die Ordnung der Grössen $x$ und $y$ sinkt und dagegen die von $R$ sich erhebt. Seitdem die präzis rechnende Optik sich auch mit der Herstellung von Apparaten von sehr beträchtlichem Gesichtsfeld zu beschäftigen hat (z. B. für photographische Zwecke), kann zwar nicht behauptet werden, dass auch für solche durchaus die Anfangsglieder unserer Ausdrücke, wenn sie nicht aufgehoben sind, die grössten Bestandteile der Fehler im Bilde liefern werden, aber auch, wenn vermöge der Ausdehnung des Gesichtsfeldes, d. h. der Grösse des Maximalwertes von $R$, in den äusseren Partieen die späteren Glieder die vorwiegenden werden sollten, müssen doch nach bekannten mathematischen Gesetzen für hinlänglich kleine Werte von $R$ die Glieder der Reihen I. und II. stetig abnehmen, und da die mittleren Teile des Gesichtsfeldes, für welche dies gilt, kaum je bei einem Apparat in Wegfall kommen, vielmehr fast immer diejenigen sein werden, auf welche die Aufmerksamkeit zuvörderst zu richten ist, so ist es hiedurch klar, dass man vor allem $A$, dann $B$ u. s. w. vernichten muss, um das Bild möglichst zu vervollkommnen. Man kann dabei auch dies geltend machen, dass durch die Vernichtung jeder einzelnen der beiden Grössen das Lichtphantom gleichzeitig in der radialen und in der lateralen Dimension verkleinert wird, während $C = o$ nur in der ersteren, $D = o$ nur in der letzteren Richtung einen Vorteil gewährt.

Die Bedingung $A = o$ ist die alte Eulers'che für die Aufhebung der Kugelabweichung. Nur hat Euler bekanntlich bei der Ableitung ihres Ausdrucks sich genötigt gesehen, die Dicke der Glaslinsen zu vernachlässigen, während er der Schwierigkeit, welche bei Anwendung seiner Formel aus dem Umstand entspringt, dass nicht alles explicite durch die Elemente des Apparats ausgedrückt ist, Herr zu werden gewusst hat durch die Einführung gewisser besonderer, gerade auf das Mass der Kugelabweichung bei den einzelnen Linsen bezüglichen Grössen, die man in Verbindung mit den Brennweiten als Euler'sche Elemente des Apparats bezeichnen könnte. Durch

die Elemente $\sigma$ und $h$ habe ich die Gleichung $A = o$ vollkommen explicite zuerst ausgedrückt (No. 835 der Astr. Nachr. Gleichung I), und es war dabei, sowie in den ferner auf diese Elemente basierten Entwicklungen nicht nötig, die Gläserdicken ausser acht zu lassen. Die nächstfolgende Bedingung für die Aufhebung der Fehler ist nach der Reihenfolge die Gleichung $B = o$. Da sie die erste ist, welche dadurch hinzutritt, dass nicht mehr für den Punkt in der Mitte des Gesichtsfeldes ($R = o$) allein vorgesorgt wird, kann man in der anfangs festgestellten Ausdrucksweise sagen, dass durch ihre Erfüllung die Aufhebung der Kugelabweichung auf ein endliches Gesichtsfeld ausgedehnt wird. Man muss nach den Mitteilungen, die von Utzschneider nach Fraunhofer's Tode gegeben worden sind, annehmen, dass der letztere bei der Ausrechnung seines Fernrohrobjektivs diese Vervollkommnung des Bildes bezweckt habe, und da nach Aufstellung des mathematischen Ausdrucks für dieselbe[1]) sich ergeben hat, dass in der That die Bedingung $B = o$ durch das Fraunhofer'sche Objektiv sehr genau erfüllt ist, so habe ich derselben den Namen „Fraunhofer'sche Bedingung" gegeben. Uebrigens haben bekanntlich theoretische Untersuchungen Verschiedener, welche alle neueren Datums sind als Fraunhofer's Leistung, gezeigt, dass sein Objektiv eine so bedeutende Anzahl wichtiger Vorzüge vereinigt, dass mit den gegebenen Mitteln geradezu ein Maximum des Erfolgs von ihm in so glänzender Weise erreicht worden ist, wie vielleicht niemals sonst in dem Gebiete der höheren Technik. (Vergleiche darüber den Aufsatz von Dr. Adolf Steinheil, welcher zugleich Bezug nimmt auf die einschlägigen Untersuchungen von J. Herschel, von Biot und von mir. Diese Berichte 2. Bd. S. 284, 1867.)

Prof. Abbe hat neuerlich[2]) für die Fraunhofer'sche Bedingung $B = 0$, nach den im Ergebnis übereinstimmenden, wiewohl auf sehr verschiedener Art der Betrachtung beruhen-

[1]) Siehe meine mehrfach citierte Abh. v. 6. April 1855, Astr. Nachr. Nr. 1027.

[2]) Sitzungsber. der Jen. Ges. f. Med. u. Naturw. v. 28. Nov. 1879.

den Untersuchungen von Helmholtz und von ihm selbst, einen Ausdruck gegeben, welcher durch seine elegante Formulierung bemerkenswert ist. Zwar setzt diese Formulierung nur an Stelle des Postulats, dass auch die zunächst seitwärts von der Mitte befindlichen Punkte im Gesichtsfeld ihre Kugelabweichung verlieren sollen, das andere Postulat, dass für alle von der Mitte des Gesichtsfelds ausgehenden Strahlen das Verhältnis der Sinuse ihrer letzten Winkel mit der Axe zum Sinus ihrer ersten Winkel mit derselben ein konstantes sei, ohne dass durch Aufstellung einer zwischen den Elementen des Apparats zu erfüllenden Gleichung ersichtlich wäre, auf welche Art die Forderung erreicht werden soll. Indessen ist, auch abgesehen von der theoretischen Eleganz des Satzes, die neue Formulierung immerhin bequemer für den auf dem Weg der Versuche vorgehenden Rechner, als die ursprüngliche. Besonders interessant ist aus dem Aufsatz des Herrn Abbe auch die Mitteilung, dass die Mikroskopobjektive aus den verschiedensten Bezugsquellen, welche sich die Anerkennung ihrer Güte durch den Erfolg erworben haben, übereinstimmend unserer Bedingung genügen.[1]) Es ist sonach die Wichtigkeit derselben auch schon durch eine umfangreiche Erfahrung, selbst auf dem Felde der praktischen Optik bestätigt, auf welchem dieselbe bis in die neueste Zeit fast nur tatonnierend zu Werke geht. Diejenigen ihrer Produktionen, welche sich ohne Wissen ihrer Verfertiger, die selbst nur nach dem Effekt kombinierten, unserer Bedingung anschlossen, haben vermöge ihrer besseren Leistung in der Konkurrenz die andern aus dem Felde geschlagen.

Es ist von Interesse, die Abbe-Helmholtz'sche Fassung unserer Bedingung, d. i. die Forderung der vorhin erwähnten Proportionalität des Sinus, mit derjenigen Form zu vergleichen, in welcher ich a. o. O. bereits vor 25 Jahren dieselbe Bedingung aufgestellt habe. In dieser älteren Gestalt ist, durch-

[1]) Seidel's Fraunhoferbedingung ist, wie der Herausgeber bereits in der Einleitung hervorhob, specieller als der Abbe'sche Sinussatz und würde bei der Berechnung von Mikroskopobjektiven sehr grosser Oeffnung nicht ausreichen.

aus verschieden von der neueren, alles durch die Elemente $\sigma$, $h$ des Linsensystems ausgedrückt, so dass die zwischen diesen zu erfüllende Gleichung explicite vorliegt. Nach der abbrevierten Bezeichnung in den Astr. Nachr. Nr. 1028 ist es die Gleichung $S(2) = 0$. Der neue Ausdruck der Bedingung giebt kein Mittel an die Hand, dieselbe durch die Elemente darzustellen — umgekehrt aber ist es leicht, von meinen Gleichungen ausgehend auch das Verhältnis der Sinus zu ermitteln und zu versuchen, ob dasselbe konstant wird, wenn die Bedingung $B = 0$ nach der oben gebrauchten Bezeichnungsweise erfüllt ist. Nach meinen in dem oft zitierten Aufsatz angewendeten Bezeichnungen passiert irgend ein Strahl, der von der Mitte des Gesichtsfeldes ausgeht, in seiner ursprünglichen Lage die optische Axe in dem Punkt, dessen Abszisse ist $h_0 : \sigma_{-1}$; die der Kürze halber hier von uns so genannte Oeffnungsebene hat, vom gleichen Anfangspunkt aus gezählt, die Abszisse $h'_0 : \sigma'_{-1}$. Diese Ebene wird von unserm Strahl getroffen in einem Punkt, dessen Abstand von der Axe ist $r'_{-1} = R' \cdot \frac{r_{-1}}{\sigma'_{-1}}$ (wobei $R'$ der „reduzierte Abstand" des Durchschnittspunktes von der Axe ist); daher ist die Tangente des Winkels $w_{-1}$, den der Strahl ursprünglich mit der Axe bildet:[1])

$$\operatorname{tg} w_{-1} = R' \frac{r_{-1}}{\sigma'_{-1}} : \left( \frac{h'_0}{\sigma'_{-1}} - \frac{h_0}{\sigma_{-1}} \right) = R' \cdot \frac{\sigma_{-1}}{T}.$$

In ganz analoger Weise ist bei dem Strahle, welcher die seine ursprüngliche Richtung und die Axe enthaltende Ebene nicht verlässt, die Abszisse des Punktes, in welchem er nach allen Brechungen die Axe schneidet, gleich $\frac{h_*}{\sigma_*}$ (wenn der Asteriskus als Index der letzten Grösse ihrer Art gebraucht wird) ohne hinzutretendes Korrektionsglied, weil bei dieser

[1]) Eine nähere Feststellung des Sinnes, in welchem die Winkel hier positiv gezählt sind, ist unnötig, da es sich nur um die Prüfung einer Proportionalität handelt. Im übrigen verweise ich wegen der Bedeutung aller hier nicht besonders erwähnten Grössen auf die Astr. Nachr. Nr. 1027.

Betrachtung für die Strahlen des in Betracht gezogenen Lichtkegels die Kugelabweichungen als aufgehoben vorausgesetzt sind ($A = 0$). In der gleichen Finallage passiert der Strahl diejenige Ebene, deren Abszisse ist $\frac{h'_*}{\sigma'_*}$ (die das reduzierte Bild der Oeffnungsebene $*$ enthält) in einem Abstand von der Axe

$$r'_* + \Delta r'_* = (R' + \Delta R'_*) \frac{\nu_*}{\sigma'_*},$$

und es findet sich hieraus für den letzten Winkel des Strahles mit der Axe

$$\operatorname{tg} w_* = (R' + \Delta R'_*) \frac{r_*}{\sigma'_*} : \left(\frac{h'_*}{\sigma'_*} - \frac{h_*}{\sigma_*}\right) = \frac{(R' + \Delta R'_*)\sigma_*}{T},$$

weil die Grösse

$$\frac{h\sigma' - h'\sigma}{\nu} = T$$

konstant bleibt bei jedem der analogen Uebergänge, sowohl von dem vor einer bestimmten Fläche (deren Indices die $h$, $h'$ tragen), liegenden zu einem hinter ihr liegenden Medium, als auch von der vorderen der beiden ein bestimmtes Medium (dessen Index die $\sigma$, $\sigma'$, $\nu$ tragen) begrenzenden Fläche zur hinteren, nach einer von mir bereits in den Astr. Nachr. bewiesenen Grundrelation, welche sozusagen das Gegenstück zu dem eben dort gegebenen Satz von der Unveränderlichkeit der Grösse $\frac{r \cdot \sigma}{\nu} = R$ durch alle Medien vorstellt. Dabei enthält die Grösse $\Delta R'_*$ den Bestandteil dritter Ordnung, um welchen radiale Distanz $R' + \Delta R'_*$ sich von dem Näherungswert $R'$ unterscheidet. Man hat nun:

$$\frac{\sin w_*}{\sin w_{-1}} = \frac{\operatorname{tg} w_*}{\operatorname{tg} w_{-1}} \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 w_1}{1 + \operatorname{tg}^2 w_*}}.$$

Da hier die betreffenden Winkel kleine Grössen dritter Ordnung sind, so besteht das Verhältnis aus Gliedern $0^{\text{ter}}$, $2^{\text{ter}}$, $4^{\text{ter}}$ ... Ordnung derselben. Substituiert man für die Tangenten ihre vorgegebenen Ausdrücke, so lässt sich alles nach $R'$ ordnen, an welchem die Korrektur $\Delta R'_*$ (s. sogleich) eine Funktion dritter Ordnung ist. Man erhält:

$$\frac{\sin w_*}{\sin w_{-1}} = \frac{\sigma_*}{\sigma_{-1}} \left\{ 1 + \frac{\Delta R'_*}{R'} + \frac{R'^2}{2\,T^2} (\sigma_{-1}^2 - \sigma_*^2) + \ldots \right\},$$

wobei die ausgeschriebenen Glieder die Grösse zweiter Ordnung vollständig enthalten. Soll das Verhältnis dieser Sinus konstant für den ganzen Strahlenbündel, also unabhängig von $R'$ sein, so muss man haben (da auch $\frac{\Delta R'_*}{R'}$ zu den Gliedern zweiter Ordnung nach $R'$ zählt):

III. $$2\,T^2 \frac{\Delta R'_*}{R'^3} + \sigma_{-1}^2 - \sigma_*^2 = 0$$

und diese Gleichung ist, in den von mir eingeführten Grössen ausgedrückt, die Formulierung der Abbe-Helmholtz'schen Forderung. Sie muss sich also als identisch erweisen mit meiner alten Formulierung der Fraunhofer'schen Bedingung $B = 0$, wenn unsere Ergebnisse unter sich in Einklang stehen.

Dass dies in der That der Fall ist, ergiebt sich, wenn man für das Korrektionsglied dritter Ordnung $\Delta R'_*$ seinen Ausdruck aus meinen Entwicklungen a. a. O. nimmt. Man erhält denselben, wenn man in der Gleichung (Astr. Nachr. 1028, Zeile I—IV) die nicht accentuierten und die accentuierten Grössen $R$, $\sigma$, $h$ gegenseitig vertauscht, bei welcher Vertauschung $T$ in $-T$ übergeht, darnach $R = 0$ setzt (weil der in Betracht gezogene Lichtkegel von der Mitte des Gesichtsfeldes kommt, wodurch sich der ganze Ausdruck auf das in Zeile IV stehende Glied reduziert, und endlich über alle Flächen des Apparats die durch $S$ angedeutete Summation erstreckt. Wenn dabei, wie a. a. O. im allgemeinen Gliede der Summe, bei $h$ der Index der Fläche weggelassen, bei den Grössen $\sigma$ und $\nu$, wo das der Fläche vorangehende Medium kurz durch —, der des ihr nachfolgenden durch + vertreten wird, so erhält man

$$2\,T^2 \frac{\Delta R'_*}{R'^3} = S \left\{ \frac{h'}{T} \left( \frac{\sigma_{-} - \sigma_{+}}{N} \right)^2 \left( \nu_{-}\sigma_{-} - \nu_{+}\sigma_{+} \right) \right\} - S \left\{ \frac{\sigma_{-} - \sigma_{+}}{N} \left( \nu_{-}\sigma_{+} - \nu_{+}\sigma_{-} \right) \right\},$$

welcher Ausdruck in Gleichung III. zu substituieren ist. Um das Ergebnis auf die eine oder die andere der beiden Formen zurückzuführen, in welcher ich den Koeffizienten $B$ einerseits

in Zeile II des vorhin angeführten Ausdruckes für $\Delta R'_*$, andrerseits in der entsprechenden Zeile von Gleichung VIII a. a. O. aufgestellt habe, ist noch eine Umgestaltung erforderlich, zu welcher die Gleichung 19) daselbst die Mittel enthält. Man erhält die erste der von mir für die Fraunhofer'sche Bedingung aufgestellten Formen (nach welcher Zeile II a. a. O. in der Summe über alle Flächen verschwindet), wenn man im zuletzt gegebenen Ausddruck statt $h' \left(\underset{-}{\sigma} - \underset{+}{\sigma}\right)$ schreibt $h \left(\underset{-}{\sigma} - \underset{+}{\sigma}\right) - NT$, was nach den zitierten Gleichungen dasselbe ist, und dann das zweite der so erhaltenen Glieder mit dem letzten in dem Ausdrucke von $2T^2 \frac{\Delta R'_*}{R'}$ vereinigt, wovon der Effekt ist, dass nach geschehener Summation diese Glieder in Gleichung III. gegen die Glieder $\underset{-}{\sigma}^2 - \underset{+}{\sigma}^2$ sich gegen einander aufheben. Dagegen gelangt man von der Form III aus zur zweiten meiner Formen für die Fraunhofer'sche Bedingung (Gleichung VIII l. c.)

$$B = \chi \cdot S(1) + T \cdot S(2) = 0$$

oder, da die Gleichung $S_1 = 0$ für die Aufhebung der Kugelabweichung in der Mitte des Gesichtsfeldes als erfüllt hier angenommen wird, zur Bedingung $S_2 = 0$, wenn man in dem vorhin mitgeteilten Ausdruck für $\Delta R'_*$ die Grösse $\frac{h'}{T}$ ersetzt durch $h \cdot \frac{\chi}{T} - h\Sigma$ gemäss der letzten der Gleichungen 19) l. c. und auch hier das mit $\underset{-+}{\nu\sigma} - \underset{+-}{\nu\sigma}$ multiplizierte Glied vermöge der Gleichung $-\left(\underset{-+}{\nu\sigma} - \underset{-+}{\nu\sigma}\right) = \underset{--}{\nu\sigma} - \underset{++}{\nu\sigma} - N\left(\underset{-}{\sigma} - \underset{+}{\sigma}\right)$ mit dem andern verschmilzt. Hiernach kommt die linke Seite der Gleichung III nach Ausführung der Summation auf meine Form zurück, welche in den Zeichen der Astr. Nachr. Nr. 1028 Gleichung X und XI einfach so steht:

$$\frac{\chi}{T} S(1) + S\,U(1),$$

oder man erhält die Fraunhofer'sche Bedingung in der Form $\chi S(1) + TS(2) = 0$, was zu beweisen war.

Die sachliche Uebereinstimmung zweierlei Formulierungen der Bedingung für die Aufhebung der Kugelgestalt in einem Gesichtsfeld von endlicher Ausdehnung ist also dargethan. Herr Abbe schlägt in dem zitierten Aufsatz für ein Objektiv, welches neben den gewöhnlichen Bedingungen der Aufhebung von Kugelabweichung und Farbenzerstreuung noch diese dritte erfüllt, den Namen eines aplanatischen vor, indem er dem bisher ziemlich unbestimmten Ausdruck, welcher bald weniger, bald auch, wie z. B. beim Steilheilschen „Aplanat" mehr besagen sollte, als hier mit dem Worte gemeint ist, diesen besimmten Sinn für die Zukunft vindizieren will. Ich habe jedoch für die Bedingung $B = o$ als die „Fraunhofersche" das Recht der Namengebung als der erste, der ihren entsprechenden Ausdruck aufgestellt hat, schon vor 25 Jahren geübt, und wie ich glaube, in der angemessensten Weise zu Ehren dessen, der sie zuerst zu erfüllen verstand, würde es auch nicht für ratsam halten, aus dem Sprachschatz gerade ein Wort von bisher so schwankender Bedeutung für eine nun definitive Sache zu wählen. Ein gutes Objektiv soll übrigens (wie auch das Fraunhofersche bereits thut) ausser jenen drei Bedingungen auch mindestens noch der vierten genügen, die durch das Verhältnis der Dicken seiner Medien erfüllt werden kann, dass die verschiedenen farbigen Bilder gleich gross werden, eine Bedingung, welche zur gewöhnlichen Achromasie in ganz ähnlicher Beziehung steht, wie die Fraunhofersche zur Eulerschen wegen der Aufhebung der Kugelabweichung.[1])

Um die Gestalt derjenigen kleinen Lichtkurven kennen zu lernen, die in der Bildebene verzeichnet werden von solchen Strahlen unseres leuchtenden Punktes, welche die Oeffnungsebene an der Peripherie eines zur Axe zentrischen Kreises vom

[1]) Auch die mathematische Form jener zweiten auf die Farben bezüglichen Bedingung, die ich bereits in den Astr. Nachr. Nr. 871 gegeben habe, zeigt zu derjenigen der ersten genau dieselbe Art von Verwandtschaft, wie der Ausdruck der Fraunhofer'schen Bedingung $B = 0$ zur Euler'schen $A = 0$, wie ich an anderem Orte erweisen werde. Anmerkung vom Jahre 1881. (Ist nicht mehr geschehen. Anm. d. Hrsgb.)

Radius $R'$ treffen, hat man in unseren Gleichungen I und II zu setzen
$$x = R' \cos\varphi \qquad y = R' \sin\varphi$$
und $R'$ konstant zu nehmen. Man darf jedoch nicht glauben, dass etwa diejenige Kurve solcher Art, welche dem Werte von $R'$ des Oeffnungsrandes zugehört, in der Bildebene die äussere Umfassung des ganzen von leuchtenden Punkten erzeugten Lichtphantoms vorstellen wird, denn im allgemeinen werden die verschiedenen, $R'$ zugehörigen solchen Kurven nicht nach der Grösse ihrer $R'$ eine die andere ganz umschliessen, sondern vielmehr einander schneiden und die dabei entstehende umhüllende Linie (zugleich Durchschnitt der vom leuchtenden Punkt erzeugten Brennfläche mit der Bildebene und vermöge dieser Qualität hervorstechend durch ihre Helligkeit) wird zum einen Teil, die Extreme unserer Linien $R' = \text{const.}$ und zum andern jene Umfassung bilden.[1]) Mit der Substitution
$$x = R' \cos\varphi \qquad y = R' \sin\varphi$$
erhält man aus den Gleichungen I. und II.:
$$\text{IV.} \quad \xi - ER^3 - 2BRR'^2 = (AR'^2 + CR^2)R'\cos\varphi + BRR'^2\cos 2\varphi$$
$$\text{V.} \quad \ldots\ldots\ldots \eta = (AR'^2 + DR^2)R'\sin\varphi + BRR'^2\sin 2\varphi.$$

Man ersieht hieraus, dass die Kurve $R' = \text{const.}$ auf folgende Art erzeugt werden kann, welche der Epicykelkonstruktion ganz nahe verwandt ist: Man denke sich eine Ellipse konstruirt, deren Mittelpunkt, in der radialen Axe der $\xi$ ge-

---

[1]) Die Brennfläche selbst habe ich in den „Gelehrten Anzeigen" dieser Akademie von 1857 Nr. 30 u. 31 besprochen und ihre Gleichungen ausgedrückt durch eine Hilfsvariable, nebst Betrachtungen über ihre Beziehung zur Wellenfläche in einem Briefe an Herrn Kummer, abgedruckt in den Berliner Monatsber. v. 18. Dez. 1862, mitgeteilt. Seitdem hat danach Herr Brill ihr Modell in Gips feststellen lassen und veröffentlicht. In meiner betreffenden Publikation ist übrigens als Hauptaxe statt der optischen Axe der „ausgezeichnete Strahl" eingeführt, um welche her die Brennfläche als symmetrisch sich darstellt. Die auf dieser senkrechten Querschnitte, welche dort zunächst besprochen werden, enthalten also nicht unter sich den im Text in Frage kommenden Schnitt mit der auf der optischen Axe senkrechten Ebene des „idealen Bildes." (Sie weichen aber nur um Grössen 5. O. ab, die hier schon vernachlässigt sind. Anm. d. Hrsgb.)

legen, von dem idealen Bild des leuchtenden Punktes den reduzierten Abstand hat: $ER^3 + 2BRR'^2$, und deren erste Halbaxe (radiale) ist $a = (AR'^2 + CR^2)R'$, während die zweite (laterale) $b = (AR'^2 + DR^2)R'$. Den Mittelpunkt eines Kreises vom Radius $BRR'^2$ führe man auf der Peripherie der Ellipse herum, indem man zugleich die Peripherie des Kreises selbst von einem Punkt $P$ so umlaufen lässt, dass in dem Moment, wo die Koordinaten des Kreismittelpunktes, vom festen Mittelpunkt der Ellipse aus gezählt, $a \cos \varphi$, $b \sin \varphi$ sind, der nach $P$ gezogene Radius des Kreises mit der Richtung der Axe $a$ den Winkel $2\varphi$ einschliesst. Bei dieser Bewegung beschreibt der Punkt $P$ unsere Kurve. Man kann hienach auch eine ziemlich einfache geometrische Konstruktion für beliebig viele Punkte unserer Linie aufstellen, welche mit bekannten Epicykloiden und Konchoiden eine Analogie darbietet.

Die für unsere Anwendung wichtigsten Fälle sind besonderer Besprechung würdig.

1. Wenn man annimmt, dass $A$ nicht gleich Null ist, d. h. dass die Kugelabweichung nicht gehoben ist, und zugleich, dass die durch $R'$ gemessene Grösse der Oeffnung überwiegend ist gegen die durch $R$ gemessene Grösse des Gesichtsfeldes, so zwar, dass die Glieder mit $B$, $C$, $D$ ausser acht gelassen werden können gegen diejenigen mit $A$, so wird unsere Kurve zum Kreis (in welchem die Ellipse der allgemeinen Figur übergeht, während der Epicykel verschwindet) und die zu den verschiedenen $R'$ gehörigen Kreise erscheinen als konzentrisch; man erhält also in diesem Fall die Sterne in der Ebene des idealen Bildes dargestellt als kleine kreisrunde Scheiben, deren Dimensionen unabhängig sind von $R$, also von den scheinbaren Abständen der verschiedenen Sterne von der Mitte des Gesichtsfeldes. Infolge der Proportionalität der Radien dieser Scheiben mit $R'^3$ sind dieselben übrigens nicht gleichmässig erleuchtet, sondern das Licht ist in der Mitte am stärksten konzentriert und nimmt nach aussen ab, weshalb für das Auge die Dimensionen der Phantome schwacher Sterne von der Helligkeit abhängig erscheinen werden.

2. Nimmt man an, dass die Euler'sche Bedingung $A = o$ für die Aufhebung der Kugelabweichung erfüllt ist, nicht aber auch die Fraunhofer'sche Bedingung $B = o$, und hält man über die extremen Grössen von $R$ und $R'$ die vorigen Voraussetzungen fest, vermöge deren diesmal die Glieder in $B$ allein in betracht gezogen werden, so wird aus I. und II.

$$\text{VI.} \quad \xi - 2\,B\,R\,R'^2 = B\,R\,R'^2 \cos 2\,\varphi$$

$$\text{VII.} \quad \ldots\ldots \quad \eta = B\,R\,R'^2 \sin 2\,\varphi,$$

woraus sich ergibt, dass in der Bildebene die Erleuchtungskurve derjenigen Strahlen, welche in der Oeffnungsebene auf der Peripherie des Kreises $R' = \text{const.}$ aufgefallen sind, ein kleiner Kreis ist vom Radius $B\,R\,R'^2$, welcher zweimal durchlaufen wird, während der Auffallpunkt in der Oeffnungsebene die Peripherie des Kreises einmal durchläuft. Die zu verschiedenen $R'$, d. h. zu konzentrischen Kreisen als Auffallörtern in der Oeffnungsebene gehörigen Erleuchtungskreise sind aber nicht konzentrisch, sondern ihre Mittelpunkte haben von dem festen Anfangspunkt der $\xi$, nämlich dem idealen Bild des leuchtenden Punktes, Abstände, welche dem Quadrat von $R'$ proportional und für jeden einzelnen unserer Kreise gleich seinem Durchmesser $2\,B\,R\,R'$ sind. Daraus geht hervor, dass alle diese Kreise zu gemeinsamen Berührenden, als zu Umhüllenden, zwei gerade Linien haben, welche durch den Anfangspunkt der $\zeta$ gehen und mit der Axe der letzteren nach der einen und der andern Seite Winkel von je $30^0$ ($=\arcsin \frac{1}{2}$), miteinander also einen Winkel von $60^0$ einschliessen. Das ganze, von dem leuchtenden Punkt in der Bildebene erhellte Lichtphantom erhält daher seine Begrenzung auf zwei Seiten durch diese beiden unter $60^0$ zusammenlaufenden Geraden und auf der dritten durch ein Stück der Peripherie des letzten oder zum grössten Wert von $R'$ gehörigen unter unseren vorher beschriebenen Kreisen, nämlich durch diejenigen $\frac{2}{3}$ seiner Peripherie, welche auf der vom Konvergenzpunkt der beiden Geraden abgewendeten Seite vom Berührungspunkt mit der einen Geraden bis zu demjenigen mit der andern sich erstrecken. Die beiden Geraden selbst sind nach der einen Seite nicht über

diese Berührungspunkte mit dem ersten Kreis, nach der andern nicht über ihren Konvergenzpunkt hinaus zu verlängern. In der Nähe der beiden umhüllenden Geraden, welche Durchschnitte der Bildebene mit der Brennfläche sind, und ganz besonders in der Gegend ihres Durchschnitts erscheint die Lichtintensität der auf dieser Seite spitzen und der entgegengesetzten abgerundeten Lichtfigur am grössten.[1]) Auch derjenige Teil des letzten unserer Kreise, welcher nicht zur Begrenzung der Figur kontribuirt, sondern ins Innere derselben fällt, muss aus leicht zu erkennenden Gründen Ort einer diskontinuirlichen Abschwächung der Helligkeit in der Figur sein: Je nach dem Vorzeichen, welches die Grösse $B$ vermöge der Anordnung des Apparats hat, werden die Spitzen der durch sie erzeugten Lichtphantome entweder der Mitte des Gesichtsfeldes oder dem Rande zugekehrt sein. Dabei ist es interessant, dass derjenige Strahl, welcher von einem ausser der optischen Axe gelegenen leuchtenden Punkt in der Mitte der Oeffnungsebene $R' = o$ auffällt, nicht etwa an irgend eine Stelle im Innern der Lichtfigur gelangt, sondern ganz extrem an ihre Spitze. Eine Verdeckung des mittleren Teils des Apparats durch eine kleine kreisrunde Scheibe würde das Lichtphantom der Spitze und der ihr anliegenden hellsten Partieen berauben und auf dieser Seite eine ähnliche, nach aussen konvexe Abrundung der Figur durch einen an beiden Geraden berührenden Kreis bedingen, wie die entgegengesetzte Begrenzung sie darbietet. In diesen Gleichungen VI. und VII. werden, wie man leicht erkennt, $\xi$ und $\eta$ zu Koordinaten des Berührungspunktes des kleinen Lichtkreises in den beiden um-

[1]) Für die Gestalt der Brennfläche selbst bildet der hier in Rede stehende Fall, wo $A = 0$ ist, den Ausnahmefall, auf dessen Vorhandensein ich in dem Aufsatz der „Gelehrten Anzeigen" Nr. 18 hingedeutet habe, ohne ihn dort näher zu besprechen. (Der Herausgeber hat in der auf der Anmerkung S. 396 citierten Arbeit diesen Ausnahmefall vollständig diskutiert; vgl. § 3 S. 29 (545), ferner S. 46 (562), S. 52 (568), S. 58 (574). Der Unterschied der Figuren gegenüber der Seidel'schen Beschreibung des Lichtphantoms rührt davon her, dass Seidel die Grössen $C$, $D$, $E$ vernachlässigt, der Herausgeber dagegen nicht.)

hüllenden Geraden dann, wenn $2\varphi = \pm 120^0$, also $\varphi = \pm 60^0$ ist, und zwar gleichzeitig für alle Werte von $R'$. Befindet sich daher der leuchtende Punkt gerade über oder auch gerade unter der optischen Axe, so werden diejenigen Stellen der Oeffnungsfläche, an welchen die schliesslich durch unsere Geraden passirenden Strahlen auffallen, Positionswinkel von $60^0$ resp. $120^0$ nach der einen oder andern Seite gegen die Vertikale haben und man würde von dem Lichtphantom seine beiden Durchschnitte mit der Brennfläche weglöschen, wenn man vor der Oeffnungsfläche zwei sich zentrisch kreuzende, undurchsichtige, schmale Streifen so anbringen würde, dass ihre Enden nach vier Spitzen eines auf der Fläche beschriebenen regulären Sechsecks laufen würden, dessen zwei übrige Spitzen in dem vertikalen Durchmesser der Oeffnungsfläche gelegen wären. Im übrigen sind die von den verschiedenen leuchtenden Punkten herrührenden Lichtphantome alle einander ähnlich und ihre Dimensionen sind proportional dem Abstand $R$ des leuchtenden Punktes von der Mitte des Gesichtsfeldes.

3. Wenn neben der Euler'schen Bedingung auch die Fraunhofer'sche Bedingung $B = o$ erfüllt ist, so erhält man unter Beibehaltung aller übrigen Glieder dritter Ordnung aus IV und V:

$$\xi - E R^3 = C R^2 R' \cos\varphi$$
$$\eta = D R^2 R' \sin\varphi.$$

Die Strahlen, welche in der Oeffnungsebene auf die Peripherie des Kreises $R' = \text{const.}$ auffallen, bezeichnen also in der Bildebene eine kleine Ellipse von den Halbaxen $C R^2 R'$ und $D R^2 R'$ (in den gewöhnlichen Fällen, wo beträchtliche Dicken der Medien nicht in Betracht kommen, ist die erste oder radiale Axe die grössere), da die verschiedenen von leuchtenden Punkten erzeugten Ellipsen konzentrisch, ähnlich und ähnlich liegend, und ihre Flächeninhalte auch denjenigen der zugehörigen Kreise in der Oeffnungsebene gleich sind. So bildet die zum grössten $R'$ gehörige unter ihnen den Umriss des grossen Lichtphantoms und das Innere desselben ist durchaus gleichmässig erleuchtet, ohne dass Brennlinien entstehen:

Der im Mittelpunkt der Oeffnungsfläche auffallende Strahl $R' = o$ gelangt dabei in den Mittelpunkt der Ellipse. Auch alle von verschiedenen leuchtenden Punkten herrührenden Lichtphantome sind einander ähnlich, jedoch wachsen die Dimensionen der sie einschliessenden Ellipsen bei wachsendem Abstand $R$ des leuchtenden Punkts von der Axe und zwar proportional dem Quadrat desselben, wodurch bedingt wird, dass sie in nächster Umgebung der Mitte des Gesichtsfeldes noch sehr klein bleiben, weiter aussen aber sehr rasch zunehmen. Der Umstand, dass in diesem Fall keine Brennfigur zustande kommt und die Mitte des Lichtphantoms von den in der Mitte des Gesichtsfeldes auffallenden Strahlen eingenommen wird, begründet an sich sehr wesentliche Vorzüge der Fraunhofer'schen Konstruktion, besonders für Messinstrumente. Ich habe an anderem Ort erläutert, dass, wenn man die Untersuchung der Lage der Strahlen auch auf Ebenen ausdehnt, welche unserer Bildebene nur benachbart sind, sich ergibt, dass die im allgemeinen Fall entstehende Brennfläche, welche zwei Schalen und an denselben zwei Schneiden zeigt, für das Fraunhofer'sche Objektiv sich reduziert auf zwei kurze, nicht in einer Ebene gelegene, aber auf einander senkrecht gerichtete gerade Linien, die letzten Reste der im andern Falle existierenden Schneiden der Fläche. Vermöge des verschiedenen Abstandes, welchen beide von der Ebene unseres idealen Bildes haben, kommt die Erscheinung, welche man jetzt „Astigmatismus" nennt, möglichst scharf in der Art zu stande, dass es zwei verschiedene Einstellungen für ein Okular gibt, bei deren einer der exzentrisch im Gesichtsfeld befindliche leuchtende Punkt als kurzer radialer, und bei deren andrer er als kurzer lateraler Strich gesehen wird. Dass ein Apparat, der die nächste Stufe der Verbesserung über die Euler'sche Gleichung $A = o$ hinaus erreicht hat, diese Erscheinung darbieten wird, hat bereits Anfang der sechziger Jahre Petzval in der damals erschienenen ersten Ankündigung seiner dioptrischen Untersuchungen ausgesprochen.

## Oeffentliche Sitzung

### zur Feier des 139. Stiftungstages

**am 15. März 1898.**

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die heutige öffentliche Festsitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften im Monate März ist jährlich zur Feier ihrer Stiftung angeordnet und dient zur Verkündung von Thatsachen, welche mit dem Stiftungszwecke zusammenhängen.

Zunächst erwähne ich, dass ein ausländischer, ein griechischer Gelehrter sein ganzes beträchtliches Vermögen unserer Akademie testamentarisch vermacht hat mit der Bedingung, wissenschaftliche Arbeiten bayrischer und griechischer Gelehrter über Geschichte, Sprache, Literatur oder Kunst der Griechen von den ältesten Zeiten bis zur Eroberung Konstantinopels durch die Türken zu fördern und auszuzeichnen.

Die Schenkung führt den Namen Thereianós-Fond und beträgt rund 260,000 Mark.

Dionysios Thereianós, am 28. August 1834 auf der liebreizenden Insel Zante geboren, besuchte als Knabe das Gymnasium in Korfú. Zum Jüngling herangewachsen siedelte er mit seinem Vater nach Triest über, wo er seit dieser Zeit ständig gelebt hat. Nachdem er eine Zeit lang als Beamter einer Versicherungsgesellschaft gearbeitet hatte, trat er im Jahre 1855 in die Redaktion der damals in Triest erscheinenden griechischen Zeitung Iméra ein. Sechs Jahre später gründete er die Zeitung Klió, die er bald zum vornehmsten Organ der griechischen Presse erhob. — Im Jahre 1883 liess er die Klió eingehen, um mehr Zeit für seine gelehrten Stu-

dien zu gewinnen. Doch hatte er auch später noch Gelegenheit, seine grosse journalistische Begabung zu bethätigen; er war bis zu seinem Tode der treueste Mitarbeiter einer neu gegründeten griechischen Zeitschrift, der Néa Iméra.

Obschon Thereianós nie eine Universität besuchte, ist er auf dem Gebiete der Wissenschaft nicht minder thätig gewesen, als auf dem Felde der Journalistik. Von früher Jugend an benützte er die kärgliche Musse, die ihm seine Berufsthätigkeit gewährte, zur Erlernung der wichtigsten modernen Sprachen und zu gründlichen Studien auf dem Gebiete der altgriechischen, byzantinischen und neugriechischen Philologie. Die erste wissenschaftliche Schrift, mit welcher Thereianós an die Oeffentlichkeit trat, war eine Untersuchung über die homerische Frage (1866). Zu grösseren Arbeiten fand er erst Zeit als er von den Redaktionsgeschäften befreit war.

Nun aber folgten rasch mehrere Werke aufeinander. Im Jahre 1885 veröffentlichte er eine Sammlung verschiedener Abhandlungen unter dem Titel „Philologische Skizzen". Vier Jahre später erschien die dreibändige Biographie des Begründers der neugriechischen Literatur, Adamantios Korais, ein Werk, das ebenso durch umfassende Kenntnisse als auch durch scharfes Urtheil ausgezeichnet ist. Im Jahre 1892 veröffentlichte Thereianós einen „Abriss der stoischen Philosophie", ein Buch, das in der Fachliteratur nicht minder als die Biographie des Korais anerkannt wurde, welches Buch ihm auch eine äussere Ehrung brachte. Die griechische Regierung forderte den Verfasser auf, den Lehrstuhl für Geschichte der Philosophie an der Universität Athen zu übernehmen; doch hat Thereianós den Ruf abgelehnt. In den letzten Jahren seines Lebens sammelte er Material für zwei Werke, die er leider nicht vollenden konnte, für eine Darstellung der Person und Thätigkeit des Demosthenes und für eine Untersuchung über das Wesen des Bilderstreites.

Ausserdem hat Thereianós zahllose kleinere Arbeiten in den Zeitungen Klió und Néa Iméra veröffentlicht. Durch diese bescheidenen Zeitungsartikel, in welchen er über die bedeu-

tendsten Erscheinungen auf dem Gebiete der griechischen Philologie Bericht erstattete, hat er eine unberechenbare, fruchtbringende Wirkung auf die Bildung seines Volkes ausgeübt. Seine letztere grössere Publikation war eine sehr eingehende, durch gründliche Sachkenntniss ausgezeichnete Besprechung der zweiteu Auflage der Geschichte der byzantinischen Literatur K. Krumbacher's, unseres hochverdienten Kollegen.

Nach kurzer Krankheit starb der unermüdliche edle Mann am 15. März 1897 — also gerade heute vor einem Jahre, ein herrliches Zeugniss seiner idealen Gesinnung und seiner tiefen Einsicht in seinem Testamente niederlegend, das einen würdigen Abschluss dieses der Wahrheit und Wissenschaft gewidmeten Lebens bildet. Der Thereinós-Fond ist für den Dahingeschiedenen ein unvergängliches Denkmal, ein Monumentum aere perennius.

Aus dem seit 1877 bestehenden Zographos-Fond hat die k. Akademie auf Anregung der philosophisch-philologischen Klasse im Jahre 1895 einen Preis von 1500 Mark für „Neue textkritische Ausgabe der Werke des Historikers Prokop mit Einschluss der Geheimgeschichte auf Grund der besten Handschriften“ ausgesetzt. Eine Bearbeitung mit dem Motto „Die Nachwelt hat sich Glück zu wünschen etc.“ ist rechtzeitig eingelaufen. Der Verfasser Dr. Jakob Haury, Gymnasiallehrer am k. Wilhelmsgymnasium in München, erhielt den Preis.

Als neue Preisaufgabe mit dem Einlieferungstermin 31. Dezember 1900 mit einem Preis von 1500 Mark ist gestellt: „Abfassung eines Lexikons der byzantinischen Familiennamen mit einer Untersuchung der historischen Entwicklung ihrer Form und Bedeutung“.

Aus den Zinsen der Münchener Bürger-Stiftung und der Cramer-Klett-Stiftung werden in diesem Jahre zwei wichtige Forschungen, von der mathematisch-physikalischen Klasse beantragt, unterstützt werden. Herr Dr. Ernst Weinschenk, Privatdozent an der Universität, hat in den letzten Jahren ausgedehnte Untersuchungen über Gesteine und Lagerstätten

nutzbarer Mineralien in Bayern ausgeführt: er wird nun unter Konservator Groth's Leitung dieselben in benachbarten Gebieten, im Taunus, in der Monterosagruppe, in den piemontesischen Alpen und in der Montblancgruppe fortsetzen und Vergleichsmaterial sammeln, was unserer geologischen und mineralogischen Sammlung zugute kommen wird.

Die Konservatoren von Kupffer und Hertwig beantragten im Interesse der anatomischen Anstalt und des zoologischen Instituts, embryologische und systematische Forschungen über bestimmte Meerthiere durchzuführen, behufs welcher Herr Dr. Franz Doflein, Assistent des zoologischen Instituts, sich nach den Antillen, nach Mexiko und Kalifornien begeben wird, um das nöthige Untersuchungsmaterial aufzusammeln und hieher zu bringen.

Konservator Göbel beabsichtigt im Interesse des botanischen Instituts höchst werthvolles Material aus Java und Australien zu gewinnen und konnte ihm hiefür ein Beitrag aus Renten der Akademie in Aussicht gestellt werden.

Das mit der Akademie der Wissenschaften verbundene Generalkonservatorium der wissenschaftlichen Sammlungen des Staates hat auch im abgelaufenen Jahre wieder werthvolle Geschenke von Privaten erhalten. Ich habe bereits in meiner Ansprache gelegentlich der Festsitzung am 15. November 1897 zu Ehren unseres allverehrten Protektors Sr. Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser, hervorgehoben, wie wichtig es sei, dass unsere mathematisch-physikalische Sammlung auch ein historisches Museum werde, um ein vollständiges und getreues Bild der physikalischen Forschungen bayrischer Gelehrter und der Thätigkeit bayrischer Werkstätten für wissenschaftliche Instrumente zu liefern. Die Idee dazu ging von Herrn Dr. Ernst Voit, Professor der angewandten Physik an der hiesigen Technischen Hochschule, aus und es gelang, zunächst Herrn Rentier Sigmund Ritter von Merz anzuregen, das weltberühmte Original-Spektrometer von Fraunhofer, sowie Manuskripte von Fraunhofer's Abhandlungen und eine Kollektion Fraunhofer-Glasprismen

grossmüthig zu schenken. Dieses Spektroskop ist das Instrument, welches jüngst auch Gegenstand eines im hiesigen Kunstverein viel bewunderten grossen Oelgemäldes von Herrn Professor Rudolf Wimmer war, auf welchem dargestellt ist, wie der junge Fraunhofer seine Erfindung Utzschneider und Reichenbach demonstrirt, welche beide wirklich spornstreichs von München nach Benediktbeuren geritten waren, um in der dortigen optischen Anstalt das merkwürdige Instrument zu besichtigen, mit dem es gelang, das Licht in seine einzelnen Theile zu zerlegen.

Dem Beispiele des Herrn von Merz, der bekanntlich ein Nachfolger Fraunhofer's in der optischen Anstalt geworden, folgte nun auch ein Urenkel des geheimen Rathes von Utzschneider, Herr Adalbert Knorr, Hauptmann a. D. und Rechnungsrath im k. Kriegsministerium dahier. Utzschneider war ja bekanntlich der erfolgreiche Protektor und Mitarbeiter von Fraunhofer und Reichenbach und ihm hat die bayrische Industrie überhaupt in mehreren Richtungen einen wesentlichen Aufschwung zu danken. Herr Hauptmann Knorr schenkte aus dem Nachlass seines Urgrossvaters für die historische Abtheilung der mathematisch-physikalischen Sammlung ein Mikroskop von Fraunhofer, eine Camera lucida, zwei Handfernrohre und einen grösseren Tubus von Fraunhofer, ferner eine Medaille, Utzschneider zu Ehren geprägt, sowie Porträte von Utzschneider und Schiegg und schriftliche Aufzeichnungen mit höchst werthvollen Mittheilungen über Glasfabrikation und Berechnung von Objektiven.

Frau Stadtbaurath Preisser in Landshut, eine Tochter des rühmlich bekannten Mechanikers Liebherr, schenkte aus dem Nachlass ihres Vaters eine Mappe mit Zeichnungen von Instrumenten von J. Liebherr, Mahler und Fraunhofer aus den Utzschneider-Fraunhofer'schen und Utzschneider-Reichenbach'schen Instituten, sowie das Porträt von B. Liebherr.

Für das k. Münzkabinet schenkten die Herren Kommerzienrath Anton Seidl, Architekt, und Professor Emanuel Seidl und Architekt und Professor Gabriel Seidl eine schöne Kollektion

von altrömischen Schwermünzen (aes grave), wodurch diese Abtheilung des Münzkabinets mit dem bereits darin Vorhandenen zu einer hervorragend interessanten geworden ist.

Für die anthropologisch-prähistorische Sammlung schenkte unser Mitglied Professor Emil Selenka seine grosse Sammlung von Schädeln von sogenannten Menschenaffen, 220 Schädel von Orangutans und 65 Schädel des Gibbon.

Für das pflanzenphysiologische Institut, beziehungsweise für das Kryptogamen-Herbarium, schenkte Herr Dr. Melchior Treub, Direktor der vereinigten kolländischen wissenschaftlichen botanischen Anstalten in Buitenzorg auf Java, eine sehr werthvolle Sammlung von mehr als 500 Exemplaren javanischer Farne.

Das Wachsthum unserer Staatssammlungen zu sehen ist sehr erfreulich und wir hoffen auf deren stetiges Fortschreiten, welches auch von unserer Staatsregierung möglichst unterstützt wird. Für die historische Abtheilung der mathematisch-physikalischen Sammlung hoffen wir bald auch die berühmte Kreistheilmaschine von Reichenbach zu erhalten, für deren Erwerbung das k. Staatsministerium für Kirchen- und Schulangelegenheiten an den zur Zeit tagenden bayrischen Landtag ein Nachtragspostulat eingebracht hat.

Die verschiedenen Attribute des Generalkonservatoriums sind zur Zeit in dem sogenannten Wilhelminischen Gebäude nothdürftig untergebracht. Das Bedürfniss nach weiteren Räumen macht sich von Jahr zu Jahr fühlbarer. Insbesondere bedarf die zoologische Sammlung dringend weiterer Räume, wenn ein altes Desiderat, die Aufstellung einer bayrischen Landesfauna und einer zoologischen Lehrsammlung verwirklicht werden soll.

Schon vor zwei Jahren hatte das Generalkonservatorium bei dem vorgesetzten k. Staatsministerium angeregt, es möchten zu diesem Zwecke der zoologischen Sammlung die an diese Sammlung anstossenden, dermalen von der mathematisch-physikalischen Sammlung eingenommenen Räume überwiesen und für letztere Sammlung anderweitiger Ersatz geschaffen werden.

Als im vorigen Jahre das neue Justizgebäude bezogen und dadurch ein grösserer Theil der bisher von der Justizverwaltung benützten Räume in dem an der Maxburgstrasse gelegenen Flügel des Wilhelminischen Gebäudes frei wurde, sah sich das k. Generalkonservatorium veranlasst, auf diese Frage zurückzukommen.

Darauf ging uns mit Ministerialentschliessung vom 16. Juli 1897 die erfreuliche Mittheilung zu, dass die bisherigen Räume des Oberlandesgerichts München im zweiten Stocke des Wilhelminischen Gebäudes an der Maxburgstrasse nach Uebereinkommen der betheiligten k. Staatsministerien dem Kultusministerium für Zwecke der Staatssammlungen unter gewissen Modalitäten überlassen seien.

Damit war ein erster Schritt zur Verbesserung der damaligen unzulänglichen Raumverhältnisse geschehen. Wir verdanken dieses dem lebhaften Interesse, welches der Chef der bayerischen Unterrichtsverwaltung, Seine Excellenz der Herr Staatsminister Dr. von Landmann unserer Angelegenheit entgegenbringt und ich erfülle nur eine angenehme Pflicht, wenn ich heute diesem unserem Danke auch öffentlichen Ausdruck gebe.

Freilich sind noch nicht alle Schwierigkeiten beseitigt. Die Ueberlassung der bezeichneten Räume für Zwecke der Staatssammlungen erfolgte nicht endgiltig, sondern mit dem Vorbehalte, dass sie an die Justizverwaltung zurückgegeben werden sollen, wenn diese sie wieder für ihre eigenen Zwecke benöthiget. Und wenn es anfänglich schien und wir uns gerne der Hoffnung hingaben, dass wir wenigstens für absehbare Zeit dort Unterkommen finden würden, so ist dies neuerdings wieder zweifelhaft geworden; denn es verlautet, dass die Justizverwaltung möglicher Weise sehr bald und früher, als sie selbst annahm, in die Lage kommen werde, die fraglichen Räume wieder für ihre eigenen Bedürfnisse in Anspruch nehmen zu müssen.

Aber auch wenn dies sich so verhalten sollte, möchten wir unsere Hoffnung auf Besserung der Verhältnisse nicht sinken

lassen. Wir vertrauen auf die bewährte Einsicht der k. Staatsregierung und die übrigen betheiligten Faktoren, dass Mittel und Wege gefunden werden, den Bedürfnissen unserer Sammlungen gerecht zu werden.

Das Einfachste wäre, wenn das ganze Wilhelminische Gebäude den im Generalkonservatorium vertretenen Staatssammlungen eingeräumt, und wenn das nicht möglich ist, wenn dann ein den Zwecken des Generalkonservatoriums entsprechender Neubau aufgeführt würde. Aber dass das eine oder das andere geschieht, ist eine Lebensfrage der wissenschaftlichen Staatssammlungen.

An dem heutigen akademischen Festtage ist es auch üblich, der im Laufe des Jahres verstorbenen Mitglieder zu gedenken, worüber die Herren Classensekretäre vortragen werden. Die historische Classe verlor ein Mitglied, welches auch mit dem Präsidium und dem Generalkonservatorium in innigster Beziehung stand. Professor Dr. Max Lossen war auch Sekretär der Akademie. Ich will dem Berichte des Herrn Classensekretärs über den Historiker Lossen nicht vorgreifen, aber fühle mich verpflichtet, meinerseits hervorzuheben, dass der Verstorbene nicht bloss ein gründlicher Gelehrter, sondern zugleich auch ein vorzüglicher Beamter und Geschäftsmann war, der die zahlreichen, vielseitigen Beziehungen des Sekretariats trefflich geordnet und musterhaft gestaltet hat.

---

Darauf theilte der Classensekretär, Herr C. v. Voit, die Verluste mit, welche die mathematisch-physikalische Classe in dem vergangenen Jahre erlitten hat; es sind ihr durch den Tod elf Mitglieder entrissen worden, nämlich: zwei einheimische ordentliche Mitglieder, Ludwig Andreas Buchner und Leonhard Sohncke; ferner neun auswärtige und correspondirende Mitglieder: der Mathematiker Francesco Brioschi in Mailand, die Chemiker Karl Remigius Fresenius in Wiesbaden und

Victor Meyer in Heidelberg, der Physiologe Rudolf Heidenhain in Breslau, die Zoologen Rudolf Leuckart in Leipzig und Johann Japetus Steenstrup in Kopenhagen, der Botaniker Julius v. Sachs in Würzburg, der Paläontologe Edward Cope in Philadelphia und der Mineraloge Alfred Ludwig Prosper Descloizeaux in Paris.

## Ludwig Andreas Buchner.

Am 23. Oktober 1897 ist das älteste Mitglied unserer Classe, zugleich der Senior der Gesammtakademie, Ludwig Andreas Buchner, im hohen Alter von 84 Jahren aus dem Leben geschieden. Er gehörte seit dem Jahre 1846 der Akademie an und er hat seitdem wohl bei keiner ihrer Sitzungen gefehlt. Man war so sehr gewohnt, den rüstigen liebenswürdigen Greis, der uns an eine längst vergangene Zeit der Akademie, in welcher noch Fuchs, Martius, Steinheil thätig waren, erinnerte, stets an der gleichen Stelle, aufmerksam den Verhandlungen folgend, zu sehen, dass wir ihn schmerzlichst in unserem Kreise vermissen.

Buchner hat zahlreiche Untersuchungen auf dem Gebiete der Chemie und Pharmazie gemacht; seine Arbeiten haben der Wissenschaft zwar keine neuen Bahnen gewiesen, aber es finden sich darin viele gute Beobachtungen und werthvolle Thatsachen, welche das Wissen förderten.

Der Lebensgang Ludwig Andreas Buchner's war ganz wesentlich bestimmt durch das Vorbild seines Vaters Johann Andreas Buchner, des verdienten, ebenfalls unserer Akademie angehörigen Pharmazeuten; ihm hat der Sohn bei der 16. Generalversammlung des Deutschen Apothekervereins zu München am 31. August 1887 zur Erinnerung an seinen 104. Geburtstag pietätvolle Worte gewidmet.

Der Vater Buchner, der Sohn einfacher Gärtnersleute dahier, hatte seine Ausbildung besonders in dem pharmazeutischen Institute des ausgezeichneten Chemikers und Pharmakologen Johann Bartholomäus Tromsdorff in Erfurt erhalten,

war dann Oberapotheker der Centralapotheke des allgemeinen Krankenhauses dahier geworden, wo der strebsame Mann trotz seiner vielfachen Amtsgeschäfte — er musste bei den täglichen Krankenbesuchen der Aerzte zur Aufnahme der Ordination anwesend sein — die Zeit zu wissenschaftlichen Untersuchungen erübrigte. Er hatte sich dadurch, sowie durch die Gründung des angesehenen Repertoriums für die Pharmazie, welches er während 36 Jahren redigirte und das geradezu die Geschichte der Pharmazie während dieses Zeitraums enthält, so tüchtig erwiesen, dass man ihn nach dem Tode des Professors der Arzneimittellehre Bertele an der Universität Landshut zum ausserordentlichen Professor der Pharmazie in der dortigen medizinischen Fakultät erwählte. In Folge eines Rufes nach Freiburg im Breisgau wurde er bald ordentlicher Professor der Pharmazie, nachdem ihn vorher die medizinische Fakultät der neu gegründeten Universität zu Bonn bei der Feier ihrer ersten Doktorpromotion zum Doktor der Medizin ernannt hatte. Mit der Uebersiedlung der Universität von Landshut nach München kam er hierher, musste sich aber noch längere Zeit kümmerlich behelfen, bis ihm endlich ein für damals genügendes Laboratorium eingeräumt wurde.

Von seinen wissenschaftlichen Arbeiten sind mehrere von Bedeutung geworden. Bei der Untersuchung des Bergöls von Tegernsee, des sogenannten St. Quirinöls, beschrieb er einen darin gelösten, in der Kälte sich in festem Zustande abscheidenden Stoff als Bergfett, welcher Kohlenwasserstoff sich als identisch mit dem später von Reichenbach aus dem Theer gewonnenen, jetzt allbekannten und viel verwendeten Paraffin erwies. Er hatte ferner aus dem Extrakte der Weidenrinde einen in nadelförmigen Krystallen sich ausscheidenden, intensiv bitteren Stoff erhalten, den er Salicin nannte; dieses Salicin ist später von dem italienischen Chemiker Piria in seine zwei Componenten, in Zucker und in Saligenin, zerlegt und so als erstes Glied der interessanten Gruppe der Glucoside erkannt worden; dem Salicin entstammt die für die theoretische Chemie und durch die praktische Anwendung so wichtig gewordene

Salicylsäure. Auch die Entdeckung des Berberins, eines in gelben seidenglänzenden Nadeln krystallisirenden Bitterstoffs, einer stickstoffhaltigen Pflanzenbase, in der Wurzelrinde und in dem Holze von Berberis vulgaris oder des Sauerdorns hat seinen Namen bekannt gemacht.

Buchner hat durch diese seine Thätigkeit die wissenschaftliche Entwicklung der Pharmazie sehr gefördert, so dass Pettenkofer an seinem Grabe, in Zusammenfassung seines Wirkens, aussprechen konnte: er habe die Idee verfolgt, das Apothekergewerbe durch strenge Wissenschaftlichkeit in seinen Grundlagen zu adeln. Diesem vortrefflichen, bescheiden nur für die Wissenschaft lebenden, für seine Schüler liebevoll besorgten Vater eiferte der Sohn nach; er ward sein bester Schüler, lernte von ihm den emsigen Fleiss und die Liebe zur Wissenschaft, so dass er die von ihm hinterlassene Erbschaft an der Universität mit vollem Fug und Recht anzutreten vermochte.

Ludwig Andreas Buchner wurde am 13. Juli 1813 in München geboren. In Landshut begann er die Gymnasialstudien und setzte sie in München fort, aber nur bis zur zweiten Gymnasialklasse, um sich dann der praktischen Pharmazie zu widmen; der Entschluss zur wissenschaftlichen und akademischen Laufbahn erwuchs erst später aus den Erfolgen seiner Studien. Er machte zunächst eine dreijährige Lehrzeit bei dem trefflichen Apotheker Bachmann in der Mohren-Apotheke in Nürnberg durch, verblieb daselbst noch ein halbes Jahr als Gehilfe und trat dann für $1^1/_2$ Jahre in die Oberlin'sche Apotheke in Strassburg im Elsass ein, woselbst er seine erste wissenschaftliche Arbeit: „Versuche über das Verhalten chemischer Stoffe zu Reagentien bei verschiedenen Graden von Verdünnung, sowie über die Grenzen der Wahrnehmbarkeit chemischer Reaktionen“ zur Lösung einer von dem Verein studirender Pharmazeuten in München gegebenen Preisaufgabe ausführte, welche Arbeit mit dem ersten Preise belohnt wurde. Von Strassburg aus wanderte er nach Paris, um in der höheren pharmazeutischen Schule, an welcher damals als Direktor

Robiquet und als Professor der Chemie Bussy angestellt war, seine Kenntnisse zu erweitern; der Letztere verwendete ihn, seine Tüchtigkeit erkennend, bald als Privatassistent bei seinen organisch-chemischen Untersuchungen. Dabei versäumte er jedoch nicht, die Vorlesungen der beiden berühmten Chemiker, von Gay-Lussac, dem Lehrer Liebig's, und von Chevreul, dem Entdecker der Constitution der Fette, zu hören; öfter erzählte er später über die durch sie erhaltenen Eindrücke.

Nach der Rückkehr in die Heimath schrieb er sich als Candidat der Pharmazie an der Universität ein, um die pharmazeutische Approbationsprüfung zu machen; schon nach zwei Semestern erhielt er, seiner vorzüglichen und längeren Ausbildung halber, unter Dispens von den übrigen beiden Semestern die Zulassung zu der Prüfung, welche er mit der Note der ausgezeichneten Befähigung bestand. Er wurde hierauf Assistent am pharmazeutischen Institut der Universität bei seinem Vater. Aber der strebsame Jüngling hatte mittlerweile höhere Ziele ins Auge gefasst; er benützte jede freie Zeit zur Vorbereitung auf die Maturitätsprüfung, der er sich nach zwei Jahren mit Erfolg unterzog. Jetzt erst konnte er sich als Candidat der Philosophie an der Universität immatrikuliren und mit der Dissertation: „Betrachtungen über die isomerischen Körper sowie über die Ursachen der Isomerie“ den Grad eines Doktors der Philosophie erlangen. Da dazumal die Pharmazie noch ein Fach der medizinischen Fakultät war, so setzte er das inzwischen schon begonnene Studium der Medizin fort und wurde nach Vollendung desselben zum Doktor der gesammten Medizin promovirt, wozu er eine Dissertation: „Neue chemische Untersuchung der Angelikawurzel“ vorgelegt hatte, welche Wurzel unter dem Namen „Engelwurz“ als beliebtes Hausmittel in Gebirgsgegenden gebräuchlich ist; er entdeckte darin eine neue zur Oelsäurereihe gehörige, flüchtige, schön krystallisirende Säure, die Angelikasäure und daneben ein krystallisirbares Harz, das Angelicin. Nun folgte die Habilitation als Privatdozent für physiologische und pathologische Chemie an der medizinischen Fakultät, wozu er als Probeschrift eine

Abhandlung: „Dissertatio medico-chemica de aqua salsa Rosenheimensi“ verfasst hatte.

Bevor er seine Lehrthätigkeit begann, begab er sich, in Erfüllung eines länger gehegten Wunsches, auf ein Semester nach Giessen, wo damals Liebig begeisterte Schüler aus allen Ländern um sich versammelt hatte. Er hielt darauf Vorlesungen über physiologische und pathologische Chemie, über analytische Chemie für Pharmazeuten und leitete die Uebungen im pharmazeutisch-chemischen Laboratorium. Nachdem er mit Hilfe eines Staatsstipendiums nochmals Giessen besucht und die chemischen Laboratorien von Göttingen, Berlin, Leipzig und Wien gesehen hatte, erhielt er die Anstellung als ausserordentlicher Professor an der medizinischen Fakultät mit dem Auftrage, die pathologisch-chemischen Untersuchungen an den drei Kliniken vorzunehmen. Als der Vater starb, konnte kein besserer an seine Stelle als ordentlicher Professor der Pharmazie an der medizinischen Fakultät gewählt werden wie sein Sohn.

An dieser Stelle wirkte er vierzig Jahre lang in unermüdlicher Thätigkeit, lehrend und forschend. Er fasste seine Aufgabe als Vertreter der Pharmazie an der Universität ernst auf und seine Schüler, für die er stets väterlich besorgt war, fühlten, wie gut er es mit ihnen meinte und dass sein eifrigstes Bestreben war, ihnen die richtigen Kenntnisse für ihren wichtigen Beruf beizubringen. Bei seiner grossen Gründlichkeit, seinen umfassenden Kenntnissen und Erfahrungen war er ein guter Lehrer, wie die Anhänglichkeit und Hochachtung bezeugt, welche die vielen von ihm ausgebildeten tüchtigen Pharmazeuten ihm, dem Vater Buchner, entgegen brachten. Man könnte ihm höchstens den Vorwurf machen, zuweilen allzu nachsichtig gegen seine Schüler gewesen zu sein. Allerdings hörte man später hie und da sagen, sein Laboratorium wäre veraltet und entspreche nicht mehr den Fortschritten der Zeit, aber solche Tadler wussten nicht, wie oft es Buchner früher vergebens versucht hat, Mittel für Verbesserung des Laboratoriums und für neue Apparate zu bekommen.

Ausser seinem Lehramt hatte er als Mitglied des Medizinal-Comité's an der hiesigen Universität die gerichtlich-chemischen Untersuchungen zu machen, die er mit unübertroffener Gewissenhaftigkeit ausführte und mit überzeugender Klarheit vor dem Schwurgerichte vertrat. Wie oft hing hierbei von seiner Geschicklichkeit die Entscheidung über Leben und Tod ab; häufig ist er in das physiologische Institut gekommen, um die erhaltenen Extrakte durch den Versuch am Thier auf giftige Stoffe zu prüfen. Auch im Obermedizinal-Ausschusse, wo ihm die oft recht verwickelten Referate über die Verleihung der Apotheken übertragen waren, übte er durch seine Unparteilichkeit und Sachkenntniss eine gedeihliche Wirksamkeit aus.

Die wissenschaftlichen Arbeiten Buchner's verfolgten besonders diejenige Richtung in der Chemie, welche man die medizinisch-pharmazeutische nennen könnte. Es sollen hier nur einige derselben hervorgehoben werden, um ein Bild seiner Bedeutung für die Chemie zu geben.

Eine seiner ersten Veröffentlichungen war die „sehr gründliche" Untersuchung, wie sie in Liebig's Annalen genannt wird, über die wechselseitige Wirkung des Schwefelwasserstoffs auf die Carbonate der Alkalien und alkalischen Erden, sowie über die der Kohlensäure auf Sulfhydrate, welche unsere Kenntnisse über die sogenannten chemischen Massenwirkungen beträchtlich erweiterten.

Durch seine Untersuchungen zahlreicher Pflanzen und Pflanzentheile bereicherte Buchner die organische Chemie mit einigen neuen interessanten Stoffen.

Von der Entdeckung der Angelikasäure ist vorher schon die Rede gewesen.

Er war ferner der Erste, welcher die in dem giftigen Eisenhut enthaltene, an Kalk gebundene Säure, die Akonitsäure einer genaueren Prüfung unterwarf, wobei er fand, dass sie zwar dieselbe Zusammensetzung besitze wie die bei der trockenen Destillation von Aepfelsäure entstehende Fumarsäure und Maleinsäure, dass sie aber dennoch in ihren Eigenschaften von diesen Säuren so sehr abweiche, dass man sie als eine

besondere Säure ansehen müsste. Diese Arbeit Buchner's erregte die besondere Aufmerksamkeit von Berzelius, welcher sie als Anhaltspunkt bei der Untersuchung einer beim Erhitzen der Citronensäure entstehenden Säure benutzte, wobei er sich von der Identität dieser Säure mit der Aconitsäure überzeugte.

Aus der Rinde des Faulbaums (Rhamnus Frangula) isolirte er einen sehr schönen sublimirbaren Farbstoff, das Rhamnoxanthin oder Frangulin und später noch einen rothen, dem Alizarin ähnlichen, ebenfalls sublimirbaren Farbstoff.

Mehrere ätherische Oele und verwandte Stoffe wurden von ihm und seinen Schülern genau untersucht und beschrieben, so dasjenige von Pinus Pumilio Haenke, der sogenannten Latsche, ferner das ätherische Oel aus den Früchten der zu den Fichten gehörigen Abies Reginae Amaliae, und der Porst-Campher, welcher aus dem ätherischen Oele von Ledum palustre, dem zu der Erikagruppe gehörigen Porst herauskrystallisirt.

Von besonderem chemischem und pflanzenphysiologischem Interesse sind seine Beobachtungen über die Bildung der salicyligen Säure in den Blüthen der Spierstaude, der Spiraea Ulmaria, welche uns das Entstehen mancher aromatischer Pflanzenstoffe durch Oxydation erklären. Er hat zuerst erkannt, dass das ätherische, aromatisch riechende Oel der Blüthen der Spiräa-Arten identisch mit der, jetzt Salicyl-Aldehyd genannten, salicyligen Säure ist, welche man auch durch Oxydation des vorher erwähnten Salicins und Saligenins erhalten kann. Und er that dann durch überzeugende Versuche dar, dass in den Knospen der genannten Blüthen eine Salicylverbindung vorkommt, aus welcher durch die oxydirende Wirkung der Chromsäure eben so gut das flüchtige Oel der Spiraea entwickelt werden kann wie durch den Vegetationsprocess.

Von chemischen Verbindungen, welche Buchner zuerst dargestellt und analysirt hat, sei der Ammoniak-Brechweinstein namhaft gemacht, welches Salz dem gewöhnlichen (Kali-) Brechweinstein isomorph ist.

Von Bedeutung sind die Abhandlungen über Gährungs- und Verwesungserscheinungen von im Thierkörper vorkommen-

den organischen Stoffen. Anknüpfend an eine unter seiner Leitung von Herrn v. Gorup-Besanez unternommene Arbeit über die Galle, verfolgte Buchner die Veränderungen, welche das bei der Fäulniss der Galle aus der Taurocholsäure frei gewordene schwefelhaltige Taurin bei weiterer Fäulniss erleidet; er wies nach, dass dieser schöne Körper, welchen man für einen der unveränderlichsten der organischen Chemie gehalten hat, zu den gährungsfähigen Stoffen gezählt werden muss, und ermittelte genau die Bedingungen und die Art seiner Veränderungen unter solchen Verhältnissen. Auch noch zwei weitere Arten der Gährung, die der im Harn der pflanzenfressenden Säugethiere vorkommenden Hippursäure und die des Glykokolls, welches mit der Benzoesäure ein Component der Hippursäure ist und auch aus dem Leim durch Zersetzung mit Säuren dargestellt werden kann, werden in diesen Abhandlungen beschrieben. Ueberhaupt bieten diese an neuen Thatsachen reichen Arbeiten einen wichtigen Beitrag zur Kenntniss eines der wichtigsten Kapitel der organischen Chemie.

Ein nicht zu unterschätzendes Verdienst hat sich weiterhin Buchner um die Kenntniss einer Anzahl von Mineralwässern durch sorgfältige Analysen derselben erworben. Er hat das Brom in der jodhaltigen Adelheidsquelle zu Heilbrunn aufgefunden, und das Vorkommen von Jod in anderen Wässern wie in Sulzbrunn im Kemptener Wald, in Hall in Oberösterreich, in Wildegg in der Schweiz nachgewiesen; auch ermittelte er die Zusammensetzung unserer oberbayerischen Salzsoolen in Reichenhall und Rosenheim nach den neueren analytischen Methoden. Er untersuchte ferner das Wasser der Schwefelquelle zu Oberdorf im Allgäu und dasjenige der eisenhaltigen Schwefelquelle zu Neumarkt in der Oberpfalz; in der Abhandlung über letztere Untersuchung sind interessante Beobachtungen über die Bildung des kohlensauren Eisenoxyduls und des Schwefelwasserstoffes in derartigen Quellen mitgetheilt. Das Münchener Wasser hat er zwei Male zum Gegenstande eines eingehenden Studiums gemacht, wobei er in demselben Jod und Brom nachweisen konnte, indem er sich in sinnreicher

Weise grösserer Mengen Kesselsteins bediente; es ist dieser Nachweis von Bedeutung, nachdem wir jetzt durch Baumann's glänzende Entdeckung wissen, dass das Jod in dem Jodothyrin der Schilddrüse zu den normalen Stoffen des thierischen Organismus gehört und es daher wichtig geworden ist zu erfahren, auf welchen Wegen es in denselben gelangt.

Bei den gerichtlich-chemischen Untersuchungen hatte er vielfach Gelegenheit, die Methoden des Nachweises giftiger Stoffe auszubilden und bemerkenswerthe neue Beobachtungen für forense Chemie und Medizin zu machen. Es gehören hierher seine Abhandlungen über Arsenreduktion bei gerichtlich-chemischen Fällen, über die Arsenik-Ausmittlung, über die Anwendung der Dialyse zu gerichtlich-chemischer Ausmittlung der arsenigen Säure, über die Bildung von Schwefel-Arsenik in den Leichen mit arseniger Säure Vergifteten, über eine Vergiftung mit ätzendem Quecksilbersublimat, über Vergiftung durch ätzende Säuren und deren chemischer Ausmittelung, über Vergiftungen durch Morphium und deren chemische Ausmittelung, über die Beschaffenheit des Blutes nach einer Vergiftung mit Blausäure.

Es dürfen ferner auch Buchner's Bemühungen, wissenschaftliche Prinzipien für die Praxis nutzbar zu machen, nicht unerwähnt bleiben. Ihnen verdankt man eine Arbeit über das pyrophosphorsaure Eisenoxydnatron als Arzneimittel und eine leicht ausführbare Methode eine arsenhaltige Schwefelsäure von Arsenik zu befreien. Durch seine in den Abhandlungen der naturwissenschaftlich-technischen Commission der Akademie publizirte Arbeit über die Bereitung und Anwendung des Natronwasserglases, worin eine neue sehr praktische Methode zur Darstellung dieses nützlichen Produktes im Grossen beschrieben ist, hat Buchner auf den Dank der Technik Anspruch zu machen, für welche er schon in früheren Jahren durch seine mit zahlreichen Anmerkungen und Zusätzen versehene Uebersetzung der drei letzten Bände des grossen Werkes von Dumas: „Traité de Chimie appliquée aux arts“ ein lebhaftes Interesse an den Tag gelegt.

Endlich ist der Fortführung des neuen Repertoriums für Pharmazie, welches er nach dem Tode seines Vaters während 25 Jahren leitete, sowie der Herausgabe seines grossen Commentars zur Pharmacopoea Germanica in zwei Bänden zu gedenken.

Diese seine Arbeiten sichern ihm wie seinem Vater eine ehrenvolle Stellung in der Geschichte der Pharmazie.

Buchner hat ein arbeitsreiches, gesegnetes Leben geführt; in stiller Thätigkeit suchte er innere Befriedigung. Die Erfüllung der Pflicht gieng ihm über Alles und noch wenige Tage vor seinem Tode trug er, fast als Sterbender, ein musterhaftes Gutachten im Obermedizinalausschusse vor; ja er war getreu bis in den Tod.

Körperlich und geistig rüstig und frisch bis ins hohe Alter, bewahrte er sich eine jugendliche Heiterkeit und eine Lebensauffassung, die das Gute in Allem herausfand. Bei einer Feier, bei welcher sein glückliches Alter gepriesen ward, äusserte er sich in charakteristischer Weise: alt werden ist nicht schwer, aber alt werden und jung bleiben, das ist nicht so leicht.

Was wir aber noch besonders an ihm schätzten, das ist, dass er einer der besten Menschen war, geliebt und verehrt von Allen, die ihn kannten, wegen seiner Freundlichkeit, seiner Güte, seiner Milde und seiner Treue. Niemals hat er Jemandem etwas zu Leide gethan. Darum werden wir auch den guten Collegen Buchner nicht vergessen und ihm ein ehrendes Andenken bewahren.

## Leonhard Sohncke.[1])

Das zweite ordentliche Mitglied, welches die mathematisch-physikalische Klasse im vergangenen Jahre (am 2. November 1897) durch den Tod verloren hat, ist der Professor der Physik

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von S. Finsterwalder (Münchener Neueste Nachrichten vom 10. November 1897) und von S. Günther (Beilage zur Allgemeinen Zeitung vom 4. Dezember 1897).

an der technischen Hochschule, Leonhard Sohncke. Aber während es sich im ersten Falle um einen hochbetagten Greis handelte, der sein Tagewerk hienieden vollendet hatte und den wir ob seines freundlichen Geschickes glücklich preisen durften, betrauern wir hier voll Wehmuth einen Collegen, welcher noch mitten im kräftigsten Schaffen war und von dem die Wissenschaft noch so manche Förderung erwarten konnte.

Leonhard Sohncke wurde am 22. Februar des Jahres 1842 als der zweite Sohn des verdienten Professors der Mathematik an der Universität Halle, Ludwig Adolf Sohncke, geboren. Es ist ihm früh der Ernst des Lebens nahe getreten und er musste sich durch eigene Kraft emporarbeiten, denn bei dem kärglichen Gehalte war der Vater Sohncke's genöthiget, den Lebensunterhalt für seine Familie durch literarische Lohnarbeit, durch Uebersetzungen und dergleichen, zu verdienen. Und als bald der Vater starb, hinterliess er die Seinen in recht dürftigen Verhältnissen.

Aber der, nach dem grossen Mathematiker Leonhard Euler, Leonhard genannte Sohn wusste durch sein Talent und seinen Eifer die seiner Ausbildung entgegenstehenden Hindernisse zu besiegen. Auch ihm diente, wie so Vielen, das schwere Ringen um das tägliche Brod zum Glücke, indem es ihm die Liebe zur Arbeit und zur tieferen Erkenntniss lehrte. Nachdem er die Schulen der Franke'schen Stiftungen besucht und schon im 17. Lebensjahre das Gymnasium absolvirt hatte, bezog er die Universität seiner Vaterstadt, um sich dem Studium der Mathematik zu widmen, zu welchem er von früh an, dem Beispiel des Vaters folgend, eine besondere Neigung hatte.

An der Universität Halle waren seine Lehrer in der Mathematik Eduard Heine, der sich vornehmlich durch seine Arbeiten über die Kugelfunktionen bekannt gemacht hat, und dann der junge Karl Neumann, der Sohn des Begründers der theoretischen Physik in Deutschland, Franz Neumann in Königsberg, welcher sich kurz vorher in Halle habilitirt hatte. Sohncke musste darnach trachten, sich die Mittel für sein Studium und einen baldigen Verdienst zu verschaffen, wesshalb er sich auf die

Prüfung für das mathematische Lehramt in Mittelschulen vorbereitete. Inzwischen half ihm eine Stelle als Hilfsassistent an der mineralogischen Sammlung der Universität über die ersten Schwierigkeiten hinweg; noch am Gymnasium hatte er durch den Einfluss eines trefflichen Lehrers ein lebhaftes Interesse für die so anziehende Krystallographie gewonnen und nun konnte er an dem Mineralienkabinet seine Kenntnisse der Mineralien erweitern, was seinen späteren wissenschaftlichen Arbeiten eine bestimmte Richtung gab und ihnen von grösstem Nutzen war. Nachdem er im Alter von 20 Jahren die Lehramtsprüfung glänzend bestanden und noch in Halle mit der mathematischen Dissertation: „de aequatione differentiali seriei hypergeometricae“ promovirt hatte, begab er sich an die Universität Königsberg, um seine Studien fortzusetzen und das Probejahr abzuleisten, woselbst er auch nach drei Jahren die erste Anstellung als Gymnasiallehrer erhielt.

In Königsberg trieb er zuerst noch Mathematik bei Richelot, bald aber gewann der Physiker Franz Neumann, der so viele Jünger für sein Fach angeregt und begeistert hat, einen solchen Einfluss auf ihn, dass er sich ganz der theoretischen Physik zuwandte. Die dortige Schule war damals der Mittelpunkt der physikalischen Forschung in Deutschland; die bedeutendsten Mathematiker und Physiker sind aus ihr hervorgegangen. Es war ein günstiges Zusammentreffen, dass Neumann sich in hervorragender Weise mit der Erforschung der Krystallformen beschäftiget hatte und die Neigung seines Schülers Sohncke zur Krystallographie förderte.

Anfangs veröffentlichte er noch einige mathematische Abhandlungen: über regelmässige Polyeder und über die durch Umdrehung eines regelmässigen Vierecks um eine Diagonale entstehenden Gebilde; dann fing er aber an, in einem Winkel seiner Wohnung mit den bescheidensten Mitteln physikalische Untersuchungen zu machen, obwohl er an dem Gymnasium wöchentlich 22 Stunden Unterricht ertheilen musste. So entstand seine erste experimentell-physikalische Arbeit: „über die Kohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen

Richtungen", mit welcher er sich als Privatdozent für Physik an der Universität habilitirte.

Ein glücklicher Zufall brachte in seinen Lebenslauf eine entscheidende Wendung, die ihn ganz der Hochschule zuführte. Gustav Kirchhoff, der geistvolle Physiker an der Heidelberger Universität, ebenfalls ein Schüler Neumann's, sah bei einem Besuche in Königsberg den jungen Gelehrten und erkannte sein Talent. Er empfahl ihn, als durch den Tod Eisenlohr's die Professur der Physik an der polytechnischen Schule in Karlsruhe erlediget war. Sohncke erhielt den Ruf und erlangte dadurch einen weiten, lohnenden Wirkungskreis: er hatte die grosse Vorlesung über Experimentalphysik abzuhalten sowie die Vorlesung über theoretische Physik. Auch kam er in einen ihm zusagenden Kreis von Collegen, von denen er namentlich dem Mineralogen Knop und dem Vertreter der darstellenden Geometrie Chr. Wiener wegen der gleichen wissenschaftlichen Interessen näher trat.

Im Verkehr mit diesen beiden entstand sein bedeutendstes Werk: die Entwickelung einer neuen Theorie der Krystallstruktur. Es war dies der Anfang einer Reihe werthvoller Forschungen, durch welche er verschiedene Gebiete der physikalischen Wissenschaft, insbesondere der Krystallographie und der Optik, durch neue Thatsachen und fruchtbare Theorien bereichert hat.

Mit der Professur für Physik war damals noch die Leitung des badischen meteorologischen Dienstes verbunden; diese Nöthigung sich mit Fragen der Meteorologie zu befassen, führten ihn auf ein anderes Gebiet der Forschung, in dem er besonders durch eine Theorie der Gewitterelektrizität Bedeutendes leistete.

Bald verliess er Karlsruhe, um einem Rufe an die Universität Jena zu folgen; er wünschte von den lästigen meteorologischen Geschäften befreit zu werden. In Jena, wo er anfangs mit dem Ausbau und der inneren Einrichtung des neuen physikalischen Instituts beschäftiget war, verlebte er wohl die glücklichsten Tage; die freie Auffassung an dieser altberühmten schönen Stätte der Wissenschaft und das innige Zusammen-

leben mit einer Anzahl gleich gesinnter Collegen und Freunde entsprach ganz seinen Neigungen. Es wurde ihm daher, als er nach wenigen Jahren unter glänzenden Bedingungen an die aufblühende hiesige technische Hochschule gerufen wurde, der Entscheid recht schwer. Er sollte der Nachfolger des vortrefflichen Beetz werden, der die Sammlung und das Laboratorium musterhaft eingerichtet und geleitet hatte; er entschied sich für München und es hat dieser Entschluss ihm und der Hochschule nur zum Besten gereicht. Er hielt die Vorlesung über Experimentalphysik mit steigendem Erfolge, denn er war ein gewissenhafter Lehrer, der in klarem, ernstem Vortrage, unterstützt durch die richtigen Versuche, sein Bestes gab. Die Uebungen im Laboratorium, an welchen sich zahlreiche Schüler betheiligten, waren so eingerichtet, dass Jeder die Naturerscheinungen genau beobachten und messend verfolgen lernte. So entfaltete er dahier, allerdings unter fast übermässiger Anstrengung, eine äusserst gedeihliche Wirksamkeit, bei der auch die wissenschaftliche Forschung eifrig fortgesetzt wurde.

Ueberblickt man in dieser Richtung die Leistungen Sohncke's, sie ist vor Allem die schon erwähnte Abhandlung: „die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur“ zu nennen. Schon Viele waren bestrebt, zu ergründen, wie die schönen regelmässigen Formen der Krystalle entstehen und warum dieselben in einer bestimmten Richtung die gleichen, in anderen Richtungen aber andere Eigenschaften zeigen. Da hatte, neben Delafosse und Frankenheim, besonders der französische Mineraloge Bravais, an frühere Anschauungen von Hauy, des Begründers der mathematischen Krystallographie, sich anschliessend, den Gedanken, jene Eigenthümlichkeiten auf eine gitterartige Struktur der krystallisirten Materie zurückzuführen, indem er annahm, dass die Krystalle aus vielen gleichgeformten und gleichgestellten Bausteinen aufgebaut sind; es gelang ihm auch die Uebereinstimmung der an vollflächigen oder holoedrischen Krystallen beobachteten Symmetrieverhältnisse mit den möglichen Symmetrieverhält-

nissen solcher Gitterstrukturen nachzuweisen. Jedoch war er nicht im Stande, für die halbflächigen oder hemiedrischen Krystalle, welche als die Hälften der vollflächigen Gestalten erscheinen, eine solche Gitterstruktur zu finden. Später zeigte nun Chr. Wiener, der Genosse Sohncke's, dass man regelmässige Punktsysteme herzustellen vermöge, deren Elemente zwar gleichgeformt, aber nicht gleichgestellt sind; und der französische Mathematiker Camille Jordan erdachte eine Methode zur Auffindung aller derartigen Punktsysteme. An diese Vorstellungen knüpfte Sohncke an; indem er aus Jordan's Methode die unmöglichen Fälle ausschied, leitete er aus jener Grundvorstellung die möglichen Krystallsysteme streng und vollständig ab, mit Einschluss derer der halbflächigen Krystalle. Die schöne Theorie, mit allen bekannten morphologischen und physikalischen Eigenschaften der krystallisirten Körper im Einklang, wirft auf mehrere derselben ein überraschendes Licht. Unserem korrespondirenden Mitgliede Eugraph v. Fedorow gelang es später, in äusserst einfacher Weise die Hauptstrukturfläche auf experimentellem Wege zu bestimmen. Eine Anzahl weiterer Untersuchungen Sohncke's beschäftigt sich mit dem gleichen Thema; immer von Neuem suchte er seine Theorie der Krystallstruktur mit den Beobachtungen in Einklang zu bringen, wie z. B. in den Abhandlungen: elementarer Nachweis einer Eigenschaft parallepipedischer Punktsysteme, über Spaltungsflächen und natürliche Krystallflächen, und Erweiterung der Theorie der Krystallstruktur. Inhaltlich nahe verwandt mit diesen Arbeiten ist die schon angegebene über die Cohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen Richtungen, dann die über die Aetzfiguren an Steinsalzwürfeln und die über das Verwitterungsellipsoid rhomboedrischer Krystalle; in der letzteren führte er den Nachweis, dass die Fläche, welche in einem gegebenen Moment den verwitterten von dem intakten Theile scheidet, je nach der Natur der betreffenden Substanz abgeplattete und verlängerte Rotationssphäroide sein können.

Eine zweite Gruppe von Untersuchungen ist optischer Natur und bezieht sich auf die Erscheinungen der Rotations-

polarisation. In einer ausführlichen Abhandlung wird von Sohncke die Glimmercombination, durch welche der Tübinger Physiker Reusch das Drehungsvermögen des Quarzes nachgeahmt hatte, indem er künstliche Krystalle durch Aufeinanderlegen gleichartiger Glimmerplättchen, deren jedes gegen das obere und untere nächstfolgende um einen gewissen Winkel gedreht erscheint, herstellte, experimentell und theoretisch untersucht und hieran der Versuch geknüpft, einen Einblick in den Zusammenhang des Drehungsvermögens der Krystalle mit ihrer molekülaren Struktur zu gewinnen. Eine weitere Experimentalarbeit der Art über den Einfluss der Temperatur auf das optische Drehungsvermögen des Quarzes stellt fest, dass dieses Vermögen nicht, wie man bis dahin annahm, in geradem, sondern in rascherem Verhältnisse mit der Temperatur zunimmt. Ferner wird durch sehr sinnreiche Versuche in einer Abhandlung über die elektromagnetische Drehung natürlichen Lichtes nachgewiesen, dass diese Wirkung, welche man nur an polarisirtem Lichte kannte, in der That auch bei natürlichem Lichte stattfindet. Hierher gehört auch die Untersuchung über polarisirte Fluorescenz, ein Beitrag zur kinetischen Theorie der festen Körper.

In einer dritten Reihe von ebenfalls optischen Abhandlungen werden die prächtigen Interferenzerscheinungen an dünnen, insbesondere keilförmigen Blättchen sowie der Newton'schen Ringe behandelt, zum Theil im Verein mit seinem Freunde Wangerin, welcher die theoretische Seite der Aufgabe bearbeitete, während Sohncke die Beobachtungen und Messungen mit einem zweckmässig erdachten Apparate ausführte. Auch diesem schon so vielfach behandelten Gegenstande wurden bemerkenswerthe neue Resultate abgewonnen und wurde insbesondere gezeigt, dass die Ringe Curven doppelter Krümmung sind, welche auf einer Kugelfläche dritter Ordnung liegen.

Sohncke hat auch einmal, im Anschluss an die von Clausius aufgestellte Hypothese, eine Anschauung über die Entstehung des Stroms in der galvanischen Kette ausgesprochen, welche werthvolle neue Gesichtspunkte in dieser alten, aber

noch immer nicht endgiltig ausgetragenen Streitfrage liefert. — Seine letzte in der Julisitzung des vorigen Jahres in der Akademie vorgetragene Arbeit befasst sich mit der Aenderung der spezifischen Wärme mit der Temperatur, welche eine Mittheilung unseres Collegen Carl Linde über die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme der Gase veranlasste, die Sohncke nicht mehr erlebte.

In eine vierte Gruppe endlich gehören seine vorher erwähnten werthvollen Studien auf dem Gebiete der Meteorologie, welche er bis in die letzte Zeit seines Lebens fortsetzte. Es handelte sich dabei vorzüglich um die elektrischen Erscheinungen der Atmosphäre, über welche er seine Ansichten in einem Schriftchen: „der Ursprung der Gewitter-Elektrizität und der gewöhnlichen Elektrizität der Atmosphäre, eine meteorologisch-physikalische Untersuchung“ zusammenfasste; er schuf dadurch eine Theorie der atmosphärischen Elektrizität, welche unter den zahlreichen in diesem schwierigen und räthselvollen Gebiete bisher aufgestellten Theorien zur Zeit von sehr vielen Fachleuten als die den thatsächlichen Verhältnissen am meisten entsprechende anerkannt werden dürfte und welche jedenfalls das Verdienst hat, der Forschung eine bestimmte Richtung gegeben zu haben. Er erblickt die Ursache der Gewitterelektrizität in der Reibung der im aufsteigenden Luftstrom empor geführten Wassertheilchen der Cumulus-Wolken an den Eisnadeln, aus welchen die hochschwebenden Cirrus-Wolken bestehen. Dem Ausbruch des Gewitters geht nämlich regelmässig eine Erhitzung der unteren Schichten der Atmosphäre, verbunden mit einer starken Abnahme der Lufttemperatur nach Oben, voraus, so dass schon in geringer Höhe der Gefrierpunkt erreicht, ja unterschritten wird. Die Folgen davon sind Ueber- und Nebeneinanderlagerung von Wasser- und Eiswolken und deren tumultuarische Mischung durch die plötzlich aufsteigenden Luftströme, zu deren Entstehung die Wärmeschichtung der Atmosphäre den Anlass gibt. Die Reibung zwischen den Nebeltröpfchen der Wasserwolken und den Eisnadeln der Eiswolken ist dann die Quelle der Gewitterelektrizität. Dass

Eis durch Wasserreibung positiv elektrisch wird, hat bereits Faraday durch von Sohncke wiederholte Laboratoriumsversuche beobachtet. Die Fahrten des auf seinen Antrag mit Unterstützung unserer Akademie gebauten Luftballons „Akademie“ des hiesigen Vereins für Luftschifffahrt haben, ausser mannigfachen anderen Bereicherungen unseres Wissens von der Atmosphäre, seine Ansichten über Gewitterelektrizität gestützt.

Gerne lieh er seine Kenntnisse und seine Thatkraft Bestrebungen, die er für nützlich hielt. Er war erster Vorsitzender und die Seele des genannten Vereins für Luftschifffahrt; auch betheiligte er sich lebhaft an den Aufgaben des hiesigen Zweigvereins der Deutschen meteorologischen Gesellschaft. Sehr tkätig war er in dem Verein für Schulreform, welcher die Idee der Einheitsschule, des Reformgymnasiums mit gemeinsamem Unterbau, verficht. Er verstand es auch, in seltener Weise die Resultate der wissenschaftlichen Forschung weiteren gebildeten Kreisen durch gemeinverständliche Vorträge aus dem Gebiete der Physik zugänglich zu machen; neun dieser Vorträge sind, in einem Hefte gesammelt, veröffentlicht worden; äusserst anziehend ist sein in dem bayerischen Industrie- und Gewerbeblatt erschienener Vortrag: „aus der Molekülarwelt“ geschrieben. Endlich muss auch des von ihm gestifteten, ungemein anregenden Colloquiums gedacht werden, an welchem alle hiesigen Physiker von Fach sowie die sich für die Physik interessirenden Gelehrten anderer Fächer theilnahmen und wobei abwechselnd Originalmittheilungen gemacht oder zusammenhängende Referate erstattet wurden, woran sich dann eingehende Besprechungen anknüpften.

So stellt sich uns Sohncke als ein höchst feiner und zuverlässiger Beobachter der molekülaren Vorgänge an der Materie sowie als geistreicher Interpret derselben dar; mit unablässiger Lust arbeitete er daran, die Erscheinungen der Natur zu belauschen und beizutragen zu der Erkenntniss des Baues der Welt. Sein Name wird in der Wissenschaft stets ehrend genannt werden.

Die, welche ihn näher kannten, haben ihn als einen der edelsten, reinsten Menschen von idealer Gesinnung geschätzt und geliebt. Von ehrenfestem und unbeugsamem Charakter, verbunden mit einer wahrhaft kindlichen Herzensgüte, war es ihm stets nur um die Wahrheit zu thun. Er bildete sich in scharfer Prüfung seine eigene Ansicht und Ueberzeugung über die Dinge und er wich so öfter von der landläufigen Meinung ab; was er aber für Recht hielt, das vertrat er mit der ganzen Energie seines Wesens. Er war eine demokratisch angelegte, unabhängige Natur, welche die Menschen nicht nach ihrer zufälligen, äusserlichen Stellung, sondern nach ihrem inneren Werthe, der redlichen Benützung der ihnen verliehenen Gaben und der Reinheit der Gesinnung schätzte. Seine Collegen und Freunde werden seiner als leuchtendes Vorbild der Rechtschaffenheit dankbarst gedenken.

## Francesco Brioschi.[1])

Am 13. Dezember 1897 ist zu Mailand der angesehenste Mathematiker Italiens und Präsident der R. Accademia dei Lincei, Francesco Brioschi, im 73. Lebensjahre gestorben. Er war der Führer in der mathematischen Wissenschaft in seinem Vaterlande und er hat dieselbe durch seine Arbeiten, namentlich auf dem Gebiete der Algebra und der Funktionentheorie, zu einer hohen Stufe erhoben.

Geboren am 22. Dezember 1824 in Mailand, studirte er an der Universität zu Pavia, wo er sich alsbald mit Vorliebe der Mathematik zuwandte. Er erwarb sich, vor Allem durch das Studium der grossen französischen Mathematiker, ein umfangreiches Wissen auf allen mathematischen Gebieten, wodurch er später in den Stand gesetzt war, mit seltener Ausdauer und Vielseitigkeit in die wichtigsten Theile der mathematischen Forschung einzugreifen.

[1]) Mit Benützung des Nekrologs von M. Noether in Erlangen, in den mathematischen Annalen 1898, S. 477.

Nach seiner Lernzeit war er zuerst während 9 Jahren an der Universität Pavia als Professor der angewandten Mathematik thätig. Aber sein lebhafter, auf das Allgemeine gerichteter Geist suchte ausser seiner Fachwissenschaft eine weitere Wirksamkeit in der Hebung des Unterrichtswesens und der Förderung der Wissenschaften in Italien. So gründete und organisirte er im Auftrage der Regierung das Mailänder Istituto Tecnico Superiore, an dem er bis zu seinem Lebensende die Professur für Hydraulik inne hatte und das er als Direktor in wissenschaftlicher und praktischer Beziehung zu einer Musteranstalt erhob. Nach der Einigung seines Vaterlandes war er Senator des Königreichs und übte als solcher einen ungemein nützlichen Einfluss auf den verschiedensten Gebieten des Staates aus: er betheiligte sich eifrig bei allerlei praktischen Bestrebungen, förderte das Eisenbahnwesen, lieferte eine umfangreiche Arbeit über die Tiberüberschwemmungen, war als Mitglied des Schulrathes im Unterrichtsministerium für die Schulen thätig, besonders aber erwarb er sich als Präsident der R. Accademia dei Lincei um dieses Institut und um alle Wissenschaften in Italien die grössten Verdienste. So verdankt man ihm zum Beispiel die grossartig angelegte Publikation des Codice Atlantico des in den Künsten sowie in der Technik und als Schriftsteller in Mathematik und Physik hervorragenden Lionardo da Vinci, welches Unternehmen für die Naturwissenschaften, die Mathematik und die Technik von hoher Bedeutung zu werden verspricht; durch die Uebernahme und Leitung der von Tortolini gegründeten Annali di Matematica gab er der italienischen mathematischen Forschung ein angesehenes, auf die Entwicklung der mathematischen Studien in Italien einflussreiches Organ, und er erzog eine den anderen Ländern ebenbürtige mathematische Schule, welcher Männer wie Beltrami, Casorati und Cremona angehören. .

Bei seinen ersten mathematischen Veröffentlichungen war Brioschi vorzüglich noch bestrebt, der italienischen Wissenschaft die Fortschritte in der Mathematik und die sie bewegenden Ideen zugänglich zu machen. Aber daraus entfaltete

sich allmählich seine eigenartige Thätigkeit als Forscher, der die in der Mathematik aufkeimenden Gedanken Anderer rasch erfasste, durch klare Aufdeckung ihres Wesens zugänglich machte und dadurch zu deren weiterer Entwicklung, namentlich durch sein Bestreben, die Rechnungen und die Formeln möglichst zu vereinfachen, ganz wesentlich beitrug.

Anfangs bewegten sich seine Arbeiten auf verschiedenen analytischen Gebieten. Dann beschäftigte er sich mit den Methoden der Determinanten- und Invarianten-Theorie, deren er sich in vollendeter Weise zur Lösung von allerlei Problemen bediente; es war hauptsächlich die Frage nach gewissen Differentialgleichungen für die Invarianten zunächst binärer, dann allgemeiner Formen, im Anschluss an die grundlegenden Untersuchungen von Cayley, Sylvester und Hermite über die algebraische Formentheorie, zu deren Entwicklung er durch sein analytisches Talent beitrug; auch verdankt man ihm auf diesem Gebiete wichtige Erweiterungen der Hermite'schen Theorie der associirten Formen, welche Methode Brioschi auch späterhin noch häufig benützte.

Darnach folgten seine Arbeiten über die Theorie der Gleichungen fünften Grades im Zusammenhang mit der Transformationstheorie der elliptischen Funktionen, ferner die Theorie der allgemeinen linearen Differentialgleichungen und endlich die Theorie der hyperelliptischen Funktionen. In allen diesen Arbeiten machte er Anwendung von der Theorie der algebraischen Formen. Sie gipfelten in seiner höchsten Leistung auf diesem Gebiete, in seinen Beiträgen zur Theorie der Gleichungen fünften Grades und zur Theorie der Jakobi'schen Gleichungen.

Als letzte Frucht seiner Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Funktionen erwuchs, auf Grund der epochemachenden Noten von Hermite und Kronecker über die Auflösung der Gleichung sechsten Grades, seine Betheiligung an der Behandlung einer neuen Lösung der Gleichung sechsten Grades mittelst hyperelliptischer Funktionen.

Den Arbeiten Brioschi's ist, neben der Sicherheit des Eindringens in den Kern der Frage, die Eleganz der Dar-

stellung in besonderem Maasse eigen, wie sie nur die vollständige Beherrschung des analytischen und hier insbesondere des algebraischen Apparates erreichen lässt.

Es wird ihm der bleibende Dank für sein nützliches Lebenswerk in seinem Vaterlande und überall, wo die mathematische Forschung betrieben wird, gezollt werden.

## Karl Remigius Fresenius.[1])

Am 11. Juni 1897 ist in Wiesbaden der geheime Hofrath Karl Remigius Fresenius gestorben, der sich namentlich um die Ausbildung der analytischen Chemie der anorganischen Verbindungen grosse Verdienste erworben hat.

Am 28. Dezember 1818 zu Frankfurt a. M. geboren, erhielt er den ersten Unterricht in der Musterschule zu Frankfurt, dann im Bender'schen Institut zu Weinheim an der Bergstrasse und am Gymnasium in Frankfurt. Er widmete sich anfänglich der Pharmazie, indem er in die Stein'sche Apotheke in Frankfurt als Lehrling eintrat; gleichzeitig besuchte er an dem so wohlthätig wirkenden Senckenberg'schen Institut chemische und physikalische Vorlesungen. Damals machte er schon seine ersten analytisch-chemischen Versuche in einem kleinen in dem Gartenhause des väterlichen Anwesens errichteten Laboratorium. Dann ging er auf ein Jahr an die Universität Bonn, woselbst er neben der Pharmazie mit grösstem Eifer auch Naturwissenschaften studirte; zu dieser Zeit musste er bereits viele Erfahrungen in der analytischen Chemie gesammelt haben, denn er schrieb dorten zu seiner Uebung die Anleitung zur qualitativen chemischen Analyse, welche später auf den Rath seines Lehrers Marquart, in dessen Privatlaboratorium er arbeitete, im Druck erschien. Dadurch reifte in ihm der Entschluss, sich ganz der Chemie zu widmen. Da

[1]) Mit Benützung der Nekrologe in den Berichten der Deutschen chem. Gesellschaft 1897, Nr. 11, und in der Zeitschrift für analytische Chemie 1897, Jahrgang 36, Heft 12.

war es selbstverständlich, dass er nach Giessen wanderte, wo unter Liebig's genialer Leitung von den talentvollsten jungen Chemikern mit wahrem Bienenfleiss gearbeitet wurde. Fresenius nahm alsbald den regsten Antheil an den Arbeiten des Laboratoriums, er wurde zuerst Privatassistent Liebig's und dann staatlicher Unterrichtsassistent. Zu vielen der damaligen Schüler trat er in nähere Beziehungen und in engere Freundschaft. In Giessen erhielt Fresenius seine letzte Ausbildung in der analytischen Chemie und die Richtung auf die Anwendung der Chemie in Landwirthschaft und Technik.

Nachdem er den Doktorgrad erworben hatte, habilitirte er sich als Privatdozent an der Universität. Bald jedoch erhielt er einen Ruf als Professor der Chemie, Physik und Technologie an dem landwirthschaftlichen Institut zu Hof-Geisberg bei Wiesbaden. In dem Wunsche, Schüler in der Chemie ausbilden zu können, gründete er daselbst ein eigenes chemisches Laboratorium, das mit der Zeit grosse Erweiterungen erfuhr und dessen Direktor und viel gesuchter begeisternder Lehrer er sein ganzes ferneres Leben über blieb.

Aus diesem nun fast ein halbes Jahrhundert bestehenden Laboratorium sind viele Arbeiten von ihm und seinen Schülern hervorgegangen. Es ist namentlich auch eine Lehrstätte für die wissenschaftlichen chemischen Bedürfnisse der Landwirthschaft und der Industrie geworden, und die daraus hervorgegangenen Schüler haben sich sowohl im Lehramt der Chemie als auch insbesondere in der Praxis derselben hervorgethan. Es war in der Anstalt für alle Anwendungen der Chemie Sorge getragen: für Ausbildung und Untersuchungen in der Agrikulturchemie, in der Chemie der Nahrungsmittel, besonders der der Weine, der Obstarten etc., in der Pharmazie, im Bergbau, und auch in der Hygiene und Bakteriologie.

Im ersten Semester in Giessen erschien die schöne Untersuchung von Fresenius über die traubensauren Salze; in Giessen ermittelte er ferner ein neues, viel angewandtes Verfahren zur Unterscheidung und Trennung des Arsens von Antimon durch die mit dem Marsh'schen Apparat erhaltenen

Metallspiegel. Die in Gemeinschaft mit Will ausgearbeiteten neuen Versuchsweisen zur Prüfung der Pottasche und Soda, der Aschen, der Säuren und des Braunsteins haben in der Technik allgemeine Anwendung gefunden; mit Haidlen veröffentlichte er eine Abhandlung über die Anwendung des Cyankaliums in der chemischen Analyse, mit Babo über ein neues Verfahren zur Ausmittelung und quantitativen Bestimmung des Arsens bei Vergiftungsfällen und mit Will über die unorganischen Bestandtheile der Pflanzen. Weiter rühren von ihm viele sorgfältige Analysen von Mineralwässern, namentlich aus dem Herzogthum Nassau, her, ebenso Untersuchungen der nassauischen Thone und der wichtigsten nassauischen Kalksteine.

Von Nutzen war sein Lehrbuch der Chemie für Landwirthe, Forstmänner und Kameralisten. Besonders aber muss hervorgehoben werden sein zweibändiges Werk: „Anleitung der qualitativen und quantitativen chemischen Analyse", von dem die erstere in 16, die letztere in 6 Auflagen erschienen und in fast alle lebenden Sprachen übersetzt worden ist. Nach dem veralteten Handbuch der analytischen Chemie von Rose war das Werk von Fresenius dasjenige, nach dem die Chemiker analytisch arbeiteten; es erhielt einen besonderen Werth dadurch, dass er und seine Schüler die Methoden selbst geprüft hatten. Später hat er dann die Zeitschrift für analytische Chemie gegründet, welche jetzt 36 Jahrgänge umfasst und in der alle Fortschritte dieses Zweiges der Chemie seit dieser Zeit verzeichnet sind.

Der Name von Fresenius war dadurch allen Chemikern bekannt und seine Verdienste allgemein anerkannt. In der Ueberzeugung, dass die verbesserten analytischen Methoden zum Fortschritte der Chemie nothwendig sind, hat er durch seine Arbeiten die Entwicklung der Chemie gefördert.

Viel Gutes hat er auch gewirkt durch sein lebhaftes Interesse für diejenigen Theile der Technik und der Industrie, auf welche die Chemie von Einfluss ist, sowie durch seine Antheilnahme an gemeinnützigen Bestrebungen und am öffentlichen Leben.

## Victor Meyer.[1])

Durch den am 8. August 1897 erfolgten frühzeitigen und plötzlichen Tod des Chemikers Victor Meyer in Heidelberg hat die Wissenschaft einen Gelehrten verloren, welchen seine Fachgenossen als einen der talentvollsten und hervorragendsten Forscher betrachteten, von dem man noch die grössten Leistungen erwarten durfte. Auf mehreren Gebieten der jetzt so weit verzweigten Chemie hat er zahlreiche, neue Gesichtspunkte eröffnende Arbeiten gemacht, durch welche er ganz wesentlich seit dem Ende der sechziger Jahre zu den Fortschritten dieser Wissenschaft beigetragen hat.

Victor Meyer wurde am 8. September 1848 zu Berlin geboren, woselbst sein Vater eine ansehnliche Kattundruckerei besass. Er erhielt zuerst Privatunterricht und besuchte dann das Friedrich-Werder'sche Gymnasium seiner Vaterstadt. Er zeigte zu dieser Zeit zwar ein Interesse für die Naturwissenschaften, aber als er das Maturitätsexamen gemacht hatte, war er noch nicht entschlossen, welchem Studium er sich besonders widmen wollte. Erst nach einem Besuch in Heidelberg, wo damals Bunsen, Kirchhoff und Helmholtz wirkten, entschied er sich für die Chemie und die akademische Laufbahn.

An der Universität in Berlin hörte er noch eine chemische Vorlesung bei A. W. Hofmann, dann begab er sich nach Heidelberg, wo er bei dem Altmeister Bunsen, der bald den Werth des jungen Mannes erkannte, zu arbeiten begann. Er erwarb sich daselbst, noch nicht 19 Jahre alt, den Doktorgrad und wurde hierauf Assistent für Mineralwasser-Analyse am Laboratorium Bunsen's. Der Drang, sich in der organischen Chemie auszubilden, führte ihn in die Gewerbeakademie zu Berlin, an der damals Ad. Baeyer durch seine glänzenden Arbeiten die Augen der Chemiker auf sich zog. In dieser Schule entwickelte

---

[1]) Mit Benützung der Nekrologe von Liebermann in den Berichten der Deutschen chemischen Gesellschaft 1897, Bd. 2, S. 2157; dann in der Beilage zur Allgemeinen Zeitung 1897, 24. August, Nr. 189; und in Leopoldina 1897, Nr. 8, S. 118.

er sich rasch; der Umgang mit einer Anzahl talentvoller junger Forscher, der Einfluss des geistreichen A. W. Hofmann und der neu begründeten chemischen Gesellschaft brachten vielfache Anregung.

Nach drei Lernjahren habilitirte er sich als Privatdozent an der Universität. Und nun begann eine Laufbahn, wie sie glänzender und ehrenvoller kaum gedacht werden kann.

Der alternde Fehling in Stuttgart suchte eine Hilfskraft für den Unterricht im Laboratorium und für die Vorlesung über organische Chemie; Baeyer empfahl Meyer so angelegentlich, dass er die Stelle eines Assistenten und Titularprofessors am Polytechnikum in Stuttgart erhielt. In dieser Zeit vollendete er mehrere bedeutende Arbeiten, die seinen Ruf als aufstrebende Kraft begründeten. Als Wislicenus dem Rufe nach Würzburg folgte, besuchte der bekannte schweizerische Schulrath Kappeler eine Vorlesung von Meyer und fand alsbald an dem klaren Vortrag des jungen noch nicht 24jährigen Mannes solches Gefallen, dass er ihm ohne Bedenken die ordentliche Professur der Chemie und das Direktorium des chemischen Laboratoriums am Polytechnikum zu Zürich antrug. Nach 12jährigem ausserordentlich glücklichem und fruchtbarem Wirken in Zürich kam er für 4 Jahre nach Göttingen, von wo es der Heidelberger Universität gelang, den berühmten Forscher als Nachfolger Bunsen's zu gewinnen. An allen diesen Orten hat er musterhafte Laboratorien eingerichtet und grosse Schulen der Chemie geleitet.

Wenn wir einen Ueberblick über die wissenschaftliche Thätigkeit Meyer's werfen, so ist vor Allem hervorzuheben, dass diese nur ermöglicht war durch sein umfassendes Wissen in der Chemie, sein rastloses Schaffen, seine eiserne Thatkraft, sein experimentelles Geschick und sein erfinderisches Talent. Mit zäher Ausdauer, manchmal viele Jahre hindurch, verfolgte er eine Aufgabe, bis ihm endlich die Lösung derselben gelang.

Er fing seine Karriere mit einigen kleineren Arbeiten an, welche über die Constitution des Chloralhydrats und des Camphers handelten. Dann kam bald eine grössere in Liebig's

Annalen veröffentlichte Untersuchung über die Stellungsfrage isomerer Benzolderivate, welche für die Theorie der Benzolverbindungen von Einfluss geworden ist und schon die ganze Art und Bedeutung des Autors erkennen lässt. Er zeigte darin z. B. die Ueberführung der Sulfosäuren in Carbonsäuren, ebenso des Dibrombenzols in Terephtalsäure, und die richtige Stellung der Sulfo-, Brom- und Oxy-Benzoesäure.

Noch in Stuttgart entdeckte er die den Salpetrigsäureestern isomeren Nitroäthane, d. i. die Mononitroderivate der Kohlenwasserstoffe der Fettreihe, an denen er merkwürdige Reaktionen nachwies. In Zürich setzte er diese ungemein schwierigen und auch gefährlichen Untersuchungen eifrig fort; dieselben haben eine grosse Ausdehnung angenommen und gehören zu den fruchtbarsten der Experimentalchemie. Den Nitrokörpern reihen sich die Nitrosokörper und die den letzteren isomeren Isonitrosokörper an. Dabei zeigte es sich, dass eine grosse Anzahl von Nitrosoverbindungen eine andere Constitution besitzen, als man allgemein angenommen hatte, und dass sich diese nicht nur durch die Einwirkung von salpetriger Säure auf Wasserstoffverbindungen, sondern noch viel leichter durch die Reaktion von Hydroxylamin auf sauerstoffhaltige Körper, z. B. auf Ketone und Aldehyde darstellen lassen, wobei die wichtigen Ketoxime und die Aldoxime entstehen, welche später die Grundlage für die Lehre von der räumlichen Lagerung der Volenzen des Stickstoff-Atoms geliefert haben. Aus dem Nitroäthan und dessen Homologen entwickelte er die Nitrolsäuren, die Pseudonitrole und die gemischt aromatisch-fetten Azoverbindungen.

Darauf folgte eine fast noch glänzendere Entdeckung, nämlich die des Thiophens. Er hatte bemerkt, dass das aus Steinkohlentheer dargestellte Benzol bei gewissen Reaktionen anders sich verhält als das aus Benzoesäure; bei weiterer Verfolgung der Sache stellte er aus dem schon so vielfach untersuchten Steinkohlentheer einen Körper dar, durch den sich ein weites neues Gebiet, das der Thiophengruppe, der organischen Chemie erschloss. Es gelang ihm daraus einen ganz übersehenen, merkwürdigen, schwefelhaltigen Stoff, der dem Benzol

glich und den er wegen des Schwefelgehaltes Thiophen nannte, zu isoliren. Seine weiteren Arbeiten ergaben die Constitutionsbeziehungen des Thiophens zu dem Benzol, viele Abkömmlinge, Homologen, Substitutions-Produkte und Isomeren desselben, welche er mit den entsprechenden Benzolderivaten verglich.

Er ging nun zu für die Chemie wichtigen physikalischen Problemen über.

Die gewöhnlich geübte Methode der Bestimmung der Dampfdrähte von A. W. Hofmann versagte wegen der Spannung des Quecksilberdampfes bei einer Temperatur von über 310°; es war aber nothwendig, bei wesentlich höherer Temperatur die Bestimmung auszuführen. Nach Meyer's Methode wird bekanntlich eine gewogene Menge der zu untersuchenden Substanz in einem geschlossenen Raume verdampft und das durch den Dampf verdrängte gleiche Luftvolum gemessen. Indem er das Verfahren durch Erfinden neuer Apparate und Oefen immer mehr verbesserte, kam er zu höheren Temperaturen, zuletzt durch Anwendung von Platingefässen zu solchen von 1800° und noch in der letzten Zeit hatte er Aussicht, Gefässe zu bekommen, welche bis zu 4000° aushalten. Er hat durch diese jetzt allgemein gebräuchliche Methode die Pyrochemie ganz ungemein gefördert.

Durch die Anwendung seiner Methode auf die Gruppe der halogenen Elemente, welche mit den Metallen salzartige Verbindungen bilden, auf Chlor, Brom, Jod und Fluor, gelang ihm durch die hohen Temperaturen die Spaltung oder Dissociation der Halogenmoleküle in ihre Atome. Indem er bei den verschiedensten Glühtemperaturen Versuche über die Molekülarverhältnisse des Sauerstoffs, des Stickstoffs, des Schwefels, des Stickstoffoxyds, der Kohlensäure, der schwefligen Säure, der Salzsäure, des Zinks, des Quecksilbers. des Schwefelquecksilbers, der Metallchloride und Bromide, sowie auch der Siede- und Schmelzpunkte anorganischer Salze anstellte, brachte er die wichtigsten Aufschlüsse über die Molekülargewichte der Elemente und ihrer Verbindungen. Ja er gab sich der Hoffnung hin, da die Gase des Quecksilbers, des Cadmiums, des Zinks und

des Jods nur aus einem Atom bestehen, durch den Versuch entscheiden zu können, ob wir mit diesen Atomen schon bis zu der letzten möglichen Zertheilung der Materie angelangt sind oder sie in noch einfachere Stoffe zerlegen können.

Zu den chemisch-physikalischen Arbeiten Meyer's gehören auch die über den zeitlichen Verlauf der Reaktion von Gasen wie des Jodwasserstoffs, des Knallgases etc.

In Heidelberg glückte ihm die Darstellung der ersten Jodoso- und Jodoverbindung, sowie der Jodoniumbasen, in welchen das Jod die Rolle des Stickstoffs in den Ammoniumbasen spielt. Seine letzte Arbeit war die über die diorthosubstituirten Benzoe-Säuren, wobei sich viele Aufschlüsse über die Stereochemie, sowie das sogenannte Esterificirungs-Gesetz ergaben.

Erwähnt zu werden verdient noch das mit P. Jacobson herausgegebene grosse Lehrbuch der organischen Chemie, ein vorzügliches Werk, in dem die Kohlenstoffverbindungen einheitlich von grossen Gesichtspunkten aus dargestellt sind.

Meyer liebte es auch, die allgemein wichtigen Resultate der chemischen Forschung für weitere wissenschaftliche Kreise zusammenzufassen; so hielt er in einer allgemeinen Sitzung der Naturforscher-Versammlung zu Heidelberg einen Vortrag über die chemischen Probleme der Gegenwart, und zu Lübeck über Probleme der Atomistik. In einzelnen Aufsätzen suchte er mit Glück das chemische Wissen gemeinfasslich in schöner Sprache darzustellen; auch hat er belletristische Mittheilungen aus Natur und Wissenschaft nicht verschmäht.

Er war zugleich ein Mann von allgemeiner Bildung, der die bildenden Künste, sowie die Musik und die schöne Literatur mit feinem Verständniss erfasste. Durch seine einnehmende Persönlichkeit, sein liebenswürdiges Wesen und seinen edlen Charakter hat er sich überall Freunde erworben.

In Folge der rastlosen Arbeit zeigten sich schon in Zürich zeitweise Erscheinungen der Ueberanstrengung und Ermüdung der Nerven mit Schlaflosigkeit, besonders gegen Ende des Semesters, welche sich aber durch Erholung in den Ferien

wieder hoben. Dazu gesellten sich, offenbar durch den langen Aufenthalt in dem öfter bis über 50° warmen Feuerlaboratorium hervorgerufen, schmerzhafte Muskelrheumatismen und Neuralgien. Es kamen Stunden äusserster Abspannung und Depression und in einem solchen Anfalle übermässigen Leidens und von Schwäche machte der erst 49 Jahre alte edle Mann zum Bedauern aller Freunde der Naturwissenschaft seinem Leben ein Ende.

## Rudolf Heidenhain.[1])

Der Physiologe an der Universität Breslau, Rudolf Heidenhain, ist am 13. Oktober 1897 nach längerer Krankheit im 64. Lebensjahre gestorben. Er hat die Physiologie durch eine grosse Anzahl von Thatsachen von immer steigender Bedeutung bereichert und dadurch auf die Entwicklung dieser Wissenschaft einen erheblichen Einfluss ausgeübt; namentlich hat er durch seine meisterhaften mikroskopischen Untersuchungen der lebendigen Drüsenzellen im Zustande der Ruhe und der Thätigkeit während der Sekretion die Lehre von der Sekretion in neue Bahnen gelenkt.

Rudolf Heidenhain wurde am 29. Januar 1834 in Marienwerder in Westpreussen geboren, wo sein Vater, der Sanitätsrath Heinrich Heidenhain, ein angesehener Arzt war. Schon während der Gymnasialjahre trat seine Vorliebe und sein Talent für die Naturwissenschaften hervor, anfangs besonders für die Botanik und für die Physik; er sammelte eifrig Pflanzen und half dem Lehrer der Physik bei seinen Experimenten. Er bezog darnach die Universität Königsberg, wo er zuerst Naturwissenschaften studirte, dann aber zur Medizin überging, von der ihn bald die Physiologie in hohem Maasse interessirte. Nach zwei Jahren verliess er Königsberg, um nach Halle überzusiedeln. Daselbst hörte er ausser dem ungemein praktischen

[1]) Siehe den Nekrolog von Dr. F. Schenk in Würzburg in Leopoldina 1898, Nr. 5, S. 41, und in der Münchener med. Wochenschrift 1897, Nr. 50.

Kliniker Krukenberg, dem ehemaligen Lehrer seines Vaters, mit Vorliebe die Vorlesungen und Uebungen des trefflichen Chemikers H. W. Heintz, der auch ein Lehrbuch der Zoochemie herausgegeben hat, und des Physiologen Alfred Wilhelm Volkmann. In Berlin wurde dann die ärztliche Prüfung und das Doktorexamen gemacht, wozu er unter der Leitung von Emil Du Bois-Reymond eine Dissertation über die Nerven und Nervencentralorgane des Froschherzens ausgearbeitet hatte. Er blieb darnach noch 1½ Jahre in Berlin, um als Assistent Du Bois-Reymond's sich weiter in der Physiologie zu unterrichten, und kehrte hierauf nach Halle zurück. Hier war er zunächst Assistent bei dem aus Giessen berufenen Kliniker Julius Vogel, der sich viele Verdienste um die mikroskopische und chemische Untersuchung am Krankenbette erworben hatte; später arbeitete er, nachdem er sich entschlossen hatte, ausschliesslich sich der Physiologie zu widmen, bei dem ausgezeichneten Volkmann, von welchem die ersten genaueren Bestimmungen der Geschwindigkeit des strömenden Blutes in den Arterien, Venen und Capillaren, sowie des Blutdrucks bei verschiedenen Thieren herrühren. Er habilitirte sich zum Abschluss seiner Lernjahre in Halle als Privatdozent für Physiologie mit einer Untersuchung: „disquisitiones criticae et experimentales de sanguinis quantitate in mammalium corpore exstantis“, wobei er die Menge des Blutes bei verschiedenen Säugethieren nach der von Welcker kurz vorher angegebenen colorimetrischen Methode bestimmte; er zeigte dabei, dass das venöse Blut stärker färbt als das arterielle und dass beim Hunger die relative Menge des Blutes zum Körper sich nicht ändert.

Als nach dem Abgange von Purkyně nach Prag die Professur für Physiologie in Breslau frei geworden war, wurde der erst 26 jährige, viel versprechende junge Forscher als ordentlicher Professor der Physiologie und Histologie und als Vorstand des ersten von Purkyně gegründeten physiologischen Laboratoriums berufen. Als solcher wirkte er bis an sein Lebensende. Indem er dorten alsbald eine fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit entfaltete und auch eine grössere An-

zahl von Schülern ausbildete, denen er durch seine Gewissenhaftigkeit und seinen Eifer in der Arbeit ein leuchtendes Beispiel war, hat er die in ihn gesetzten Erwartungen in vollstem Maasse erfüllt.

Die ersten grösseren Untersuchungen Heidenhain's beschäftigten sich mit den Vorgängen im Muskel bei der Contraktion, welche er grösstentheils in seiner Schrift: „mechanische Leistung, Wärmeentwicklung und Stoffumsatz bei der Muskelthätigkeit" beschrieb. Einige Zeit vorher hatte Helmholtz gezeigt, dass der ausgeschnittene, länger thätig gewesene Froschmuskel eine andere chemische Zusammensetzung der Fleischbrühe besitzt, als der ruhende, und daher die Muskelcontraktion, wie es das Gesetz von der Erhaltung der Kraft verlangt, mit einer Zersetzung der Muskelsubstanz verbunden ist; auch hatte er durch eine feine Methode bei der Contraktion eine Erhöhung der Temperatur nachgewiesen. Von diesen letzteren Erfahrungen ging Heidenhain bei seinen Versuchen aus, indem er sich die Aufgabe stellte, am Froschmuskel zu prüfen, wie sich die Wärmeentwicklung im thätigen Muskel bei verschiedener Arbeitsleistung gestaltet. Zur Messung der Wärme änderte er das Verfahren von Helmholtz ab, indem er sich einer den Bewegungen des Muskels genau folgenden Thermosäule bediente. Es haben sich dabei bemerkenswerthe Resultate ergeben, wenn auch Manches in dieser Richtung noch unaufgeklärt blieb. Er vermochte eine Wärmeentwicklung bei einer einzelnen Zuckung des Muskels darzuthun; mit der Hebung schwererer Gewichte oder mit der Arbeitsleistung des Muskels nahm auch die dabei entwickelte Wärme zu; wurde der belastete Muskel an der Contraktion durch Festhalten seiner Enden gehindert, dann wuchs mit der Spannung ebenfalls die Wärmeentwicklung; entsprechend diesem Verhalten der Wärme verhielt sich auch der Stoffumsatz im Muskel, gemessen durch die im Muskel während der Contraktion gebildete Säuremenge. Dadurch war erkannt worden, dass im Muskel nicht nur im Momente der Reizung, sondern während der ganzen Verkürzung, entsprechend der Spannung, Stoffe

zersetzt werden und lebendige Kraft entsteht, und ferner, dass, wenn der Muskel grössere Lasten zu heben hat, dann auch in Folge der grösseren Spannung regulatorisch die Kraftentwicklung entsprechend grösser wird.

Es gelang ihm, den Nerven mechanisch durch ein in häufige Schwingungen versetztes Hämmerchen zu reizen und den Muskel in Starrkrampf zu versetzen; der von ihm zu diesem Zwecke construirte Apparat, der Heidenhain'sche Tetanomotor, ist in allen physiologischen Laboratorien eingebürgert.

Er hat ferner erwiesen, dass die Muskeln im lebenden Körper nicht stetig in einem geringen Grade der Contraktion, in einem Tonus, sich befinden. Er war weiterhin an der Entwicklung des sogenannten Zuckungsgesetzes betheiligt; man hatte früher bei Einwirkung des constanten elektrischen Stromes auf die Muskelnerven die verschiedensten Erfolge erhalten und trotz der von vielen bedeutenden Forschern, wie Nobili, Volta, Galvani, Valli, Marianini, Pfaff etc., darauf verwendeten Mühe, die Ursache davon nicht entdecken können; man kennt jetzt die Faktoren, von denen der Erfolg abhängig ist, ganz genau, und Heidenhain hat einen derselben, nämlich die Stärke des angewendeten elektrischen Stromes, aufgefunden.

Bei Reizung einer vom Muskel entfernten Nervenstelle ist der Erfolg grösser als bei Reizung einer dem Muskel nahen, woraus man auf ein lawinenartiges Anschwellen der Erregung bei der Fortleitung im Nerven schloss; nach Heidenhain's Ermittlung handelt es sich aber hierbei nur um die erhöhte Erregbarkeit an der Schnittstelle des Nerven.

Die Gallensekretion beschäftigte ihn und seine Schüler zu wiederholten Malen. Es wurde der Druck festgestellt, unter welchem die Galle abgesondert wird, wobei sich, wie es schon Ludwig für die Speichelabsonderung beobachtet hatte, dieser Druck grösser erwies als der Blutdruck, so dass es sich hier nicht um eine einfache Filtration aus dem Blute handeln kann. Die Reizung des die Leber versorgenden Nervus vagus übte keinen Einfluss auf die Gallenabsonderung aus; auch änderte sich die Gallenmenge nicht, wenn nach Verletzung einer Stelle

des verlängerten Markes, bei dem sogenannten Zuckerstich, in Folge der Einwirkung auf die Leber Zucker im Harn auftritt.

Es reihten sich Untersuchungen über die Körpertemperatur an, wobei sich ergab, dass das Gehirn wärmer ist als selbst das Aortenblut.

Wichtige Beiträge hat er zur Lehre von der Innervation des Herzens und der Blutgefässe geliefert. Bei Reizung des Nervus vagus am Halse wird nicht nur die Zahl der Herzschläge geringer, sondern es nimmt auch die Stärke der Zusammenziehung des Herzens ab und die Erschlaffung wird grösser; die beiden Wirkungen, die geringere Zahl der Herzschläge und die geringere Stärke der Contraktion, sind unabhängig von einander, da bei gewissen Reizungsarten Schwächung ohne Verlangsamung erfolgen kann. Die Fasern, welche bei der Reizung den Stillstand des Herzens in Erschlaffung hervorrufen, werden dem Nervus vagus vom Nervus accessorius Willisii beigemischt.

Er stellte mit Ostroumoff fest, dass die in den peripheren Nervenstämmen verlaufenden, die Blutgefässe verengernden und erweiternden Nervenfasern eine verschiedene Erregbarkeit besitzen, indem die letzteren durch einzelne schwache Induktionsschläge, die ersteren durch starke gereizt werden. Von weiterem Interesse sind die zum Theil mit Grützner angestellten Versuche über die sogenannten Gefässreflexe: eine ganz leichte Reizung der sensiblen Nerven eines Hautbezirks, z. B. durch Streichen oder Anblasen, bewirkt eine Erhöhung des Blutdruckes in den Arterien durch die Zusammenziehung der Muskeln innerer Gefässe bei gleichzeitiger Erweiterung der äusseren Haut- und Muskelgefässe; durch diese verschieden starke Innervation der inneren und äusseren Gefässmuskeln wird die Blutvertheilung und die Wärme im Körper regulirt, indem in Folge der Erhöhung des Blutdruckes das Blut schneller und reichlicher durch die erweiterten Hautgefässe strömt und mehr Wärme nach Aussen unter Abnahme der Bluttemperatur abgegeben wird.

Unstreitig von der grössten Bedeutung und dem grössten

Umfang sind die Arbeiten Heidenhain's über das Zustandekommen der Sekretion der Drüsen. Die Verpflichtung, neben der Physiologie auch die Histologie zu lesen und die mikroskopischen Curse abzuhalten, waren wohl Veranlassung, den Beziehungen zwischen der feineren Struktur und der Funktion der Organe seine besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Er war, nach dem bahnbrechenden Vorgange von Ludwig, einer der Ersten, der die noch lebenden Zellen während ihrer Thätigkeit untersuchte, während die Anatomen früher zumeist nur die todten Gebilde besichtigt hatten im Glauben, dieselben verhielten sich in ihrer Form ebenso wie die lebendigen. Durch die mikroskopische Beobachtung der lebendigen Drüsenzellen hat Heidenhain das Verständniss der so geheimnissvollen Vorgänge bei der Absonderung des Sekretes um einen guten Schritt gefördert.

Bei den Speicheldrüsen unterscheidet man Eiweissdrüsen mit einem dünnflüssigen schleimfreien Sekret, und Schleimdrüsen mit einem zähen schleimhaltigen Sekret. Heidenhain zeigte, dass die Drüsenzellen der beiden Formen verschieden gestaltet sind und dass die ruhenden Zellen ganz anders beschaffen sind wie die thätigen, Sekret absondernden Zellen. — Die Unterkiefer-Speicheldrüse wird nach Ludwig's Versuchen von zwei die Absonderung bedingenden Nerven versorgt, die Reizung des einen Nerven, der Paukensaite des Nervus facialis, macht Absonderung eines dünnflüssigen Sekretes unter Erweiterung der Blutgefässe der Drüse, die Reizung des anderen Nerven, des Nervus sympathicus dagegen die eines zähen Sekretes unter Verengerung der Blutgefässe. Zugleich mit dieser verschiedenen chemischen Zusammensetzung des Sekretes erkannte Heidenhain eine Veränderung in der Form der Drüsenzellen. Auch ermittelte er, dass der grössere Blutzufluss bei der Erweiterung der Blutgefässe nicht die Ursache der Absonderung des Sekretes ist, wie man hätte glauben können, sondern eine Beeinflussung der Drüsenzellen, da nach Vergiftung der letzteren mit Atropin durch Reizung der Paukensaite keine Sekretion mehr eintritt, wohl aber noch die Er-

weiterung der Blutgefässe. — Bei längerer Reizung der sekretorischen Nerven nimmt der Gehalt des Sekretes an festen, namentlich an organischen Bestandtheilen ab, offenbar, weil die Erzeugung der organischen Bestandtheile aus anderen eine längere Zeit in Anspruch nimmt als die Ausscheidung der schon vorgebildeten Mineralbestandtheile.

In den Labdrüsen des Magens fand er ebenfalls zwei Arten von Zellen, die von ihm sogenannten Belagzellen und die Hauptzellen; in den Schleimdrüsen am Pförtner kommen nur die letzteren vor. In den Hauptzellen wird der eine bei der Magenverdauung wirkende Stoff, das Ferment oder das Pepsin, erzeugt, in den Belagzellen der andere, die freie Salzsäure. Die Zellen sind verschieden geformt im Hungerzustande und während der Sekretion und Verdauung.

Die Zellen der Bauchspeicheldrüse bestehen aus zwei ungleich gestalteten Hälften, einer Aussen- und einer Innenzone; bei der Sekretion nimmt die letztere durch Ausstossen des Sekretes an Volumen ab, während zugleich die erstere sich verbreitert durch Aufnahme von neuem Material zur Abgabe an die geschwundene Innenzone. Von Wichtigkeit ist sein Nachweis, dass das Eiweiss verdauende Ferment des Pankreassaftes, das Trypsin, nicht als solches schon in den Drüsenzellen vorkommt, sondern nur eine noch nicht wirksame Vorstufe desselben, das Zymogen, da sonst die Drüsenzelle durch das Ferment verdaut würde.

Endlich schlossen sich die glänzenden Untersuchungen über den Bau der Nieren und über die Theorie der Harnabsonderung an mit dem wichtigen Ergebniss, dass in den Zellen der Harnkanälchen die Ausscheidung der organischen Harnbestandtheile stattfindet, in den Malpighi'schen Bläschen der Rindensubstanz aber im Wesentlichen nur die Ausscheidung des Wassers des Harns. Nach Einspritzung der blauen Lösung von indigoschwefelsaurem Natrium in eine Vene des lebenden Thieres sieht man die blaue Färbung niemals in den Malpighi'schen Bläschen, sondern ausschliesslich in den Zellen der gewundenen Harnkanälchen; in gleicher Weise verhalten sich die

harnsauren Salze, die man, namentlich bei den reichlich Harnsäure absondernden Reptilien und Vögeln, krystallinisch in den Zellen der Harnkanälchen abgelagert findet. Die Wasserausscheidung in den Malpighi'schen Bläschen kann nach ihm nicht ausschliesslich durch Filtration durch den Blutdruck zu Stande kommen, denn reichliches Wassertrinken steigert die Harnausscheidung ohne Erhöhung des Blutdruckes, und ein kurz dauernder Verschluss der Nierenarterie bewirkt einen länger anwährenden Stillstand der Harnsekretion durch Schädigung der Epithelzellen der Malpighi'schen Bläschen.

Aus diesen seinen Beobachtungen zog Heidenhain den Schluss, dass die Sekretion der Drüsen nicht ein rein physikalischer Vorgang, bestehend in Filtration und Osmose, wäre, bei dem die Drüsenzellen als Filter nur passiv betheiligt sind, sondern dass dieselbe auf einer aktiven Thätigkeit der Drüsenzelle beruhe. Als man in den vierziger Jahren begann, die Lehren der Physik auf die Vorgänge im Thierkörper anzuwenden, da war es namentlich Carl Ludwig, der in jüngeren Jahren in seinem Lehrbuch der Physiologie darzuthun suchte, dass bei vielen Erscheinungen an der Organisation die Filtration und die Osmose wirksam sind. Diese Erklärungsversuche waren für die damalige Zeit von grösster Bedeutung, indem sie darthaten, dass die Lebenserscheinungen nicht durch die geheimnissvolle und unerforschbare Lebenskraft, sondern durch bekannte physikalische und chemische Vorgänge veranlasst sind. Es ist wohl richtig, dass man anfangs glaubte, dadurch weiter in der Erklärung der Sekretion vorgedrungen zu sein und die grössten Schwierigkeiten schon überwunden zu haben; jedoch hat man nie der lebenden Organisation gar keine Bedeutung dabei zugeschrieben, wie es jetzt nicht selten dargestellt wird, wenn man von einer früheren, rein mechanischen oder rein physikalischen Theorie Ludwigs spricht. Ludwig fand ja selbst den Absonderungsdruck der Drüsen grösser als den Blutdruck oder die Temperatur der thätigen Drüse höher wie des zugeführten arteriellen Blutes, und wenn er sah, dass die Absonderung des Sekrets nur unter dem

Einfluss der Nerven stattfindet, so konnte er doch nicht der Ansicht sein, die Drüse verhalte sich bei der Absonderung wie eine trockene todte Membran. Allerdings musste man immer mehr erkennen, dass die lebende Organisation für die physikalischen und chemischen Wirkungen gewisse Bedingungen stellt, durch welche die letzteren beeinflusst und eigenthümlich gestaltet werden; trotzdem müssen wir die physikalischen und die chemischen Kräfte der Filtration und Osmose als die Triebkräfte für die Sekretion ansehen; ist ja doch auch die jeweilige Beschaffenheit der todten Membran von entscheidendem Einfluss für das Resultat der Filtration und Osmose, ohne dass wir desshalb sagen, es fänden dabei keine physikalischen Prozesse statt. Heidenhain hat durch seine Untersuchungen viel dazu beigetragen, die Bedeutung der lebenden Drüsenzellen für die Sekretion zu erkennen, und er hat gezeigt, dass wir von der Erklärung dieser Erscheinungen weiter wie je entfernt sind. Wir müssen uns jedoch sorglich davor hüten, wieder in den glücklich besiegten, für die Forschung so gefährlichen Vitalismus zu verfallen; es muss vielmehr nach wie vor unser Bestreben sein, zu suchen, welche Bedingungen die Organisation stellt, dass die physikalischen und chemischen Kräfte so eigenthümliche Wirkungen haben. — Heidenhain hat seine durch 20 Jahre lang fortgesetzten Beobachtungen über die Drüsensekretion in L. Hermanns Handbuch der Physiologie zusammengestellt; er war mehr als irgend ein Anderer dazu befähiget und berufen für das grosse, von einer Anzahl von Physiologen bearbeitete Werk diese Lehre zu schreiben; er entledigte sich der schwierigen Aufgabe mit tiefem Verständniss und der ihm eigenen Gewissenhaftigkeit, so dass dieser Theil des verdienstlichen Werkes unstreitig einer der vollendetsten ist.

Eine weitere Reihe von Untersuchungen Heidenhains bezieht sich auf die Vorgänge der Resorption. Auch diese Aufnahme der verdauten Nahrungsstoffe aus dem Darm in die Säfte hat man vielfach als einfache physikalische Prozesse angesehen, die man durch osmotische Versuche, durch Trennung

zweier Stofflösungen durch eine todte Membran, leicht nachahmen könne. J. Bauer und ich haben schon vor 26 Jahren zuerst bewiesen, dass die Aufnahme von Stofflösungen aus einer Darmschlinge eines lebenden Thieres nicht durch reine Osmose wie bei einer todten Membran stattfinden könne; neben Anderem erschien am schlagensten die Resorption des Blutserums aus einer Schlinge, ohne dass die Hauptbedingung der Osmose, die Concentrationsdifferenz, gegeben ist. Niemand hat jedoch auf diese Versuche geachtet, da sie nicht in die Vorstellungen der damaligen Zeit passten; erst als Heidenhain ähnliche Widersprüche der Versuchsresultate mit den Gesetzen der Osmose fand, da gewann die Lehre Eingang, wenn man sich auch nicht erinnerte, wer sie zuerst aufgestellt hat. Ich halte den Namen „physiologische Triebkraft der lebenden Zellen des Darmepithels“ als Ursache der Resorption, welche Heidenhain einführte, für einen nicht ganz glücklichen, weil er nur allzuleicht Missverständnissen bei den Jüngeren ausgesetzt ist, welche darunter eine einheitliche Kraft verstehen werden statt einer Summe von Vorgängen.

Die letzten grösseren Untersuchungen Heidenhains betreffen die Frage nach der Entstehung der Lymphe. Nach den Versuchen von Ludwig wird durch den Blutdruck plasmatische Flüssigkeit durch die Wandungen der Blutcapillaren in die Zwischenräume der Gewebe gepresst, von wo sie als Lymphe in die offenen Anfänge der Lymphgefässe übergeht. Heidenhain suchte dagegen darzuthun, dass es sich dabei nicht um eine einfache Filtration durch eine todte Membran handeln könne, sondern ebenfalls um eine Wirkung der lebenden Endothelzellen der Capillaren. Er hatte nämlich gefunden, dass die Menge der aus dem Milchbrustgang ausfliessenden Lymphe nicht proportional dem arteriellen Blutdruck ist; dann dass der Gehalt der Lymphe an gewissen gelösten Stoffen, z. B. an Traubenzucker grösser sein kann als der des Blutes; und drittens, dass es Stoffe gibt, wie z. B. Krebsmuskelextrakt, Blutegelextrakt, Pepton etc., welche ohne Aenderung des Blutdrucks die Lymphmenge sehr steigern, und er meinte, dass diese Stoffe

als Lymphagoga die Thätigkeit der Endothelzellen anregten. Es sind von Manchen auf Versuche gestützte Einwendungen dagegen erhoben worden, und es scheint mir, als ob Heidenhain hierin nicht ganz im Recht ist. Der Blutdruck ist die nächste Ursache und die Triebkraft für den Durchgang der plasmatischen Flüssigkeit durch die Capillargefässmembran; jedoch modificiren sicherlich die letzteren das Filtrat, sehen wir doch, dass bei der Filtration einer eiweiss- und salzhaltigen Flüssigkeit durch todte Membranen das Filtrat von anderer Zusammensetzung ist als die auf das Filter gegossene Flüssigkeit. Jedenfalls gebührt Heidenhain das Verdienst, die wichtige Frage wieder angeregt und zu ihrem Entscheid beigetragen zu haben.

Heidenhain hat auch die vielfach noch räthselhaften Erscheinungen der Hypnose, welche unter der Behandlung von Laien so häufig getrübt und falsch aufgefasst werden, wissenschaftlich zu erforschen und dem Verständniss näher zu bringen gesucht. Er gelangte dabei zu dem wichtigen Resultate, dass bei der Hypnose die Reflexerregbarkeit gesteigert ist in Folge des Ausfalls der hemmenden Wirkung der Grosshirnrinde oder des Willens; ferner, dass das Bewusstsein herabgesetzt ist, und zwar dadurch, dass die zur Herbeiführung der Hypnose angewendeten schwachen Sinnesreize die Thätigkeit der Grosshirnrindenzellen aufheben; in diesem Zustande führen unbewusste Sinneseindrücke zu unbewussten Reaktionen. Dem entsprechend gelang es ihm mit Bubnoff, beim Hunde durch schwache Reize der Grosshirnrinde viele Muskelbewegungen zu hemmen.

Heidenhain war ein nüchterner gewissenhafter Forscher von feiner Beobachtungsgabe, der es sich in unablässigem Streben angelegen sein liess, neue Thatsachen aufzufinden und daraus vorsichtig seine Schlüsse zu ziehen. Er ist dadurch zu einem der verdientesten und angesehensten Physiologen unserer Zeit geworden.

## Rudolf Leuckart.

Der Nestor der deutschen Zoologen, Rudolf Leuckart, Professor der Zoologie an der Universität Leipzig, ist am 6. Februar 1898 in seinem 76. Lebensjahre aus dem Leben geschieden.

Mit ihm ist einer der grossen Männer dahin gegangen, welche der Zoologie, die früher im Wesentlichen nur in einer äusserlichen Beschreibung und Classifikation der Thiere bestand, neue Ziele gewiesen haben. Ueber ein halbes Jahrhundert wirkte er als ein in mehreren Stücken bahnbrechender, ganz hervorragender Forscher mit dem reichsten Erfolge.

Er war ein ächter Gelehrter: voller Begeisterung für seine Wissenschaft und von unermüdlicher Schaffensfreude.

Rudolf Leuckart wurde am 7. Oktober 1822 in der ehemaligen braunschweigischen Universitätsstadt Helmstedt geboren. Als Knabe erhielt er durch seinen Oheim Friedrich Sigismund Leuckart, welcher Professor der Zoologie an der Universität in Freiburg im Breisgau war, die ersten Anregungen für die Naturwissenschaft und die Medizin. Er studirte an der altberühmten Universität Göttingen und zeichnete sich noch als ganz junger Student durch einige selbständige Arbeiten, darunter eine preisgekrönte, aus. Er schloss sich besonders an den Physiologen Rudolf Wagner an, der sich durch seine mikroskopischen Beobachtungen und deren Anwendung auf die physiologischen Vorgänge einen bedeutenden Namen gemacht hat und ein höchst anregender Lehrer war; ihm verdankte Leuckart die Anleitung zur mikroskopischen Untersuchung der thierischen Gebilde sowie seine auf die Lebensweise der Thiere gerichtete Auffassung. Wagner erkannte den Werth des strebsamen Jünglings; er machte ihn zu seinem Assistenten am physiologischen Institute und betraute ihn zugleich mit der Ausarbeitung seines Lehrbuchs der Zootomie. Im Jahre 1847 fand seine Habilitation als Privatdozent für Zoologie und Physiologie statt; bald wurde er als ausserordentlicher Professor der Zoologie nach der damals durch Liebig, Bischoff, Buff, Kopp und Andere in hohem An-

sehen stehenden Universität Giessen gerufen, woselbst er 1855 zum ordentlichen Professor der Zoologie und vergleichenden Anatomie vorrückte. Im Jahre 1870 erfolgte der ehrenvolle Ruf als Vertreter der Zoologie und Zootomie an die Universität Leipzig, an welcher er bis an sein Lebensende als einer der beliebtesten und ausgezeichnetsten Lehrer und als das Haupt einer grossen Schule höchst erspriesslich thätig war.

Durch seine gewaltige Arbeit hat er, wie vorher schon erwähnt, wesentlich dazu beigetragen, der Forschung in der Zoologie eine neue fruchtbare Richtung zu geben; Joh. Müller, Rudolf Wagner und Andere hatten auf die Bedeutung der allgemeinen Formverhältnisse der Thiere, ihres Lebens, ihrer Entwicklung, der biologischen Beziehung der einzelnen Classen derselben für die Erkenntniss der Thierwelt aufmerksam gemacht und so gegenüber der Systematik die jetzige vergleichend-morphologische Betrachtungsweise angebahnt. Diesen Weg betrat Leuckart; er erkannte alsbald klar, dass vor Allem die niederen Formen der wirbellosen Thiere über jene Verhältnisse den besten Aufschluss geben, und so widmete er der Durchforschung der niederen Thiere vorzugsweise seine Thätigkeit; auf diesem Gebiete liegen auch seine grössten Verdienste. Dabei verwendete er als einer der ersten äusserst geschickt den Versuch am Thier, um über die Entwicklung gewisser Thierformen näheren Aufschluss zu erhalten; auch muss erwähnt werden, dass er sich die Methoden und Hilfsmittel zu diesen Untersuchungen zum grossen Theil erst selbst schaffen musste. Die Wissenschaft verdankt seiner scharfsinnigen Beobachtung eine Menge neuer Thatsachen und Erkenntnisse über das Leben, die Entwicklung, Verwandlung und feinere Struktur vieler niederen Thiere.

Es können hier von den in zahlreichen Monographien, sowie in akademischen und periodischen Schriften niedergelegten Arbeiten nur die bedeutungsvollsten hervorgehoben werden, um die Art ihres Autors zu charakterisiren.

Eine seiner ersten Veröffentlichungen waren die mit Frey herausgegebenen „Beiträge zur Kenntniss wirbelloser Thiere“.

An diese Arbeit schloss sich eine weitere an über die Morphologie und die Verwandtschaftsverhältnisse niederer Thiere. Mit dieser für die Systematik und die Morphologie bedeutungsvollen Leistung stellte sich der junge 25 jährige Privatdozent in die erste Reihe der Zoologen. Cuvier hatte in dem von ihm aufgestellten Thierkreise der Radiata die Stachelhäuter, die Quallen und die Polypen zusammengefasst; in dem Streben, die verschiedenen Bildungen nach ihrem inneren Charakter zu beurtheilen, war es Leuckart aufgefallen, dass unter den Radiaten Thiergruppen von verschiedenem Bau sich finden; er stellte in Folge davon einen besonderen Typus der Pflanzenthiere unter dem Namen der Coelenteraten, welcher die Cuvier'schen Classen der Polypen und der Scheibenquallen umfasst, zusammen und charakterisirte ihn so scharf und bestimmmt, dass diese Coelenterarten gegenwärtig von allen Zoologen als eine natürlich abgegrenzte Gruppe dem Thiersysteme einverleibt wurden.

Andere sinnreiche Auffassungen und Deutungen von verschiedenen bisher unerkannt gebliebenen verwickelten Organisations-Verhältnissen bei den Siphonophoren oder Schwimmpolypen, welche er bei seinem wiederholten längeren Aufenthalte an den Meeresküsten zu studiren Gelegenheit hatte, gaben ihm in der Schrift über den Polymorphismus der Individuen oder die Erscheinungen der Arbeitstheilung in der Natur (1851), sowie in den zoologischen Untersuchungen (3 Hefte, 1853—54) Veranlassung, diese höchst complizirten Thierorganismen als Animalia composita mit Arbeitstheilung aufzufassen und für diese eigenthümliche Lebensthätigkeit solcher höchst zusammengesetzter, früher für Einzelwesen gehaltener Thierkolonien den Namen Polymorphismus vorzuschlagen, welche Bezeichnung mit ihrer eigenthümlichen Bedeutung allgemein angenommen worden ist.

Es folgten Untersuchungen über den feineren Bau der Schalenhaut der Insekteneier und ihrer Mikropyle, durch welche die Samenfäden in das Innere des Eies eindringen. Durch seine Studien über den Generationswechsel und über die Ent-

wicklung des Eies ohne Befruchtung, die Parthenogenesis, bei den Insekten, besonders den Bienen, hat er sich mit grossem Erfolge an der Erweiterung unserer Kenntnisse über diese merkwürdigen Vorgänge betheiligt. Auch hat er über die Fortpflanzung und Entwicklung der Pupiparen, die zu den Zweiflüglern gehörigen Lausfliegen, interessante Untersuchungen angestellt.

Von grösstem Einflusse waren Leuckart's Resultate, welche er durch äusserst mühsame und mit seltener Ausdauer durchgeführte Beobachtungen und Experimente über die merkwürdigen Wanderungen und damit verbundenen Metamorphosen der verschiedenen Schmarotzerthiere erhalten hat. Es ist dies sein fruchtbarstes und eigenstes Arbeitsgebiet gewesen, welches, bis dahin noch zum grossen Theil in Dunkelheit gehüllt, von ihm in bewundernswerther Weise aufgehellt worden ist; sein Name ist dadurch in den weitesten Kreisen bekannt geworden.

In der Abhandlung über die Blasenbandwürmer und ihre Entwicklung thut er dar, wie die durch die Entleerungen der Träger auf Düngerhaufen oder auf Pflanzen oder in Wasser gelangten Eier mit der Nahrung in den Darmkanal von Thieren kommen, von wo die daraus entstandenen Embryonen durch die Darmwand in die Blutgefässe und die verschiedenen Organe wandern, in denen sie zu Blasen, Finnen genannt, auswachsen, welche ein nothwendiges Entwicklungsstadium darstellen und, indem sie verzehrt werden, in den Darm eines neuen Thieres gerathen, um daselbst erst in den Zustand des geschlechtsreifen Bandwurms überzugehen. — Die berühmten Untersuchungen über Trichina spiralis ergaben, dass die im Darm des Menschen und vieler, vornehmlich freischfressender Säugethiere befindliche Brut ebenfalls die Darmwandung derselben durchsetzt und in die Muskeln einwandert, wo sie zu spiralig zusammengerollten Würmchen auswachsen; mit dem Fleische kommen diese Würmchen in den Darm eines anderen Warmblüters, werden dorten zu Geschlechtstrichinen, welche sich begatten und neue Brut erzeugen.

Ebenso verdankt man Leuckart die Kenntniss von dem Bau, der Entwicklungsgeschichte und der Metamorphose der

Pentostomen oder Zungenwürmer, sowie der Entwickelungsgeschichte des Leberegels. In seinen „neuen Beiträgen zur Kenntniss des Baues und der Lebensgeschichte der Nematoden“ berichtet er über eine Anzahl höchst sonderbarer zu den Fadenwürmern gehörigen Parasiten niederer Thiere.

Sein Lehr- und Handbuch über die Parasiten des Menschen und die von ihnen herrührenden Krankheiten, sowie seine allgemeine Naturgeschichte der Parasiten sind als Hauptwerke in dieser Richtung zu betrachten. Es haben gerade diese hierbei gemachten Entdeckungen nicht allein die zoologische Wissenschaft im höchsten Grade gefördert, sondern es haben dieselben auch die für die praktische Medizin so wichtige Lehre von den Parasiten gänzlich umgestaltet und eine bisher ganz dunkel gebliebene Seite der Gesundheitslehre in das klarste Licht gesetzt.

Ausserdem verdient noch erwähnt zu werden: die mit C. Bergmann (1852) bearbeitete anatomisch-physiologische Uebersicht des Thierreiches, ein Werk, welchem bis heute keines seiner Art folgte; dann der Artikel „Zeugung“ in Rudolf Wagner's Handwörterbuch der Physiologie, ein Muster klarer, auf eine Fülle von Beobachtungen gestützter Darstellung; ferner die für das Handbuch der gesammten Augenheilkunde von Graefe und Sämisch gelieferte vortreffliche Darstellung der vergleichenden Anatomie des Auges.

Grossen Nutzen haben die von 1848 bis 1879 für das Archiv der Naturgeschichte von ihm bearbeiteten Jahresberichte über die wissenschaftlichen Leistungen in der Naturgeschichte der niederen Thiere gestiftet; ebenso die mit seinem Schüler Chun herausgegebene Bibliotheca zoologica.

Die Deutsche zoologische Gesellschaft verliert in ihm ihr einziges Ehrenmitglied und ihren ersten Vorsitzenden, der wohl am meisten zum Emporblühen dieser angesehenen Vereinigung beigetragen hat.

Der so überaus verdiente Forscher mit seinem lebhaften Geist, seiner anregenden lebensvollen Art, seinem schlichten freundlichen Wesen wird in der Wissenschaft, sowie in der Erinnerung bei seinen Freunden und Schülern fortleben.

## Johann Japetus Smith Steenstrup.[1])

In Kopenhagen starb am 20. Juni 1897 im hohen Alter von 84 Jahren der berühmte Naturforscher Johann Japetus Steenstrup, weiland Professor der Zoologie an der Universität und Direktor des naturhistorischen Museums. Er war mit Recht einer der angesehensten Gelehrten Dänemarks, der auf mehreren Gebieten der Naturwissenschaft Hervorragendes geleistet hat.

Er wurde am 8. März 1813 auf dem Pfarrhofe in Vang in Nord-Jütland geboren. An der Kopenhagener Universität bildete er sich in Philosophie, Naturwissenschaft und Medizin aus. Schon während seiner Studienzeit lenkte er durch seine Strebsamkeit und seine Kenntnisse die Aufmerksamkeit seiner Lehrer auf sich, so dass er noch als Studirender den bekannten Professor Forchhammer auf einer geognostischen Untersuchungsreise nach Börnholm begleiten durfte; dann erforschte er (1838) auf Veranlassung der Rentkammer die Torfmoore in Nord-Jütland und bereiste 1839 Island zu naturwissenschaftlichen und geognostischen Zwecken. Nach Beendigung seiner Studien erhielt er alsbald die Stelle eines Lectors für Botanik und Mineralogie an der Akademie zu Soroe; in Folge seiner hervorragenden Arbeit über den Generationswechsel wurde er (1845) als ausserordentlicher Professor der Zoologie an die Universität nach Kopenhagen berufen; 1848 wurde er zum Direktor des naturhistorischen Museums und 1850 zum ordentlichen Professor in der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät ernannt; von 1865—1878 war er Sekretär der kgl. dänischen Gesellschaft der Wissenschaften. Seit 1885 hat er sich von seinen Aemtern zurückgezogen.

Steenstrup war ein ausgezeichneter Beobachter und Erforscher der uns umgebenden Natur. Seine Thätigkeit war eine höchst vielseitige; denn er hat überaus zahlreiche Arbeiten

[1]) Siehe Leopoldina 1897, Nr. 8, S. 114, und Verhandlungen der anthropol. Gesellschaft zu Berlin 1897, S. 311.

auf den Gebieten der Zoologie, vergleichenden Anatomie, Mineralogie, Botanik, Geologie, Paläontologie, Urgeschichte und Archäologie ausgeführt.

Sein erstes grösseres Werk, das Akademie-Programm vom Jahre 1842 über den Generationswechsel, war geradezu bahnbrechend und begründete seinen Ruhm; es blieb die Aufstellung dieses merkwürdigen Entwickelungsgesetzes auch seine bedeutendste Leistung. Man versteht bekanntlich darunter den gesetzmässigen Wechsel einer geschlechtlich entwickelten Generation mit einer oder mehreren ungeschlechtlich sich fortpflanzenden Generationen. Der Dichter Adalbert v. Chamisso hatte zuerst einen Vorgang der Art bei den Salpen gefunden; derselbe blieb aber vereinzelt und länger als zwei Dezennien unbeachtet, bis ihn Steenstrup an einer Reihe von niederen Thieren, an Medusen, Trematoden und Aphiden erkannte und einheitlich erfasste. Die Geschlechtsthiere erzeugen dabei Nachkommen, welche zeitlebens von ihren Eltern verschieden bleiben, jedoch ebenfalls fortpflanzungsfähig sind, indem sie auf ungeschlechtlichem Wege als sogenannte Ammen durch Knospung oder Keimbildung eine Brut hervorbringen, welche entweder zu der Form und Organisation der Geschlechtsthiere zurückkehrt oder sich abermals ungeschlechtlich vermehrt und erst in ihren Nachkommen wieder zu den Geschlechtsthieren führt.

Ausserdem hat er noch auf verschiedenen anderen Zweigen der Zoologie mit Erfolg gearbeitet. Hierher gehören: weitere Untersuchungen über die Entwickelung mehrerer Formen niederer Thiere, die Untersuchungen und Betrachtungen über den Hermaphroditismus, dann die Beobachtungen über den Hectocotylus bei Cephalopoden, worunter man einen mit Spermatophoren gefüllten Arm versteht, der sich vom männlichen Leibe ganz abtrennt und den Samen in die Mantelhöhle des Weibchens überträgt, und ferner den Nachweis, dass die Augen bei den Flachfischen ursprünglich symmetrisch angebracht sind und erst bei der weiteren Entwickelung ihren Platz verändern.

In späterer Zeit nahmen vorzüglich Aufgaben der prähistorischen Archäologie und der Anthropologie sein Interesse

in Anspruch; er war einer der Ersten, der auf dieses vorher häufig mehr dilettantenhaft betriebene Gebiet die strenge Methode der Naturwissenschaft anwandte. Er hat in dieser Weise die dänischen Kjokkenmöddinger oder Küchenabfälle erforscht, besonders am Kattegat befindliche Hügel aus Muschelschalen und Thierknochen, welche die Ueberreste der Mahlzeiten der Menschen aus der Steinzeit darstellen. Er hat die Waldmoore von Vidnesdam und Lillemose im nördlichen Seeland ausgegraben und genau geologisch-geognostisch untersucht, und dadurch deren Bedeutung für die Entwickelung der ältesten prähistorischen Flora und Fauna Dänemarks, sowie für das Erscheinen des Menschen dargelegt. Ueberall, wo es galt, die Fragen nach dem ältesten Vorkommen menschlicher Thätigkeit zu entscheiden, war er persönlich betheiligt; so bei der archäologischen Untersuchung der nordischen Brakteaten, alter aus dem 12.—17. Jahrhundert stammender, nur auf der einen Seite geprägter Münzen oder bei der Prüfung der Mammuthjäger-Station bei Předmost in Mähren, welche er noch in hohem Alter (1888) aufsuchte. Die reichhaltigen Sammlungen diluvialer Thierreste im Kopenhagener Museum bilden die Grundlage für eine genauere Bestimmung der vorhistorischen Thierreste. Durch seine Forschungen und dadurch, dass er nicht müde wurde, die Arbeiten Anderer auf diesem Gebiete mit Rath und That zu unterstützen, hat er einen grossen Einfluss auf die Entwickelung dieses jungen Wissenszweiges ausgeübt.

## Julius Sachs.[1])

Mit dem am 29. Mai 1897 in Würzburg im 65. Lebensjahre verstorbenen Botaniker Julius Sachs ist einer der verdientesten Naturforscher dahingegangen. Man kann wohl sagen, dass er der Begründer der experimentellen Pflanzenphysiologie

[1]) Mit Benützung des Nekrologs von Karl Göbel in der Flora, Ergänzungsband 84 zum Jahrgang 1897, S. 101; dann in Leopoldina 1897, Nr. 6, S. 94, und von Hauptfleisch in Würzburg in der Münchener med. Wochenschrift 1897, Nr. 26, S. 709.

und längere Zeit der sichere Führer auf diesem schwierigen Gebiete war. In der That, nach einigen bedeutenden Anfängen, welche die Experimental-Physiologie der Gewächse im vorigen Jahrhundert gemacht hatte, war dieselbe fast vollständig zuerst durch die Systematik, dann durch die Morphologie und seit den fünfziger Jahren durch die mikroskopischen Arbeiten der grossen Botaniker Mohl, Hofmeister, Nägeli und De Bary verdrängt worden. Da war es nun vor Allen Sachs, welcher die chemischen Beobachtungen und das physiologische Experiment wieder aufnahm und mit grösstem Erfolge weiter führte. So kam es, dass man in der Pflanzenphysiologie erst mit der Anwendung der neuen durch die Physik und die Chemie geschenkten Hilfsmittel anfing, als in der Thierphysiologie diese Mittel schon viele Früchte gezeitigt hatten. Selbst Liebig ist mit der Anwendung der Chemie auf die stofflichen Vorgänge im Thierkörper tiefer eingedrungen als in die gleichen Vorgänge in den Pflanzen, wo er vorzüglich nur den Kreislauf des Stoffes zwischen den Thieren und den Pflanzen klarer legte und die Bedeutung der Mineralbestandtheile erkannte. Es darf uns dies nicht Wunder nehmen, denn diese Verhältnisse sind in den Pflanzen, bei denen von den einfachsten Nahrungsstoffen aus ein allmählicher Aufbau zu den complizirtesten Kohlenstoff-Verbindungen durch viele Zwischenglieder hindurch stattfindet, ungleich schwieriger zu erkennen wie bei dem höheren Thier, wo so Vieles leicht zugänglich ist. Denn man vermag bei dem letzteren die Vorgänge an den einzelnen Organen zu verfolgen; wie wenig wüssten wir z. B. über die Verdauung der Nahrungsstoffe, über die Zersetzungen der Stoffe im Thierkörper und deren Produkte, wenn wir nur an den einfachsten Thierformen unsere Beobachtungen machen könnten. Es ist Sachs geglückt, diese grossen Schwierigkeiten zum Theil zu überwinden; er hat den Weg gezeigt, wie man an den Pflanzen Aufschlüsse hierüber zu erhalten vermag und dabei viele neue Thatsachen aufgefunden und fruchtbare Ideen zu weiterer Forschung angegeben.

Sachs wurde am 2. Oktober 1832 in Breslau geboren,

wo sein Vater Graveur war, von dem er das künstlerische Talent ererbte und das Zeichnen lernte. Er besuchte das Gymnasium zu Breslau, musste aber daselbe verlassen, da seine Eltern früh starben und er nicht die Mittel zum weiteren Studium besass; so war er von seinem 15. Lebensjahre an wesentlich auf sich allein angewiesen, so dass es ihm recht schwer wurde, sich den Lebensunterhalt zu verschaffen. Aber gerade dies war es, was ihn zur Arbeit anspornte. Schon am Gymnasium beschäftigte er sich mit den beschreibenden Naturwissenschaften, er zerlegte Thiere und sammelte eifrig Pflanzen, die er mit Hilfe der Flora von Scholz bestimmte. Es war ein glücklicher Zufall, dass er damals mit den Söhnen des Physiologen Purkynè bekannt geworden war; durch diese hatte der letztere von der Neigung des Jünglings zu der Naturwissenschaft sowie von seinem Zeichentalent gehört und bot ihm bei seiner Berufung nach Prag an, sein Privatassistent zu werden, wodurch Sachs wenigstens vor der äussersten Noth bewahrt war. Er behielt diese Stelle, in der er fast nur zu zeichnen hatte, sechs Jahre lang; der Umgang mit Purkynè hat jedoch gewiss auch belehrend und anregend auf ihn eingewirkt. Dieser hervorragende Physiologe hat sich um die mikroskopische Anatomie und um die Physiologie des Auges grosse Verdienste erworben: er war der Entdecker des Keimbläschens, der Leberzellen, der Schweissdrüsen und der Flimmerbewegung und er beobachtete die drei Reflexbilder am Auge, das sogenannte Accommodationsphosphen, mehrere subjektive Gesichtsempfindungen, die Schattenfigur der Netzhautgefässe, das in den Chorioidealgefässen strömende Blut bei Druck auf das Auge, sowie die Erscheinungen bei elektrischer Reizung der Netzhaut. Es existirt von ihm auch eine botanische Abhandlung (de cellulis antherarum fibrosis nec non de granorum pollinarium formis commentatio phytotomica, Breslau 1830); und er war der Erste, der ein physiologisches Laboratorium einrichtete. Sachs hatte es durch eisernen Fleiss neben seiner Beschäftigung bei Purkynè ermöglicht, die Maturitätsprüfung nachzuholen und an die Universität überzutreten. Er hörte

zwar daselbst Vorlesungen über Mathematik, Physik, Chemie und Philosophie, aber das Meiste hat er doch durch eigenes Studium gelernt. Er betrieb für sich die Zoologie und die Botanik; nachdem er sich mit dem Schleiden'schen Lehrbuch der Botanik bekannt gemacht und sich in Herstellung mikroskopischer Präparate geübt hatte, machte er seine ersten wissenschaftlichen Untersuchungen über die Entwickelungsgeschichte von Pilzen. Er habilitirte sich dann nach Besiegung mannigfacher Hindernisse in Prag als Privatdozent für Pflanzenphysiologie. Und nun begann seine unermüdliche und fruchtbare wissenschaftliche Thätigkeit; es war ein unablässiges, rastloses Streben nach Erkenntniss, das sein Wesen charakterisirte; er erzählte selbst, er habe während 20 Jahren täglich 14—15 Stunden geforscht und gedacht. In seiner Wohnung stellte er Versuche über Verdunstungsphänomene und Wasserbewegung in Landpflanzen an, dann seine berühmt gewordenen mikroskopischen Beobachtungen an den Keimpflanzen, durch die er die Umgestaltung der in den Kotyledonen abgelagerten Stoffe erkannte.

Aber in Prag konnte er nicht bleiben; Purkynè hatte sich auffallender Weise der czechischen Bewegung mit Fanatismus angeschlossen und diese liess den deutsch Fühlenden nicht aufkommen. Da erbat sich der verdiente Vorstand der sächsischen land- und forstwirthschaftlichen Akademie in Tharandt, der Chemiker Stöckhardt, von Sachs einen Bericht über den Nutzen der Pflanzenphysiologie für die Landwirthschaft, in Folge dessen er als physiologischer Assistent an dieser Akademie angestellt wurde, als welcher er auch öffentliche Vorträge in landwirthschaftlichen Versammlungen zu halten hatte. Von da wurde er an die landwirthschaftliche Akademie in Poppelsdorf bei Bonn als Lehrer der Botanik, Zoologie und Mineralogie berufen, an der er dann bald die Professur für Pflanzenphysiologie erhielt.

In den sechs Jahren seines Bonner Aufenthaltes hatte er sich durch seine Arbeiten schon so bekannt gemacht, dass er als Nachfolger des nach Strassburg berufenen De Bary die

Professur der Botanik an der Universität in Freiburg erhielt und dann nach drei Semestern die in Würzburg; er blieb der letzteren Universität trotz vieler verlockender Berufungen nach Jena, Heidelberg, Bonn, Wien, Berlin und München treu und war einer ihrer ersten Zierden.

Er hat daselbst eine grosse Schule für experimental-physiologische Arbeiten gebildet, aus der die bedeutendsten der jüngeren Botaniker hervorgingen; auch bei den Vorlesungen hat er durch seinen ausserordentlich klaren und durch einfachste Experimente erläuterten Vortrag allgemeines Interesse für die Botanik zu erwecken verstanden.

Bei der Würdigung der wissenschaftlichen Thätigkeit von Sachs muss bedacht werden, dass es vor ihm eine eigentliche Pflanzenphysiologie kaum gab; die Untersuchungen von Ingenhouss, Saussure, Liebig, Boussingault etc. lieferten nur die ersten Vorstellungen über die stofflichen Vorgänge bei der Ernährung der Pflanzen; Sachs musste, wie vorher schon gesagt worden ist, vielfach erst suchen, wie man den Vorgängen in der Pflanze durch das Experiment beikommen kann, und er musste die Apparate zur Verfolgung derselben ersinnen, wozu er ein ganz besonderes Geschick besass.

Bei seinen ersten vorher erwähnten Untersuchungen über die in den Keimpflanzen abgelagerten Stoffe erkannte er, dass das Stärkemehl nicht nur eine sekundäre Einlagerung im Chlorophyll ist, sondern dass es das erste sichtbare Produkt des unter dem Einflusse des Lichtes und der Mitwirkung des Chlorophylls stattfindenden Aufbaues aus den einfachsten chemischen Verbindungen darstellt; es wird von hier aus zu den wachsenden Knospentheilen und zu den Reserve aufspeichernden Geweben geführt. Er hat sich später nochmals mit der Entstehung des Stärkemehls beschäftigt und eine einfache Methode zur quantitativen Bestimmung desselben mittelst der Jodprobe angegeben.

Als Frucht seiner Thätigkeit an der landwirthschaftlichen Akademie war es ihm gelungen, Landpflanzen ohne Mithilfe der Erde in wässerigen Nährlösungen zu kultiviren und keim-

fähige Samen daraus zu erhalten. Obwohl anfangs die Bedeutung dieser Versuche nicht genügend erkannt wurde und namentlich Knop sie in ungerechter Weise angriff, ja selbst Nägeli sie hämischer Weise als „agrikultur-chemische“ bezeichnete, so haben sie doch wichtige Aufschlüsse über die Ernährung der Pflanzen gebracht: sie zeigten namentlich, welche Mineralbestandtheile zum Gedeihen der Pflanzen nothwendig sind und dass ohne dieselben kein Aufbau der complizirten Kohlenstoff-Verbindungen stattfindet.

Daran reihten sich seine eingehenden Versuche über die Bedeutung des Chlorophylls für die synthetischen Prozesse in der Pflanze an. Dieser grüne Farbstoff ist nach ihm die Stätte, wo die Abscheidung des Sauerstoffs aus dem aufgenommenen Wasser und der Kohlensäure und die Bildung höherer sauerstoffärmerer Kohlenstoff-Verbindungen stattfindet. Dabei wurde auch die seit Liebig's verwerfender Meinung nur wenig beachtete Bedeutung der Sauerstoff-Athmung der Pflanze klar gestellt, dass dieses Gas für das Leben der Pflanze ebenso nothwendig ist wie für das des Thieres, indem es Zersetzungen unter Bildung von Kohlensäure und Wasser bedingt und kinetische Energie (Wärmebewegung) für die Vorgänge in der Pflanze liefert.

Weitere Untersuchungen brachten das erste Verständniss der Thätigkeit und der Funktion der Wurzeln, deren Ausgang die Beobachtung war, dass polirte Marmorplatten durch die Wurzeln corrodirt werden.

Von grundlegender Bedeutung sind seine mikroskopischen und mikrochemischen Arbeiten über die Wanderungen, die chemischen Veränderungen und den Verbrauch der Reservestoffe bei dem Wachsthum der Organe.

S a c h s wandte sich darnach anderen Aufgaben zu: dem Einflusse der Temperatur und des Lichtes auf das Wachsthum der Pflanze.

Er beschäftigte sich viel mit der Untersuchung der drei sogenannten Cardinalpunkte der Temperatur, dem Minimum, Optimum und Maximum derselben, und stellte fest, nach welchen Gesetzen die Keimung von der Temperatur abhängig ist, dann

dass eine bestimmte Temperatur für das Ergrünen höherer Pflanzen nothwendig ist, und dass es für reizbare Organe eine vorübergehende Kälte- und Wärmestarre gibt.

Von besonderer Tragweite sind die eingehenden Untersuchungen über die Wirkung des Lichtes auf die Pflanze: auf die Neubildung und die Entfaltung der Zellen und verschiedener Organe. Es wurde dargethan, dass das Licht die Neubildung der Wurzeln direkt begünstigen kann, dass es auf die Blüthenbildung unter Vermittlung der Laubblätter von Einfluss ist, indem in den letzteren im Lichte die Stoffe gebildet werden, welche zur Entstehung der Blüthe nöthig sind. Die belaubten Pflanzen fahren nach ihm im Finstern fort, Stammtheile und Blätter zu produziren, aber in abnormer als Vergeilung oder Etiolement bezeichneter Gestaltung. — Bei dem Studium der Wirkung des verschiedenfarbigen Lichtes zeigte es sich, dass nicht, wie man hätte denken sollen, die chemisch wirksamen violetten Strahlen, sondern die rothgelben es sind, welche vorzüglich das Ergrünen und die Zerlegung der Kohlensäure hervorrufen, dass dagegen die blauen und die sichtbaren violetten Strahlen als Bewegungsreize wirken und die ultravioletten in den grünen Blättern die blüthenbildenden Stoffe erzeugen.

Eine Anzahl von Abhandlungen beschäftigen sich mit den Ursachen der Saftbewegung in den Pflanzen, die er im Wesentlichen von Imbibitionsvorgängen ableitete. Seine Anschauungen in dieser Richtung erlitten zwar manche Anfechtung, aber er hat doch dabei jedenfalls werthvolle Thatsachen gefunden, indem er die Bedingungen der Transspiration und ihre Bedeutung für das Leben der Pflanzen feststellte, dann den Einfluss der physikalischen und chemischen Beschaffenheit des Bodens auf dieselbe, sowie die hemmende Wirkung von Salzlösungen und der Kälte. Zur Messung der Geschwindigkeit des Transspirationsstromes bediente er sich der Lithiummethode, bei welcher die Pflanzen mit Lithium begossen werden und dasselbe dann spectroscopisch in den einzelnen Pflanzentheilen aufgesucht wird.

Zur feineren Erkennung der Wachsthums-Erscheinungen und der Reizbewegungen wendete er sein Auxanometer an, das diese Bewegungen auf eine berusste Fläche selbst registrirt. Er untersuchte damit die grossen Wachsthumsperioden und deren Faktoren, namentlich auch der Wurzeln im Boden.

Viel beschäftigten ihn die Tropismen. Er verfolgte die Erscheinungen des sogenannten Heliotropismus und des Geotropismus, d. i. die Richtungsbewegungen oder Krümmungsbewegungen der Pflanze, welche durch einseitige Wirkung des Lichtes oder der Schwerkraft hervorgerufen werden, die er mit einem besonderen Drehapparate, dem Klinostaten, aufzeichnen lehrte. Er erkannte ferner als Reiz auf die Wurzel, durch den eine Krümmungsbewegung hervorgebracht wird, eine Differenz im Wassergehalt der Luft (Hydrotropismus); diese psychrometrischen Bewegungen studirte er mittelst eines allgemein dazu angewendeten einfachen Apparates, den er das hängende Sieb nannte.

Es folgten Abhandlungen über die Beziehungen zwischen Zellbildung und Wachsthum, über die Beziehungen der Zellenanordnung zum Wachsthum, wobei ihm das letztere das bestimmende für das erstere zu sein scheint; über den Zusammenhang zwischen Struktur und Richtung der Organe (orthotrope und plagiotrope Pflanzentheile).

In den letzten Jahren liebte er es, in den physiologischen Notizen aus dem Schatze seiner Erfahrungen weitere Schlüsse zu ziehen und tiefere Vorstellungen über das Pflanzenleben zu gewinnen; dabei wurde er auch zu dem Begriffe der Energide geführt, den er in Folge der völligen Verschiebung des Begriffes der Zelle aufstellte.

Es mag noch bemerkt werden, dass Sachs, wie die meisten hervorragenden Biologen, den Darwinismus nicht als richtig anzuerkennen vermochte. Er war wohl ein Anhänger der Descendenzlehre, aber die Erklärung der alleinigen Entwicklung durch Anpassung an das Zweckmässige im Sinne Darwins hielt er für verfehlt.

Aber nicht nur durch die Auffindung wichtiger Thatsachen und fruchtbarer Gedanken hat Sachs die Botanik bereichert, sondern auch durch seine klassischen Werke der Botanik. In denselben ist das pflanzen-physiologische Wissen sorgfältigst gesammelt, unparteiisch ausgewählt und wahrhaft meisterhaft dargestellt; sie geben ein klares Bild der Entwickelung der Pflanzenphysiologie seit dem Jahre 1865.

In Folge seiner Vorträge in landwirthschaftlichen Versammlungen fühlte er, da er Alles ernst nahm, das Bedürfniss, die früheren Arbeiten in der Pflanzenphysiologie genauer kennen zu lernen; er ersah dabei, dass es an einem Handbuche der physiologischen Botanik fehlt, in dem die vielen zerstreuten Erfahrungen zusammengefasst sind. Er schlug daher Hofmeister vor, mit ihm ein solches Werk herauszugeben, in dem er (1865) die Experimental-Physiologie der Pflanze zu bearbeiten hatte.

Diesem werthvollen, mit grossem Beifall aufgenommenen Werke folgte (1868) das vortreffliche Lehrbuch der Botanik mit den von ihm selbst gezeichneten unübertroffenen Abbildungen. Die Schleiden'schen Grundzüge der Botanik waren veraltet und es war ein Buch nothwendig, aus dem der Studirende und der Forscher nicht nur das botanische Wissen entnehmen konnte, sondern in dem er auch die Probleme und Ideen der Forschung fand. Er hat durch dieses in 4 Auflagen erschienene Lehrbuch einen grossen Einfluss auf die Ausbreitung des botanischen Wissens ausgeübt und darin die Lehren anderer Forscher, z. B. von Nägeli und Hofmeister für weitere Kreise verständlich gemacht.

Aus dem Lehrbuch entwickelten sich später (1882) die Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, die wegen ihrer allgemein verständlichen fesselnden Darstellung der interessanten Vorgänge in der Pflanze von den Studirenden und dem gebildeten Publikum vielfach benützt wurden.

Endlich muss noch besonders hervorgehoben werden seine Bearbeitung der Geschichte der Botanik, durch welche er mit

unserer Akademie in engere Verbindung kam. Von der der Akademie angegliederten historischen Kommission, welche die Geschichte der Wissenschaften in Deutschland herausgibt, übernahm er nach Nägeli's Rücktritt die Geschichte der Botanik. Es konnte dazu wohl kein Besserer gefunden werden. Mit gewohntem Fleisse und strenger Gewissenhaftigkeit sichtete er das Material und suchte er die Entstehung der Thatsachen und der Ideen festzustellen und die allmähliche Entwickelung derselben zu verfolgen. Dabei galt ihm nicht derjenige, welcher die Thatsachen sammelte, als der Fruchtbarere für die Wissenschaft, sondern der, welcher die Thatsachen für allgemeine Schlussfolgerungen zu verwerthen wusste. Er gestand zu, dass das derartige Studium der Geschichte ihn gelehrt habe, den Werth mancher Richtung und Leistung anders zu schätzen als vorher.

Die rastlose Arbeit hat die Gesundheit von Sachs erschüttert und seinem Leben vor der Zeit ein Ende gemacht; er war in Wahrheit ein Kämpfer für die Wissenschaft, der er mit so grossem Erfolge alle seine Kräfte geweiht hatte.

## Edward Drinker Cope.

Das am 12. April 1897 in Philadelphia im 56. Lebensjahre verstorbene correspondirende Mitglied der Classe Edward Drinker Cope war ein hervorragender Zoologe und Paläontologe und zählte zu den fruchtbarsten und ideenreichsten Naturforschern Nord-Amerika's.

Cope entstammte einer der ältesten und angesehensten Kaufmanns-Familien der Stadt Philadelphia, woselbst er am 28. Juli 1840 zur Welt kam. Nachdem er den ersten Unterricht von einem Privatlehrer erhalten hatte, trat er in die alte, 1749 gegründete Pennsylvania-Universität seiner Vaterstadt ein. Von früh an zeigte er eine grosse Vorliebe zu den beschreibenden Naturwissenschaften, besonders zur Zoologie; häufig besuchte er die Sammlungen der naturwissenschaftlichen Akademie, wo er auch als 19jähriger Jüngling seine erste Untersuchung

über die Classifikation des Salamanders machte. Durch die grossen Sammlungen angelockt, begab er sich dann auf ein Jahr an die Smithsonian Institution in Washington, deren Reptilien er studirte, wonach er wieder während drei Jahren an der Akademie zu Philadelphia arbeitete. Auf einer Studienreise nach Europa bildete er sich in der vergleichenden Anatomie weiter aus, namentlich an den reichhaltigen Museen zu London und Wien.

In solcher Weise trefflich vorbereitet, wurde er nach der Rückkehr in die Heimath zum Professor für vergleichende Zoologie und Botanik am Hareford-College in Philadelphia ernannt; später wurde er Professor der Geologie und Paläontologie an der dortigen Universität und Präsident der Akademie der Naturwissenschaften daselbst. Er war auch Herausgeber der angesehenen Monatsschrift: „Americain Naturalist“.

Im Anfang beschäftigten sich seine Untersuchungen mit der systematischen Zoologie und vergleichenden Anatomie noch jetzt lebender Thiere, indem er die Schlangen und Eidechsen von Nord-Amerika klassifizirte und eine mustergiltige Synopsis der Batrachier und Reptilien und auch der Süsswasser-Fische von Nord- und Süd-Amerika gab. Namentlich die letzteren Arbeiten müssen als Vorbilder in dieser Richtung bezeichnet werden, wodurch die älteren Systeme verdrängt wurden; er hatte zu diesem Zwecke die herrliche Sammlung der von Hyrtl hergestellten Fischskelette mit 600 Arten angekauft, welche an Schönheit nur durch Conrad Will's Darstellungen in unserer zoologischen Sammlung übertroffen wird. Auch seine Untersuchungen der Höhlen-Fauna, besonders der Knochenhöhle zu Port Kennedy, gaben wichtige Resultate. Es handelte sich dabei nicht wie früher so häufig blos um Beschreibungen der äusseren Formen dieser Thiere, sondern um morphologische und vergleichend-anatomische Untersuchungen aller Organe, besonders der Skelette. Durch seine mit unermüdlicher Ausdauer gesammelten Kenntnisse der einzelnen Formen, sowie durch seine eminente Beobachtungs- und Unterscheidungsgabe war er ausgerüstet, die Bedeutung dieser Formen zu erkennen und

im Ueberblick über grosse Gruppen derselben allgemeine Schlussfolgerungen zu ziehen.

Von der grössten Bedeutung sind aber die Arbeiten Cope's auf dem Gebiete der Paläontologie der fossilen Wirbelthiere. Die Entdeckung der kolossalen Ablagerungen vergangener Thierformen in den Schichten der Erde von Amerika hat ihn zu diesen fruchtbaren Studien geführt, wozu er durch seine eingehenden Kenntnisse des Skelettes der rezenten Formen in besonderem Grade befähigt war, ohne welchen Wissensschatz er niemals in der Paläontologie so weit hätte vordringen können.

Zunächst untersuchte er die in den Mergelgruben von New Jersey gefundenen Reptilien (Dinosauren); dann die Miocän-Fauna von Maryland und Virginien, und die von der Ohio geological Society ihm anvertrauten Funde. Seine Synopsis der ausgestorbenen Batrachier, Reptilien und Vögel Amerika's (1870) erregte sowohl wegen des fast vollkommen unbekannten Stoffes als auch wegen der darin niedergelegten neuen Ideen grosses Aufsehen. Durch diesen Erfolg angespornt, verwendete Cope seine damals sehr bedeutenden Privatmittel auf die paläontologische Durchforschung der westlichen vereinigten Staaten und Territorien. Die vergrabene wunderbare Fauna westlich des Mississippi war nur wenig bekannt; Cope hat mit deren genauer Untersuchung der Paläontologie ein neues Feld eröffnet und neue Anschauungen über die Thierformen auf der Erde angebahnt. Er brachte aus den Kreidebrüchen des westlichen Cansas die Riesenreptilien ans Licht; beutete die berühmten Fundstätten fossiler Säugethiere und Reptilien im Eocän vom Green River in Wyoming und in den Tertiärbildungen von Colorado aus, und legte als Mitglied der Wheeler'schen Expedition reiche Sammlungen aus Nevada, Arizona, Colorado und Neu-Mexiko an. Auf diese Weise und durch Ankauf von Objekten aus anderen Welttheilen bekam er eine Sammlung der fossilen Wirbelthiere, welche an Mannigfaltigkeit und Ausdehnung nicht übertroffen wird.

Gleichzeitig mit Cope liess unser auswärtiges Mitglied Marsh in New Haven die Fundstätten von Dakotah, Wyoming,

Colorado und Oregon ausbeuten, mit deren Ergebnissen er seine vielbewunderte Reihe von Publikationen eröffnete. Es entspann sich nun zwischen den beiden ebenbürtigen Rivalen ein nicht immer in friedlichster Weise geführter Wettstreit, in dem mit fast fieberhafter Energie gearbeitet wurde. Beide Forscher brachten von den theils auf eigene, theils auf öffentliche Kosten ausgerüsteten Expeditionen nach dem fernen Westen Monate lang in den unwirthlichsten und gefährlichsten Theilen der Indianer-Gebiete zu. Die dabei gewonnenen, in Philadelphia und New Haven befindlichen Sammlungen fossiler Wirbelthiere und die darauf basirten Abhandlungen von Cope und Marsh haben eine vollständige Umgestaltung der bis dahin herrschenden Ansichten über die Mannigfaltigkeit, Organisations- und Verwandtschafts-Verhältnisse der fossilen Vertebraten herbeigeführt. Cope hat die Bearbeitung des Materials und die Ausarbeitung seiner Werke ganz allein besorgt; er hat dabei über 1000 Spezies fossiler Säugethiere genau beschrieben und ihre Stellung und Verwandtschaft dargelegt.

Von den diese Funde darlegenden Abhandlungen ist vor allen zu nennen sein grosses Werk: „Vertebrata of the tertiary formation of the West“, welches eine Uebersicht der gesammten tertiären Wirbelthiere Nord-Amerika's liefert und den wunderbaren Reichthum des amerikanischen Westens an fossilen Vertebraten schildert. Es bildet eine der wichtigsten literarischen Quellen der Paläontologie und hat für Amerika wohl die Bedeutung erlangt, welche Cuvier's „Recherches sur les Ossements fossiles“ seiner Zeit für Europa besassen.

Aus ihm geht die zeitliche Aufeinanderfolge der verschiedenen Formenreste der Wirbelthiere hervor, sowie die fortschreitende Entwicklung der Säugethiere in grossen Zeiträumen, besonders die der merkwürdigen Faunen der ältesten eocänen Puerco-Wasatch- und Bridges-Schichten mit den bisher unbekannten Sippen von Hufthieren.

Der Schwerpunkt der wissenschaftlichen Arbeit Cope's ruht in seinen genauen Einzelstudien; aber es ist bei seinem Geiste nicht zu verwundern, dass er durch dieselben auch zu

allgemeinen Schlussfolgerungen auf dem Gebiete der Biologie gelangte: zu Betrachtungen über den Ursprung der Arten, über den Ursprung des Menschen und der Wirbelthiere, über die Entwickelung des pflanzlichen und thierischen Lebens in Nord-Amerika. Namentlich seine Studien über die fünfzehigen Hufthiere und über den Bau der Säugethierzähne hatten ihn zu einem Anhänger der Lehre von der Entwickelung gemacht. Jedoch sprach er es schon in seinen frühesten Arbeiten aus, dass er die natürliche Zuchtwahl und das Ueberleben des Vortheilhaftesten im Kampf ums Dasein nach Darwin nicht als die Ursache des Ursprungs der Arten und der höheren Thierklassen ansehen könne; man vermöge aus diesem Prinzip nicht den Beginn jener Veränderungen zu erklären, dasselbe könne vielmehr erst zur Wirksamkeit gelangen, nachdem die Veränderungen schon vorhanden sind, um solche, welche für den Organismus am vortheilhaftesten sich erweisen, fortzusetzen und zu erhalten. Die älteren Anschauungen von Lamarck und von Erasmus Darwin, dem Grossvater von Charles Darwin, über die Anpassung schienen ihm viel besser die Vorgänge zu erklären. Nach Lamarck hat die Natur zunächst die einfachsten Organisationen der Thiere und der Pflanzen hervorgebracht, mit der Tendenz oder Möglichkeit sich zu höheren Formen zu entwickeln, während die mannigfaltigen Lebensbedingungen allmählich Abweichungen in der Struktur hervorrufen. Die zweckmässigen Eigenschaften entstehen dadurch, dass das Bedürfniss als Reiz wirke und Handlungen zu seiner Befriedigung veranlasse, wodurch dann bestimmte Organe durch den Gebrauch und Nichtgebrauch ausgebildet werden, welche sich auf die Nachkommen vererben. Indem Cope diese allerdings ebenfalls nicht ausreichende Theorie durch Thatsachen aus den fossilen Thierformen zu unterstützen suchte, wurde er der Begründer der amerikanischen Neu-Lamarckischen Schule.

Später wendete er sich auch den schwierigen Problemen der psychischen Erscheinungen, des Ursprungs der Intelligenz, der Entwickelung der Ethik, zu. Er sprach sich darin gegen einen ausschliesslichen Materialismus aus und bekundete sich

als Anhänger einer idealen Lebensanschauung, welche stets das Beste hoffte.

Er war ein überzeugungstreuer Mann, der nur nach dem handelte, was er für Recht oder Unrecht hielt und bei seinem Urtheil über die Menschen ausschliesslich Befähigung und nicht seine Neigungen berücksichtigte. Im Streben nach der Wahrheit war er gerne bereit, einen erkannten Fehler einzugestehen.

Cope genoss nicht nur wegen seiner umfassenden Kenntnisse, sondern auch wegen der Genialität, mit der er schwierige vergleichend-anatomische und paläontologische Probleme zu behandeln verstand, das grösste Ansehen in wissenschaftlichen Kreisen und sein Einfluss wird noch lange Zeit in seinem Fache maassgebend bleiben.

## Legrand Alfred Louis Ollivier Des Cloizeaux.

Am 6. Mai 1897 ist zu Paris das correspondirende Mitglied der Classe, der berühmte Mineraloge Legrand Alfred Louis Ollivier Des Cloizeaux im 80. Lebensjahre gestorben.

Am 17. Oktober 1817 zu Beauvais im französischen Departement Oise geboren, widmete er sich nach Beendigung seiner klassischen Studien der Mineralogie und Geologie. Er unternahm zu seiner weiteren Ausbildung in diesen Wissenschaften ausgedehnte Reisen in England, Deutschland, Oesterreich, Russland, Spanien, Italien, der Schweiz, Skandinavien und Island, woselbst er das Glück hatte, einem Ausbruch des Hekla im Jahre 1845 beiwohnen zu können. Ueberall wurden von ihm die Sammlungen besucht und eifrig studirt.

Seine krystallographischen Untersuchungen machten seinen Namen bald bekannt. Er wurde im Jahre 1858 als Repetitor an der École Normale angestellt. 1869 wählte ihn die Académie des Sciences zu ihrem Mitgliede und 1889 zu ihrem Präsidenten, und seit 1870 war er Professor der Mineralogie an der Sorbonne.

Des Cloizeaux hat vorzüglich die durch die Entwickelung der Physik neu gewonnenen feinen Methoden zur Untersuchung der physikalischen Eigenschaften der Krystalle in die

Mineralogie eingeführt. Er hat dadurch die damals herrschende, rein chemische Auffassung der Mineralien, nach der ein Mineral bei gleicher chemischer Zusammensetzung auch der gleichen Spezies angehören müsse, beseitigt.

Seine ausserordentlich sorgfältigen Untersuchungen über die optischen Eigenschaften der Mineralien, wobei er insbesondere deren Verhalten zum polarisirten Licht prüfte und über die er seine ersten Erfahrungen im Jahre 1857 in dem Werke: „de l'emploi des propriétés optiques en Minéralogie“ veröffentlicht, hatten ihn gleich in die erste Reihe der Krystallographen gestellt. Seitdem werden neben den Messungen der Flächen und Winkel stets auch die optischen Erscheinungen der Krystalle als nothwendig zur Kenntniss eines Krystalls erachtet.

Die 1861 erschienenen leçons de Cristallographie trugen zur Befestigung dieser Auffassung wesentlich bei.

Besonders wichtig ist sein Handbuch der Mineralogie (1862—1874) geworden. Es ist dies kein gewöhnliches Handbuch, sondern eine ganz selbständige Bearbeitung aller älteren sowie seiner eigenen Erfahrungen in der Mineralogie, welche für alle Mineralogen ein unentbehrlicher Führer geworden ist. Die noch ungenügend bekannten Mineralspezies wie die des Quarzes, des Feldspaths, des Gypses, des Zinnobers etc. wurden darin von ihm vervollständigt.

Im Jahre 1875 erschien seine grosse Zusammenfassung der optischen und krystallographischen Eigenschaften der Mineralien. In unablässiger Arbeit hat er die optischen Eigenschaften aller durchsichtigen Mineralien bestimmt und dadurch einen besonderen Zweig der Mineralogie geschaffen; dieselbe ist durch ihn in die Molekülarphysik eingetreten und nimmt an allen ihren Anschauungen über die Constitution der Materie Antheil.

An seinem 75. Geburtstage, an dem er von der Professur am Museum d'Histoire naturelle zurücktrat, widmeten ihm die Mineralogen aller Länder eine dankbare Erinnerung an die von ihm empfangenen Gaben eine werthvolle Medaille mit der Widmung: von seinen Bewunderern und seinen Freunden.

Er war auch der Gründer und langjährige Präsident der Société Française de minéralogie sowie der Herausgeber des Bulletins derselben.

Mit Des Cloizeaux ist ein ächter Gelehrter, eine Autorität in seinem Fache, von streng religiöser Gesinnung dahingegangen; sein Name wird in der Geschichte der Mineralogie und Petrographie als einer der besten genannt werden.

## Berichtigungen

**zur Abhandlung des Herrn S. Kantor in den Sitzungsberichten 1897 S. 367.**

Auf p. 370 befindet sich in Anmerkung 1) unter dem Texte eine Erwähnung zweier Theoreme in § 6 der Abhandlung von Herrn Prof. Frobenius, Cr. J., Bd. 84: „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen", wonach diese Theoreme unrichtig wären. Es hat dabei eine Verwechslung der Collineationen in geometrischer Interpretation mit den Matrixsymbolen oder auch der Frobenius'schen symbolischen Bezeichnung stattgefunden. Während in der Matrixtheorie $A$ und $B$ vertauschbar sind, nur wenn $AB = BA$, sind die zwei zugehörigen Collineationen der Geometrie der Lage auch dann als vertauschbar anzusehen, wenn nur $AB = \lambda BA$ ist, wo $\lambda$ einen constanten Factor bedeutet. Jene algebraischen Theoreme bedürfen also keiner Correctur.

Auf p. 380 Zeile 13 von oben muss es heissen „niedere" statt „höhere".

# Sitzungsberichte

der

# königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

---

## Mathematisch-physikalische Classe.

Sitzung vom 5. November 1898.

1. Herr L. Radlkofer legt die erste Lieferung der mit Unterstützung der Akademie von Herrn Privatdozenten Dr. Hans Solereder herausgegebenen systematischen Anatomie der Dikotyledonen vor.

2. Herr H. Seeliger überreicht den auf Kosten der Akademie gedruckten III. Band der neuen Annalen der Sternwarte zu München.

3. Herr K. A. v. Zittel bespricht eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Alfred Bergeat: „Ueber die äolischen Inseln", geologisch beschrieben. Die Abhandlung ist für die Denkschriften bestimmt.

4. Herr E. v. Lommel legt eine Abhandlung des Professors der Physik an der technischen Hochschule, Herrn Dr. H. Ebert: „Unsichtbare Vorgänge bei elektrischen Gasentladungen" vor.

---

# Unsichtbare Vorgänge bei elektrischen Gasentladungen.

Von **Hermann Ebert.**[1])

(*Eingelaufen 5. November.*)

Es ist bekannt und auch in neuester Zeit wiederholt zugestanden worden, dass die mannigfaltigen und seltsamen Erscheinungen, welche die elektrischen Entladungen der verschiedensten Art in verdünnten Gasen hervorrufen, so sehr sie auch namentlich in qualitativer Hinsicht variiert und geprüft worden sind, doch noch immer vollkommen einer Erklärung harren. Gerade über die typischsten Momente dieser Phänomene, über den Dunkelraum an der Kathode, die Glimmlichtschicht, die Anodensäule mit ihren Schichtungen sind die Ansichten durchaus geteilt und einander widersprechend. Es wird daher die Vermutung wachgerufen, dass die Gesamtheit aller d e r Erscheinungen, welche wir an den Gasentladungen direkt wahrnehmen, noch nicht ausreicht, um sie zu erklären, dass uns bei den gewöhnlichen Versuchsanordnungen Eigentümlichkeiten oder Veränderungen des Gasinhaltes selbst entgehen,

[1]) Die vorliegende Arbeit wurde in dem physikalischen Institut der k. technischen Hochschule zu München vollendet, nachdem sie in dem physikalischen Institut der Universität Kiel zum grossen Teil fertig gestellt war; ausgeführt wurde sie mit Unterstützung des Elizabeth Thompson science fund zu Boston, dessen Sekretär Herrn Professor Minot, sowie dessen Board of Trusties auch an dieser Stelle wärmstens gedankt sei; desgleichen bin ich meinem Privatassistenten, Herrn Ingenieur Dr. M. W. Hoffmann für seine Unterstützung bei dieser Arbeit zu Dank verpflichtet.

welche doch wesentlich das Zustandekommen der sichtbaren Phänomene mit bedingen. Herr E. Warburg[1]) hat vor kurzem auf unsichtbare Vorgänge aufmerksam gemacht, welche der sichtbaren Funkenentladung vorausgehen; ich glaube durch die folgenden Versuche zeigen zu können, dass durch die Gasentladung selbst der Inhalt des gasverdünnten Raumes direkt nicht wahrnehmbare Veränderungen erfährt, derart, dass das Gas unmittelbar nach dem Einsetzen der Entladung andere Eigenschaften besitzt, als es vorher hatte, und dass diese Veränderungen auch nach dem Aufhören der eigentlichen Entladung selbst wenigstens kurze Zeit nachdauern und bei einer Reihe rasch aufeinander folgender Einzelentladungen den Verlauf derselben mitbestimmen.

Um die Natur des Gases unmittelbar nach dem Durchgange der Entladung zu untersuchen, hätte man das Gas aus dem Entladungsrohre absaugen und dann analysieren oder auf eventuelle nachbleibende Leitfähigkeit, Jonisation u. s. w. in besonderen Räumen prüfen können. Hierbei wären aber die in verschiedenen Teilen der Entladungsröhre vorhandenen Bestandteile vermischt worden; und es ist besonders charakteristisch, dass, wie die folgenden Versuche zeigen, das Gas augenscheinlich in den verschiedenen Teilen der Entladung verschiedenartig verändert wird. Ferner haben die negativen Resultate derartiger Absaugungsversuche gezeigt, dass sich die etwa gebildeten Jonen schon nach sehr kurzer Zeit an den Elektroden oder den ja immer mehr oder weniger stark elektrostatisch geladenen Innenwänden der Entladungsröhren festsetzen, also nicht, oder nur zum verschwindend kleinen Teile mit dem Gase zugleich aus dem Rohre entnommen werden können. Man hat gewisse Eigentümlichkeiten (Leitfähigkeit, Potentialverteilung u. s. w.) der von Entladungen durchsetzten Gassäulen mit Erfolg mittels in dieselben eingesenkten Metallsonden unter-

---

[1]) E. Warburg, Sitzungsber. d. k. pr. Akad. d. Wiss. zu Berlin, p. 223, 1896, ebenda Sitzung vom 18. Febr. 1897, Wied. Ann. **62**, p. 385, 1897.

sucht; für den vorliegenden Zweck war auch diese Methode nicht zu verwenden, da eine in die Glimmlichtschicht eingetauchte Metallmasse, so klein ihre und die mit ihr verbundene Capacität auch ist, sich mit einem Dunkelraum umhüllt, also selbst wieder Kathode zu werden scheint, so dass es schwer ist, zu entscheiden, in wie weit der Zustand an dieser Secundärelektrode übereinstimmt mit dem Zustande in der primären Entladungssäule, wie er sich an demselben Punkte herstellen würde, wenn die Sonde nicht vorhanden wäre. Es war daher notwendig, die Entladungssäule selbst zur Prüfung der durch sie hervorgerufenen Zustände im Gase zu verwenden. Ich erreichte dies, indem ich eine Reihe völlig gleichartiger Entladungen in einem genau symmetrisch gestalteten Entladungsrohre unmittelbar auf einander folgend, aber abwechselnd von entgegengesetzten Seiten her auf denselben Gasraum wirken liess. Es zeigte sich, dass das Zeitintervall von ca. $^1/_{1000}$ bis $^1/_{800}$ Secunde oder noch längerer Dauer genügte, um eine deutliche Nachwirkung der ersten Entladung auf die nachfolgende zu constatieren. Um möglichst klar zu übersehende Versuchsbedingungen zu haben, wurden nur Entladungsröhren der einfachsten Gestalt verwendet: meist cylindrische Röhren mit kreisplattenförmigen, ebenen Aluminiumscheiben an den Enden. Durch diese Röhren sendete ich den durch Transformation genügend hochgespannten Strom einer kleinen Wechselstrommaschine von grosser Wechselzahl (Hochfrequenzstrom). Zur Stromerzeugung wurde mir von Herrn Ingenieur Hummel in München ein schnell laufender kleiner vierpoliger Umformer zur Verfügung gestellt,[1]) welcher, mit Gleichstrom von etwa $1^1/_2$ bis 2 Ampère bei 64 Volt beschickt, einen Wechselstrom von etwa 800—1000 Polwechseln in der Secunde entnehmen lässt.

In Wiedemanns Annalen habe ich diesen Generator sowie den benutzten Transformator und die zur Messung im Hoch-

[1]) Herrn Ingenieur Hummel spreche ich dafür auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

spannungskreise verwendeten Messinstrumente eingehend beschrieben.[1])

In den folgenden Tabellen bedeutet

*p* den Druck des Gases in den Entladungsröhren in mm Quecksilbersäule,

*d* die Dicke des (Hittorfschen) Kathodendunkelraumes in mm,

*i* die effective Stärke des das Entladungsrohr durchsetzenden hochfrequenten Wechselstromes in Milliampères,

*V* die effective Spannung dieses Hochspannungsstromes an den Elektroden der Röhren in Volt.

Den Tabellen ist noch das mit *E* bezeichnete und mit $10^3$ multiplicierte Produkt $E = i\,V$ zugefügt worden; dasselbe würde die dem Rohre zugeführte Wattleistung darstellen, wenn in demselben nicht eine erhebliche Phasendifferenz zwischen beiden Grössen infolge der Condensatorwirkung des Rohres aufträte.[2]) Wie aber früher nachgewiesen wurde, stellt *E* den Gang des Energieverbrauches vollkommen dar und auch dieser bringt die im Folgenden zu beschreibenden Erscheinungen sehr charakteristisch zum Ausdruck.

**1. Gang der Erscheinungen bei abnehmendem Drucke in einfachen cylindrischen Entladungsröhren.** — Das typische Bild des hier näher zu besprechenden Phänomens wird am klarsten bei weiten, cylindrischen Röhren ohne capillare Verengungen, Fig. 1, erhalten; *EE* sind die Elektroden,

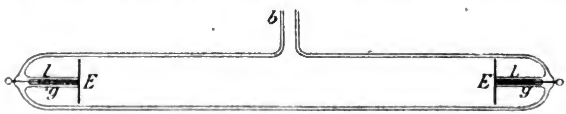



Fig. 1.

Kreisscheiben aus Aluminiumblech von 2,0 cm Durchmesser. Dieselben werden von angenieteten kurzen Stielen *ll* aus dickem Aluminiumdraht, getragen, die mit Platindrähten leitend ver-

[1]) H. Ebert, Wied. Ann. **65**, p. 761, 1898.

[2]) Vergl. H. Ebert, a. a. O., p. 787.

bunden sind, welche in die Glaswand eingeschmolzen werden. Glasröhrchen *gg* bekleiden die Zuleitungen bis an die Platten heran. Durch das seitliche Rohr *b* stehen die Entladungsröhren mit einer Töpler-Hagenschen Quecksilberpumpe in Verbindung, an welche ausserdem ein Mac Leodscher Druckmesser Kahlbaumscher Construction und die Gasentwickelungsapparate mit ihren Trockenvorrichtungen angeschlossen sind. Wird durch eine solche Röhre der Hochfrequenzstrom geschickt, so zeigt sich stets der folgende Verlauf: Von dem Momente an, in dem sich beide Elektrodenplatten völlig mit den Glimmlichtschichten überzogen haben, und sich, von beiden durch den sogenannten Faradayschen Dunkelraum getrennt, die Säule des Anodenlichtes in der Mitte schwebend ausgebildet hat, nimmt bei abnehmendem Drucke die Stärke des die Röhre durchsetzenden Stromes zu, die an den Elektroden herrschende Spannungsdifferenz ab. Zugleich mit ihr nimmt das Product $E$ beider ab. Dies dauert fort, wenn bei fortgesetzter Evacuation die Glimmlichtstrahlen immer länger werden, die vor ihren Enden liegenden Faradayschen Dunkelräume immer weiter nach der Mitte zu vorrücken, die unmittelbar an den Elektrodenplatten sich ausbildenden Hittorfschen Kathodendunkelräume an Dicke $d$ zunehmen. In dem Momente aber, wo die Faradayschen Dunkelräume und die vorderen Enden der Glimmlichtstrahlen sich in der Rohrmitte begegnen, — einen Moment, den man am besten in einem neben dem Rohre aufgestellten Drehspiegel beobachtet, welcher die zeitlich auf einander folgenden Entladungsbilder räumlich neben einander legt, — tritt stets, bei allen Röhren und allen Gasen, eine eigentümliche Umkehr ein; die Stromstärke vermindert sich, gleichsam als ob der Wechselstrom abgeschnürt („gedrosselt") würde, dafür erhöht sich die Spannung, sowie die Grösse $E$, so dass für den entsprechenden „Umkehrdruck" die $i$-Werte ein Maximum, die $V$- und $E$-Werte ein Minimum aufweisen. Zugleich treten in den bis dahin ungeschichteten Anodensäulen deutliche Lichtabsonderungen, die „Schichten" mit ihren dem Drucke und der Rohrweite entsprechenden Abständen auf.

Schichten bilden sich in einem Rohre erfahrungsgemäss immer dann aus, wenn die Anodensäule zusammengeschnürt wird, z. B. durch Einfügen von capillaren Zwischenstücken; jene Begegnung wirkt also in dem überall gleichweiten Cylinderrohre wie eine Rohrverengung.

Dass zwei gleichzeitig auftretende Glimmlichter verschiedener Kathoden ihrem gegenseitigen Eindringen sowie dem Eindringen der Anodensäule einen gewissen Widerstand entgegensetzen und dadurch die Entladungsspannung erhöhen, ist bekannt; gelegentlich beobachtet wurde auch, dass der Gang von Stromstärke und Spannung in einem Entladungsrohre bei gleichgerichteten Entladungen bei demselben Drucke sich umkehren kann; hier ist aber zu beachten, dass die beiden Glimmlichter zeitlich nach einander ausgebildet werden, um Zeiten verschieden, welche ausreichend lang sind, um das Gas wieder völlig dunkel, die Entladung gänzlich unsichtbar erscheinen zu lassen, was wiederum am besten im Drehspiegel constatiert wird. Ferner ist bemerkenswert, dass diese Umkehr genau an den Moment gebunden ist, wo die vordersten, z. T. noch ganz unsichtbaren Enden der Glimmlichter nach einander denselben Raum passieren.

Wird der Druck noch weiter erniedrigt, so sinkt die Stromstärke $i$, die Spannung $V$ und $E$ steigen völlig regelmässig. Die folgenden Tabellen mögen den Gang der Erscheinung bei verschiedenen Gasen erläutern; damit die Zahlen mit einander vergleichbar sind, wurden Reihen ausgewählt, welche mit demselben Rohre von 16,8 cm Elektrodenabstand, 2,5 cm lichter Weite und 22 cm Länge (Röhre B) erhalten worden sind; die ausgezeichneten Werte sind durch den Druck hervorgehoben.

*Tabelle 1.* Wasserstoff.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 4,43 | 2,49 | 2,15 | 1,06 | 0,88 | 0,58 | 0,47 |
| $d$ | 1,2 | 2,3 | 2,5 | 4,2 | 4,9 | 6,3 | 7,6 |
| $i$ | 14,02 | 16,39 | **17,00** | 16,57 | 15,94 | 15,01 | 13,91 |
| $V$ | 742 | 614 | **583** | 592 | 648 | 698 | 784 |
| $E$ | 10,40 | 10,07 | **9,91** | 9,80 | 10,33 | 10,48 | 10,66 |

*Tabelle 2.* Luft.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 2,76 | 1,30 | 0,83 | 0,51 | 0,27 | 0,20 |
| *d* | 0,9 | 1,5 | 2,2 | 2,8 | 5,0 | 6,7 |
| *i* | 12,61 | 15,76 | **15,94** | 15,39 | 13,49 | 12,37 |
| *V* | 718 | 574 | **559** | 602 | 725 | 812 |
| *E* | 9,05 | 9,06 | **8,93** | 9,27 | 9,77 | 10,06 |

*Tabelle 3.* Kohlenoxyd.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *p* | 1,81 | 0,99 | 0,16 |
| *d* | 1,3 | 2,0 | 3,0 |
| *i* | 14,02 | **15,20** | 14,12 |
| *V* | 673 | **618** | 707 |
| *E* | 9,43 | **9,40** | 9,98 |

*Tabelle 4.* Kohlensäure.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 3,92 | 1,21 | 0,91 | 0,88 | 0,52 | 0,33 | 0,22 |
| *d* | 0,7 | 1,5 | 2,0 | 2,0 | 2,9 | 4,5 | 5,0 |
| *i* | 13,49 | 17,25 | 17,58 | **17,66** | 16,83 | 15,30 | 14,72 |
| *V* | 815 | 598 | 596 | **596** | 659 | 748 | 831 |
| *E* | 11,00 | **10,31** | 10,47 | 10,52 | 11,10 | 11,45 | 12,23 |

*Tabelle 5.* Leuchtgas.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 5,09 | 2,69 | 1,76 | 1,01 | 0,64 |
| *d* | 1,1 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 5,0 |
| *i* | 12,83 | 17,00 | **18,14** | 17,25 | 15,58 |
| *V* | 795 | 568 | **541** | 592 | 676 |
| *E* | 10,21 | **9,65** | 9,81 | 10,21 | 10,54 |

Bei Kohlensäure zeigten sich bei regelmässig fortschreitender Evacuation von $p = 1,5$ mm an bis $p = 0,5$ grosse Unregelmässigkeiten, so dass die Vermutung nahe gelegt wird, dass bei diesen Drucken eine Dissociation eintritt. Ob dieselbe Folge der Entladungen ist, oder ob schon lediglich infolge der Verdünnung allein eine Zustandsänderung im Gase Platz greift,

wie sie Herr **Bohr** beim Sauerstoff beobachtete,[1]) so dass für diese Drucke das Boyle-Mariottesche Gesetz nicht mehr gilt, bleibe vorläufig dahingestellt.

Mit diesen Unregelmässigkeiten dürfte es zusammenhängen, dass der ausgezeichnete Wert von $E$ bei einem andern Drucke liegt, als die Maxima bezw. Minima von $i$ und $V$, mit denen er sonst stets zusammenfällt; gleiches gilt beim Leuchtgas.

Beachtet man, bei welchen Drucken für die verschiedenen Gase die Umkehr eintritt, so erkennt man deutlich, dass dieselben in der That aufs engste mit der Verbreitung der Glimmlichtgebilde bei fortschreitender Evacuation zusammenhängen; diese ist bei Wasserstoff bekanntlich am schnellsten. Hier haben die Glimmlichtspitzen zuerst die Rohrmitte erreicht, die Begegnung und damit die Umkehr tritt schon bei $p = 2{,}15$ ein; viel langsamer geht das Vorrücken bei Luft, Kohlenoxyd und Kohlensäure, schneller wieder bei Leuchtgas vor sich, bei dem Wasserstoff ein Hauptbestandteil ist.

Dass aber beide Erscheinungen mit den molecularen Eigenschaften der Gase aufs innigste zusammenhängen, geht weiter daraus hervor, dass die „Umkehrdrucke" ungefähr im Verhältnisse der mittleren freien Weglängen der verschiedenen Gase zu einander stehen. Um dies zu erkennen, hat man die Zahlen der Tabellen graphisch darzustellen, wobei man die wahre Lage der Curvenmaxima und Minima besser übersieht (beim Evacuieren wird man ja nur in seltenen Fällen den Umkehrdruck genau treffen, die im Satze hervorgehobenen Zahlen liegen also immer nur in der Nähe der ausgezeichneten Punkte selbst). Da sich die Stromstärke $i$ in der Nähe ihres Maximalwertes nur sehr wenig mit dem Drucke ändert, so ist zur Erkennung und Verfolgung der Lage des Umkehrdruckes die Spannung $V$ hier wie in allen folgenden Tabellen viel geeigneter, da sie sehr stark mit dem Drucke variiert, auch in der Nähe des ausgezeichneten Punktes. Trägt man für die Tabellen 1—4 die Drucke als Abscissen, die Spannungen $V$ als Ordinaten in ein

[1]) Chr. **Bohr**, Wied. Ann. **27**, p. 459, 1886.

Coordinatensystem ein, so entnimmt man den ausgeglichenen Curven die mit Rücksicht auf den allgemeinen Curvenverlauf folgenden Werte für die wahren Umkehrdrucke $U$, neben die die entsprechenden mittleren freien Weglängen $\lambda$ in Milliontel Millimetern für $p = 760$ mm und die Verhältnisse beider Zahlen gesetzt sind.

*Tabelle 4a.*

| | $U$ | $\lambda$ | $\lambda/U$ |
|---|---|---|---|
| Wasserstoff | 1,80 | 185 | 103 |
| Luft | 0,96 | 95 | 99 |
| Kohlenoxyd | 0,99 | 98 | 99 |
| Kohlensäure | 0,75 | 68 | 90 |

Eine vollständige Uebereinstimmung ist nicht zu erwarten, schon weil $\lambda$ nicht ganz von der Temperatur unabhängig ist,[1]) die in den einzelnen Fällen gewiss eine sehr verschiedene war; vergl. übrigens auch § 6 am Ende.

Da die freie Weglänge umgekehrt proportional dem Gasdrucke zunimmt, so kann man die hier gefundene Thatsache auch so ausdrücken: Die zeitlich nach einander erfolgende Begegnung der Glimmlichter an derselben Rohrstelle (der Rohrmitte), und damit die Umkehr im Gange von Stromstärke, Spannung (und Wattconsum) findet in dem Momente der fortschreitenden Evacuation statt, in welchem die mittlere freie Weglänge der verschiedenen Gase die gleiche geworden ist.

Schon dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass eine Art Diffusionsvorgang im Spiele ist.

Die Umkehr tritt oft bereits ein, wenn die dunklen Trennungsräume, welche sich zwischen die äussersten Glimmlichtspitzen und das Ende der Anodenlichtsäule einschieben, bei dem Wechsel der Entladungsrichtung an identische Stellen des Rohrs gelangen. In der That verhält sich ja dieser Glimm-

1) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase, 1. Aufl., p. 121, 1877.

lichtraum wie der von den Glimmlichtstrahlen selbst durchleuchtete Teil; er zeigt nach Herrn Graham[1]) fast dasselbe negative Potentialgefälle und ist wie dieser mit freier positiver Elektricität erfüllt; Herr Graham betont, dass sich dieser Dunkelraum seinem Wesen nach nicht von dem durch Glimmlicht erhellten Raume unterscheidet; er ist ja in Wirklichkeit auch gar nicht völlig dunkel, sondern sendet wirksame Strahlen aus, wie Herr Varley[2]) auf Grund photographischer Untersuchungen wahrscheinlich gemacht hat.

**2. Vergleich enger und weiter Röhren mit einander.** — Hängt die Umkehrungserscheinung in dem Gange der elektrischen Bestimmungsstücke der Gasentladungen wirklich mit der Ausbreitung der Glimmlichterscheinungen zusammen, so musste diese Umkehrung bei tieferen Drucken eintreten, wenn die von Glimmlicht durchsetzten Gasmassen nicht wie bei den cylindrischen Röhren der Fig. 1 auf einen verhältnismässig engen Raum zusammengedrängt wurden, sondern wenn ihnen wie bei der Röhre Fig. 2 Gelegenheit geboten wurde, sich namentlich in der Nähe der Elektroden weiter zu verbreiten. Um dieses zu prüfen, wurde ausser der oben benutzten Röhre B Fig. 1 eine zweite Röhre D von der Gestalt der Fig. 2 an die

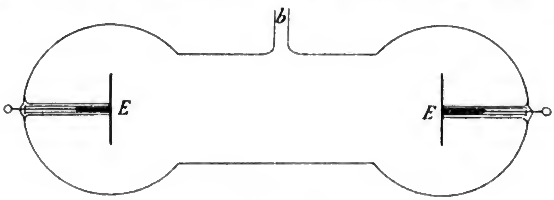



Fig. 2.

Pumpe angeschmolzen; beim Evacuieren wurde durch eine Wippe abwechselnd der einen, dann der anderen der Hoch-

[1]) William P. Graham, Inaug.-Diss., Berlin, 2., p. 31, 1897. Wied. Ann. 64, p. 17, 1898.

[2]) C. F. Varley, Proc. Roy, Soc. 19, p. 238, 1871.

frequenzstrom zugeführt. Bei Röhre D befinden sich die beiden 3,2 cm im Durchmesser haltenden Elektrodenscheiben *EE* aus Aluminium innerhalb kugelförmiger Elektrodenräume von 8,5 cm Durchmesser, so dass rings um die Elektroden noch mindestens 2,6 cm freier Raum bis zur Rohrwandung übrig bleibt; die beiden Elektrodenräume sind durch ein ca. 4 cm weites und nur 6 cm langes cylindrisches Rohr mit einander verbunden, so dass ca. 14,5 cm Elektrodenabstand resultiert. Die Räume der Röhren D und B verhalten sich demnach ungefähr wie 7 : 1, der Elektrodenabstand ist dabei in D noch etwas kleiner als in B.

In den Tabellen 6—8 ist durch die Stellung der Zahlen der Umkehrdruck für beide Röhren hervorgehoben. In der weiteren Röhre D kommen immer grössere Stromstärken zu stande, die Elektrodenspannung ist geringer als in der engeren (und dabei etwas längeren) Röhre B; der Energieverbrauch ist in der letzteren grösser.

*Tabelle 6.* **Stickstoff.**

Röhre D.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *p* | 3,45 | | 2,01 | | | 1,02 | | | 0,63 | 0,53 | | 0,33 |
| *d* | 0,7 | | 1,5 | | | 1,9 | | | | 2,7 | | 3,95 |
| *i* | 14,62 | | 17,66 | | | 19,00 | | | Max. | 19,23 | | 18,78 |
| *V* | 632 | | 464 | | | 387 | | | Min. | 390 | | 424 |
| *E* | 9,25 | | 8,19 | | | 7,36 | | | Min. | 7,51 | | 7,97 |

Röhre B.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *p* | | 3,40 | | 1,98 | 1,07 | | 1,00 | 0,66 | | | 0,34 | |
| *d* | | 0,6 | | 1,4 | 1,8 | | | 2,7 | | | 4,0 | |
| *i* | | 10,88 | | 14,12 | 16,03 | | Max. | 15,39 | | | 13,80 | |
| *V* | | 843 | | 656 | 570 | | Min. | 606 | | | 691 | |
| *E* | | 9,17 | | 9,26 | 9,14 | | Min. | 9,33 | | | 9,54 | |

Man sieht, dass, während sich die Umkehr in dem engen cylindrischen Rohre B bereits bei einem Drucke von $p$ ca. 1,00 mm vollzog, dieselbe in dem viel weiteren Rohre D erst bei dem erheblich tieferen Drucke von etwa 0,63 mm, d. h. nach dem nächsten Pumpenzug eintrat, bei dem der Dunkelraum um ca. 0,8 mm vorgerückt war.

Ganz ähnlich verhält sich Luft.

*Tabelle 7.* **Luft.**

Röhre D.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | | 2,06 | 1,24 | | 0,61 | | (0,60) | 0,47 | 0,27 | 0,19 |
| $d$ | | 1,2 | 1,8 | | 2,4 | | | 3,1 | 4,6 | 7,0 |
| $i$ | | 19,60 | 20,40 | | 20,46 | | Max. | 20,25 | 19,15 | 17,66 |
| $V$ | | 384 | 346 | | 346 | | Min. | 367 | 427 | 505 |
| $E$ | | 7,53 | | | 7,09 | | Min. | 7,44 | 8,18 | 8,92 |

Röhre B.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 2,08 | | 1,24 | (1,00) | | 0,60 | | 0,47 | 0,27 | 0,19 |
| $d$ | 1,2 | | 1,7 | | | 2,9 | | 4,0 | 6,0 | 8,0 |
| $i$ | 15,11 | | 16,74 | Max. | | 16,39 | | 15,58 | 13,71 | 11,90 |
| $V$ | 608 | | 529 | Min. | | 559 | | 614 | 707 | 835 |
| $E$ | 9,19 | | 8,86 | Min. | | 9,16 | | 9,57 | 9,69 | 9,94 |

Bei Sauerstoff zeigen die Umkehrpunkte dieselbe Anordnung, nur sind sie bei beiden Röhren zu etwas höheren Druckwerten aufgerückt; man kann dies nach dem Vorigen als eine Folge der etwas grösseren molecularen Weglängen in diesem Gase betrachten.

*Tabelle 8.* **Sauerstoff.**

Röhre D.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 2,77 | | | | 1,33 | | 1,21 | (1,20) | 1,19 | | 0,92 | | 0,58 | 0,53 | 0,27 |
| $d$ | 0,6 | | | | 1,2 | | 1,3 | | 1,5 | | 1,5 | | 2,4 | 2,5 | 4,4 |
| $i$ | 20,95 | | | | 21,43 | | 21,63 | | 21,63 | Max. | 21,70 | | 20,88 | 20,82 | 19,60 |
| $V$ | 377 | | | | 343 | | 332 | Min. | 335 | | 335 | | 371 | 374 | 461 |
| $E$ | 7,91 | | | | 7,35 | | 7,17 | Min. | 7,26 | | 7,28 | | 7,75 | 7,79 | 9,04 |

Röhre B.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | | 2,75 | 1,80 | (1,70) | 1,32 | 1,24 | 1,21 | | | 0,93 | | 0,89 | 0,58 | 0,54 | 0,27 |
| $d$ | | 0,5 | 0,7 | | 1,1 | 1,3 | 1,3 | | | 1,5 | | 1,7 | 2,4 | 2,4 | 4,4 |
| $i$ | | 19,53 | 19,74 | Max. | 18,46 | 17,82 | 17,58 | | | 17,91 | | 17,74 | 17,66 | 17,17 | 14,82 |
| $V$ | | 447 | 433 | Min. | 502 | 527 | 531 | | | 536 | | 550 | 566 | 579 | 709 |
| $E$ | | 8,73 | 8,55 | Min. | 9,28 | 9,39 | 9,35 | | | 9,60 | | 9,76 | 9,99 | 9,94 | 10,51 |

Bei den übrigen daraufhin untersuchten Gasen, namentlich Wasserstoff, ist der Unterschied in dem Verhalten beider Entladungsräume nicht so scharf markiert. Für die grosse Weglänge dieses Gases und die schnelle Ausbreitung, welche die Kathodenschichten hier erfahren, ist der Raumunterschied in beiden Fällen noch zu unwesentlich.

**3. Vergleich verschieden langer, aber gleichweiter Cylinderröhren.** — Hat es hiernach den Anschein, dass die Umkehr in dem Verlauf von Stromstärke- und Spannungswerten durch Vorgänge bedingt wird, welche von der Kathode ausgehen, in deren Nähe andauern und sich durch eine Art von Diffusion weiter verbreiten, so muss dieselbe bei längeren Röhren und grösserem Elektrodenabstande bei tieferen Drucken eintreten als bei kurzen Röhren von gleichem Querschnitte, in denen die veränderten Gasschichten — durch die Rohrwände zusammengehalten — schon bei höheren Drucken von beiden Seiten her vordringend die Mitte erreichen. Dies wurde mittels zweier gleichzeitig mit der Pumpe in Verbindung stehenden gleichweiten cylindrischen Entladungsröhren von der Form der Figur 1 geprüft, von denen die eine, Röhre A, 33,9 cm Elektrodenabstand, die andere zwei gleichbeschaffene Elektroden besass, welche aber nur 16,8 cm, also sehr nahe halb so weit von einander abstanden, Röhre B. Beide Röhren wurden rasch hinter einander bei denselben Drucken und bei identischer Gasfüllung untersucht.[1])

[1]) Wie Herr Warburg nachgewiesen hat, ändern schon sehr geringe Spuren fremder Beimischungen das Kathodengefälle ausserordentlich; da der grösste Teil des gesammten Spannungsabfalles aber hier

*Tabelle 9a.* Luft.

Röhre A.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *d* | 1,0 | 1,5 | | 1,8 | 2,3 | 2,4 | 3,0 | 3,2 | 5,0 | 5,2 |
| *i* | 12,89 | | 13,37 | 13,89 | 13,89 | 13,76 | 13,59 | 13,76 | 13,56 | 13,37 |
| *V* | 1500 | | 1280 | 1104 | 1024 | 1015 | 1041 | 1033 | 1092 | 1076 |
| *E* | 19,33 | | 17,11 | 15,33 | 14,21 | 14,37 | 14,45 | 14,21 | 14,83 | 14,37 |
| | | | | | | | Umkehr | | | |

Röhre B.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *i* | 14,15 | 13,50 | 13,63 | 13,76 | 13,76 | 14,02 | 14,02 | 13,63 | 13,95 | 13,89 |
| *V* | 903 | 801 | 801 | 754 | 787 | 773 | 804 | 837 | 919 | 973 |
| *E* | 12,77 | 10,81 | 10,92 | 10,37 | 10,85 | 10,83 | 11,27 | 11,40 | 12,82 | 13,52 |
| | | | Umkehr-Schichten | | | | | | | |

Diese Beobachtungsreihe zeigt namentlich bei der langen Röhre A grosse Unregelmässigkeiten, wie sie gerade bei Luft sehr häufig sind. Zwischen den mit 2,3 und 2,4 überschriebenen Beobachtungen war nicht evacuiert worden, sondern die Röhren waren längere Zeit unbenutzt gewesen; man sieht, dass Veränderungen Platz gegriffen hatten, welche den regelmässigen Gang der folgenden Werte beeinträchtigten. Die deutliche Umkehr trat bei dem längeren Rohre aber erst drei Evacuationen später auf. Zur Controle wurde die Beobachtungsreihe in dem charakteristischen Teile wiederholt.

*Tabelle 9b.* Luft.

Röhre A.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *d* | 2,5 | 3,0 | 4,0 | 4,5 |
| *i* | 13,76 | 13,82 | 13,89 | 13,09 |
| *V* | 1059 | 1013 | 1007 | 1042 |
| *E* | 14,56 | 14,01 | 13,98 | 13,66 |
| | | | | Umkehr |

---

auf dieses kommt, so zeigen im Allgemeinen verschiedene Füllungen desselben Gases in demselben Rohre nicht immer genau die gleichen Werte der Grössen *i*, *V* und *E*.

Röhre B.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i$ | 13,63 | 13,63 | 13,37 | 13,37 |
| $V$ | 765 | 801 | 834 | 839 |
| $E$ | 10,42 | 10,92 | 11,15 | 11,21 |
| | Umkehr | | | |

Hier kommt die spätere Umkehr in dem längeren Rohre ganz deutlich zum Ausdruck.

*Tabelle 10.* **Wasserstoff.**

Röhre A.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 3,05 | 2,04 | 1,37 | 0,95 | 0,72 | 0,54 | 0,40 |
| $d$ | 1,5 | 2,0 | 2,8 | 4,0 | 5,0 | 5,6 | 7,0 |
| $i$ | 12,40 | 12,40 | 12,40 | 12,40 | 12,11 | 12,11 | 12,40 |
| $V$ | 1553 | 1276 | 1104 | 1024 | 1019 | 1024 | 1104 |
| $E$ | 19,25 | 15,81 | 13,69 | 12,70 | 12,33 | 12,40 | 13,69 |
| | | | | | Umkehr | | |

Röhre B.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 13,23 | 12,54 | 12,54 | 12,11 | 12,40 | 12,40 | 12,54 |
| $V$ | 801 | 715 | 767 | (767) | 1027 | (923) | (967) |
| $E$ | 10,60 | 8,96 | 9,62 | (9,29) | 12,73 | (11,45) | (12,13) |
| | | Umkehr | | | | | |

Die letzte Reihe ist in den Spannungswerten und damit in den $E$-Werten durch kleine Unregelmässigkeiten etwas entstellt; worauf es hier allein ankommt, die Aufeinanderfolge der Umkehrungen, geht aber dennoch mit genügender Sicherheit hervor.

*Tabelle 11.* **Stickstoff.**

Röhre A.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 2,81 | 1,91 | 1,28 | 0,93 | 0,65 | 0,45 | 0,30 |
| $d$ | 0,5 | 1,5 | 2,1 | 2,5 | 3,5 | 4,0 | 6,0 |
| $i$ | 11,05 | 12,13 | 12,65 | 12,97 | 12,80 | 12,80 | 12,97 |
| $V$ | 1758 | 1472 | 1264 | 1114 | 1039 | 1033 | 1128 |
| $E$ | 19,41 | 17,86 | 15,99 | 14,46 | 13,30 | 13,23 | 14,63 |
| | | | | | | Umkehr | |

Röhre B.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$ | 12,80 | 12,97 | 12,97 | 12,97 | 12,97 | 12,97 | 12,97 |
| $V$ | 1051 | 901 | 796 | 743 | 737 | 812 | 984 |
| $E$ | 13,46 | 11,69 | 10,33 | 9,64 | 9,57 | 10,53 | 12,77 |
| | | | | | Umkehr | | |

Dem Umstande entsprechend, dass die Umkehr in dem längeren Rohre erst bei erheblich tieferen Drucken eintritt, zeigen sich hier auch die Schichten erst sehr viel später als in dem mit ihm in Communication stehenden kürzeren Rohre. Beide Erscheinungen, Umkehr und Schichtenbildung, machen ganz den Eindruck, als beruhten sie auf einer Art Stauwirkung; das vollkommen entsprechende Verhalten derselben in vorliegendem Falle macht diese Anschauung nur noch wahrscheinlicher.

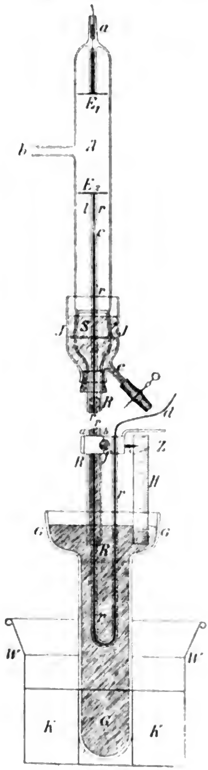
Bei den sehr schnellen, aber verhältnismässig rasch gedämpften Schwingungen des Lecherschen Systems war die Begrenzung der Dunkelräume bei kürzeren cylindrischen Röhren immer prägnanter als bei längeren, wo sie merklich unschärfer war.[1]) Bei den hier verwendeten ungedämpften Wechselstromschwingungen war dies nicht der Fall.

Auch bei den sogleich zu beschreibenden Versuchen mit einer beweglichen Elektrode behielten beide Dunkelräume ihre scharfe Grenze gegen die Glimmlichter bei allen Abständen der Elektroden von einander bei.

**4. Versuche mit einem Cylinderrohre mit einer feststehenden und einer beweglichen Elektrode.** — Die die Umkehr von Stromstärke, Spannung und Energieconsum bedingenden Vorgänge scheinen nach dem Vorhergehenden ihren Sitz in dem ganzen Glimmlichtraume bis in den vorderen, unsichtbaren Saum desselben hinein zu haben. Es musste von entscheidender Wichtigkeit sein, diesen Schluss in demselben Entladungsraume bei demselben Drucke und der gleichen Gasfüllung an einem Rohre zu prüfen, welches gestattete, während der Entladung selbst die vorderen Punkte der Glimment-

[1]) H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. **50**, p. 239, 1893.

ladung gegen einander zu führen und so bei denselben äusseren Entladungsbedingungen, namentlich bei demselben Drucke jene eigentümliche Umkehr nach Willkür hervorzurufen. Die Glimmlichtgebilde folgen ihrer Kathode, an der sie angeheftet zu sein scheinen; die die Umkehr herbeiführende Wirkung musste also lediglich durch Verkürzung des Elektrodenabstandes herbeizuführen sein.


Fig. 3.

Um dies zu bewerkstelligen, wurde eine Anordnung mit einer festen und einer beweglichen Elektrode benutzt, wie sie ähnlich schon von Herrn R. W. Wood beschrieben worden ist.[1])

Das 3,5 cm weite, 30 cm lange cylindrische Rohr A Fig. 3 trägt oben die feststehende Elektrode $E_1$ (Kreisscheibe aus Aluminium von 2,7 cm Durchmesser); die Stromzuleitung geschieht von oben her mittels des angesetzten Quecksilbernäpfchens *a*, um Funkenstrecken zu vermeiden; durch *b* steht das Rohr *A* dauernd mit der Quecksilberluftpumpe in Verbindung. Unten trägt es den weiten Schliff *S*, an dem das 14 mm weite, 80 cm lange vertikale Rohr *R* angesetzt ist. Durch *S* kann die untere, ebenfalls 2,7 cm im Durchmesser haltende Elektrode $E_2$ eingeführt werden, welche von einem Glasrohre *r* getragen wird, welches durch *R* hindurchgeführt und das unten *U*-förmig umgebogen ist. Die Zuleitung geschieht mittels eines durch *r*

1) R. W. Wood, Wied. Ann. **59**, p. 246, 1896.

hindurchgezogenen Kupferdrahtes, der oben bei *c* an einem Platindraht hart angelötet ist; auf diesen wird der Aluminiumstiel *l* der Elektrode $E_2$ fest aufgedrückt, so dass ein vollkommen metallischer Contact besteht. Bei *c* liess man das Rohr *r* vor der Gebläselampe zusammenfallen, bis sich das Glas allseitig dicht an das Platin anlegte; so wurde hier ein völlig gasdichter Abschluss erzielt.

Das untere Ende des Rohres *R* taucht in das mit Quecksilber gefüllte, oben napfartig erweiterte Standgefäss *S*, welches von einem in der Schwarzblechwanne *W* befindlichen Holzklotze *K* gehalten wird. Wird *A* durch *b* hindurch evacuiert, so steigt das Quecksilber in *R* in die Höhe und bildet einen Barometerabschluss, der dem Rohre *r* dennoch völlige Bewegungsfreiheit gestattet. Mittels desselben kann die Elektrode $E_2$ in jede beliebige Höhe gebracht und durch Festklemmen des Rohres *r* bei *f* in dieser erhalten werden; der Zeiger *Z* gestattet auf einer Skala *H* den Elektrodenabstand $E_1 E_2 = a$ direkt abzulesen.

Damit an dem Schliffe *S* eine völlige Dichtung bei Anwendung möglichst geringer Mengen von Fett und dergleichen erzielt wird, ist von unten her um denselben herum der Glasbecher *J* mittels Kautschuckstopfens befestigt, der mit Quecksilber gefüllt wird, welches durch *e* wieder abgelassen werden kann.

Die Resultate der mit diesem Apparate angestellten Beobachtungsreihen enthalten die folgenden Tabellen.

*Tabelle 12.* Luft.

| | *d* | | | | 1,5 | 2,2 | 3,2 | 5,0 | 7,5 | 10,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 22$ cm | *i* | 11,50 | 11,65 | 12,96 | 13,63 | 14,02 | 14,02 | 13,89 | 13,63 | 13,76 |
| | *V* | 1826 | 1732 | 1312 | 846 | 759 | 734 | 794 | 992 | 1208 |
| | *E* | 20,94 | 20,18 | 17,00 | 11,53 | 10,64 | 10,30 | 11,03 | 13,52 | 16,62 |
| | | | | | | | Umkehr | | | |
| $a = 12$ cm | *i* | 13,23 | | 14,02 | 14,02 | 14,02 | 14,02 | 14,15 | 13,89 | 14,27 |
| | *V* | 1076 | | 819 | 578 | 541 | 585 | 746 | 1015 | 1240 |
| | *E* | 14,23 | | 11,49 | 8,10 | 7,58 | 8,20 | 10,54 | 14,09 | 17,63 |
| | | | | | | Umkehr | | | | |
| $a = 2$ cm | *i* | 14,02 | | 14,40 | 14,27 | 14,15 | 14,27 | 14,15 | 13,76 | 14,27 |
| | *V* | 430 | | 406 | 351 | 396 | 497 | 715 | 996 | 1193 |
| | *E* | 6,04 | | 5,84 | 5,02 | 5,60 | 7,09 | 10,11 | 13,71 | 17,03 |
| | | | | | Umkehr | | | | | |

*Tabelle 13.* **Wasserstoff.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | 4,39 | 2,89 | 1,94 | 1,28 | 0,85 | 0,59 | 0,43 |
| | $d$ | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 3,5 | 4,2 | 5,5 | 6,5 |
| $a = 22$ cm | $i$ | 12,54 | 12,25 | 12,82 | 12,68 | 12,82 | 12,68 | 12,54 |
| | $V$ | 1083 | 851 | 726 | 679 | 706 | 773 | 880 |
| | $E$ | 13,58 | 10,42 | 9,31 | 8,61 | 9,05 | 9,80 | 11,04 |
| | | | | | | Umkehr | | |
| $a = 12$ cm | $i$ | 12,96 | 12,82 | 13,09 | 12,96 | 12,82 | 13,09 | 12,96 |
| | $V$ | 679 | 556 | 521 | 525 | 588 | 676 | 817 |
| | $E$ | 8,78 | 7,12 | 6,83 | 6,81 | 7,54 | 8,85 | 10,58 |
| | | | | Umkehr | | | | |
| $a = 2$ cm | $i$ | 13,37 | 13,23 | 13,09 | 12,96 | 13,09 | 13,09 | 13,37 |
| | $V$ | 363 | 346 | 380 | 421 | 517 | 642 | 781 |
| | $E$ | 4,85 | 4,57 | 4,97 | 5,45 | 6,77 | 8,40 | 10,43 |
| | | | Umkehr | | | | | |

*Tabelle 14.* **Stickstoff.**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | 2,85 | 1,91 | 1,25 | 0,82 | 0,54 | 0,35 | 0,26 |
| | $d$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,7 | 4,0 | 6,5 | 8,0 |
| $a = 22$ cm | $i$ | 12,13 | 12,30 | 12,30 | 12,47 | 12,65 | 12,65 | 12,47 |
| | $V$ | 1119 | 925 | 849 | 740 | 720 | 791 | 965 |
| | $E$ | 13,58 | 11,39 | 10,45 | 9,23 | 9,11 | 10,00 | 12,03 |
| | | | | | | Umkehr | | |
| $a = 12$ cm | $i$ | 12,65 | 12,47 | 12,47 | 12,47 | 12,80 | 12,65 | 12,47 |
| | $V$ | 667 | 567 | 509 | 533 | 592 | 723 | 984 |
| | $E$ | 8,43 | 7,07 | 6,35 | 6,65 | 7,58 | 9,14 | 12,27 |
| | | | | Umkehr | | | | |
| $a = 2$ cm | $i$ | 13,13 | 12,80 | 12,80 | 12,65 | 12,65 | 12,97 | 12,65 |
| | $V$ | 321 | 333 | 363 | 411 | 513 | 694 | 930 |
| | $E$ | 4,21 | 4,27 | 4,65 | 5,20 | 6,49 | 9,00 | 11,76 |
| | | Umkehr | | | | | | |

Die Tabellen 12—14 lassen übereinstimmend den folgenden Gang der Erscheinung deutlich erkennen: Bei demselben Drucke wird die Stromstärke um so grösser, je näher die Elektroden einander kommen, die Spannung sowie der Wattconsum werden

kleiner.[1]) Dies ist ohne Weiteres verständlich, denn mit abnehmendem *a* wird die zum Leuchten zu bringende Gassäule und damit die Widerstandsstrecke kürzer; doch besteht augenscheinlich keine einfache Beziehung zwischen der auf die 10 cm, um welche Länge die Gassäule je zweimal verkürzt wurde, entfallenden Spannungsdifferenz und der Stromstärke, etwa wie bei dem Ohmschen Gesetz; der Widerstand des Gases ist selbst wieder von der letzteren abhängig; auch sind die Spannungsabfälle auf den beiden gleichlangen Strecken, um die die Säule verkürzt wurde, nicht einander gleich, was darauf hinweist, dass die einzelnen Teile der Säule in ihren Widerstandsverhältnissen einander sehr ungleichwertig sind.[2]) Die Zahlen zeigen aber ferner die folgenden, für unseren Zweck wichtigeren Eigentümlichkeiten: Bei grossen Elektrodenabständen tritt die Umkehr ganz in Uebereinstimmung mit § 2 und 3 bei viel tieferen Drucken ein als bei kleinen Abständen. Wenn ferner beim Annähern der beweglichen Elektrode auch die Spannung sinkt, die Stromstärke wächst, so geht dies doch immer langsamer vor sich, je näher die Glimmlichter einander rücken. Für die Spannung tritt dies am deutlichsten hervor, vergl. Tabelle 15. Es findet eine Rückstauung statt. Ja, bei der Begegnung der Glimmlichter, in der Nähe der Umkehrdrucke kann die Spannungsabnahme in Folge der Annäherung sogar durch die von der Begegnung bedingte Spannungssteigerung überwunden werden, so dass die Spannung bei nahen Elektroden gleich oder sogar noch grösser ist als diejenige bei grösserem Elektrodenabstande. Analoges gilt für die Stromstärke. In den Tabellen sind die Werte, welche diese Stauwirkung ganz besonders gut veranschaulichen, fett gedruckt. Man sieht, dass sie sich durchaus um die Umkehrdrucke gruppieren und erst häufiger werden, nachdem die Begegnung stattgefunden hat. Zu beachten ist

---

[1]) Wie aus der Vergleichung der *d*- und der *a*-Werte hervorgeht, wurde eine so grosse Annäherung der Elektroden, dass die eine in den Dunkelraum der anderen eindrang, wobei sich ausserordentliche Spannungssteigerungen ergeben, vermieden.

[2]) Vergl. auch Ed. Riecke, Wied. Ann. **63**, p. 227, 1897.

*Tabelle 15.*

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Luft | $d$ | | | | 1,5 | 2,2 | 3,2 | 5,0 | 7,5 | 10,0 |
| $a = 22$ cm | $V_1$ | 1826 | 1732 | 1312 | 846 | 759 | 734 | 794 | 992 | 1208 |
| $a = 12$ cm | $V_2$ | 1076 | | 819 | 578 | 541 | 585 | 746 | 1015 | 1240 |
| $a = 2$ cm | $V_3$ | 430 | | 406 | 351 | 396 | 497 | 715 | 996 | 1193 |
| $V_1 - V_2$ | | 750 | | 493 | 268 | 218 | 149 | 48 | − 23 | − 32 |
| $V_2 - V_3$ | | 646 | | 413 | 227 | 145 | 88 | 31 | 19 | 47 |
| $H_2$ | $p$ | | 4,39 | 2,89 | 1,94 | 1,28 | 0,85 | 0,59 | 0,43 | |
| | $d$ | | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 3,5 | 4,2 | 5,5 | 6,5 | |
| $a = 22$ cm | $V_1$ | | 1083 | 851 | 726 | 679 | 706 | 773 | 880 | |
| $a = 12$ cm | $V_2$ | | 679 | 556 | 521 | 525 | 588 | 676 | 817 | |
| $a = 2$ cm | $V_3$ | | 363 | 346 | 380 | 421 | 517 | 642 | 781 | |
| $V_1 - V_2$ | | | 404 | 295 | 205 | 154 | 118 | 97 | 63 | |
| $V_2 - V_3$ | | | 316 | 210 | 141 | 104 | 71 | 34 | 36 | |
| $N_2$ | $p$ | 2,85 | 1,91 | 1,25 | 0,82 | | 0,54 | | 0,35 | 0,26 |
| | $d$ | 1,0 | 1,5 | 2,0 | 2,7 | | 4,0 | | 6,5 | 8,0 |
| $a = 22$ cm | $V_1$ | 1119 | 925 | 849 | 740 | | 720 | | 791 | 965 |
| $a = 12$ cm | $V_2$ | 667 | 567 | 509 | 533 | | 592 | | 723 | 984 |
| $a = 2$ cm | $V_3$ | 321 | 333 | 363 | 411 | | 513 | | 694 | 930 |
| $V_1 - V_2$ | | 452 | 358 | 340 | 207 | | 128 | | 68 | − 19 |
| $V_2 - V_3$ | | 346 | 234 | 146 | 122 | | 79 | | 29 | 54 |

dabei immer, dass es sich um eine Durchdringung nur der Glimmlichter, nicht aber der Hittorfschen Dunkelräume handelt, und dass die Durchdringung desselben Raumes zeitlich nacheinander stattfindet. Auch treten die Umkehrungen immer schon bei so hohen Drucken und so kleinen $d$ auf, dass die Anoden der jedesmaligen Entladungen bei den hier eingehaltenen Abständen $a$ noch vollkommen ausserhalb ihrer eigenen zugehörigen Glimmlichter liegen, wie schon das Vorhandensein einer merklich ausgedehnten Anodensäule und die Controle im Drehspiegel erkennen lassen. Das Phänomen ist also nicht etwa auf die bekannte, in neuester Zeit von Herrn Wehnelt[1])

[1]) A. Wehnelt, Wied. Ann. **65**, p. 521 f., 1898.

durch Messungen genauer verfolgte Potentialsteigerung zurückzuführen, welche eintritt, wenn man die Anode durch ihr eigenes Glimmlicht hindurch gegen den Dunkelraum der der gleichen Entladung angehörenden Kathode voranschiebt.

**5. Verhalten gekreuzter Entladungen.** — Bei allen bisher verwendeten Entladungsröhren lagen sich die Elektroden direkt gegenüber und es war die eine von der anderen aus sichtbar; jede Elektrode wird also, auch wenn sie Anode ist, von Kathodenlicht getroffen. Nun ist bekannt, wie stark elektrische Entladungen, namentlich in gasverdünnten Räumen durch die von der Kathode ausgehenden Strahlungen, das ultraviolette Licht der Glimmlichtstrahlen, bei tiefen Drucken durch die Kathoden- und Röntgenstrahlen beeinflusst werden. Es war demnach zu untersuchen, ob die oben beschriebenen Ergebnisse eine Modification erfahren, wenn die Elektroden so angeordnet werden, dass sie sich nicht direkt gegenüber stehen und die genannten Strahlungen nicht von einer zur anderen übergehen können, wofür schon das Dazwischentreten der Glaswände des Rohres selbst genügt. Insbesondere war zu prüfen, ob die beschriebene Umkehr nur eintritt, wenn die Glimmlichtstrahlen gegen einander geschickt werden, oder ob die spannungssteigernde Wirkung auch eintritt, wenn diese Strahlen etwa rechtwinklig gegen einander verlaufen.

Um beide Fälle bei demselben Drucke in dem gleichen Entladungsrohre direkt mit einander vergleichen zu können, wurde das Kreuzrohr Fig. 4 verwendet, welches aus vier rechtwinkelig gegen einander stossenden, je 10 cm langen, 2,5 cm weiten Cylinderröhren besteht; alle vier Arme tragen genau gleiche Scheibenelektroden von 2,0 cm Durchmesser, welche so genau als irgend möglich gleichweit (6,5 cm) von dem Kreuzungspunkte der Rohraxen entfernt angebracht sind.[1])

[1]) Das Rohr ist mit grosser Sorgfalt in dem glastechnischen Institute von Louis Müller-Unkel, jetzt Müller-Uri in Braunschweig hergestellt worden und hat auch bei genauester Prüfung keine Ungleichartigkeit seiner einzelnen Teile erkennen lassen.

Die Rohraxen liegen in einer Ebene; senkrecht zu derselben verläuft das zur Evacuation angesetzte Biegerohr *(b)*.

Schliesst man die Punkte *ab* oder *cd* an den Hochspannungstransformator an, so wirkt der Entladungsapparat wie eine der bisher benutzen cylindrischen Röhren; werden *ac*, *cb*, *bd* oder *da* angeschlossen, so erhält man gekreuzte Glimmlichter.

Sowie die Glimmlichter von irgend einer Seite her bis zur Mitte bei den aufeinander folgenden Phasen

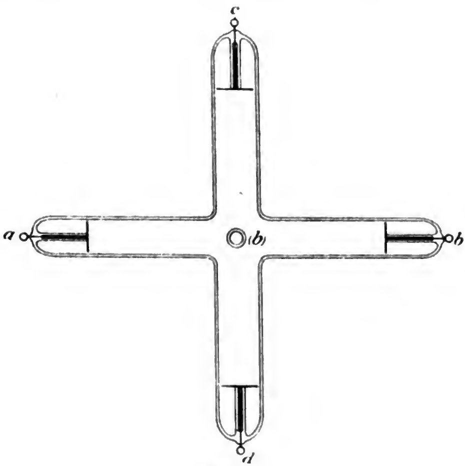



Fig. 4.

der Wechselstromentladungen vordringen, tritt die Umkehr ein, gleichgiltig, ob einander gegenüber liegende Elektroden benutzt werden, oder die Entladungsbahnen sich kreuzen.

Die Abweichungen der gemessenen elektrischen Grössen bei dem einen oder anderen Entladungswege von einander liegen stets innerhalb der Grenze der unvermeidlichen Beobachtungsfehler. Es sind also nicht die Glimmlichtstrahlen selbst,

etwa eine Art Nachleuchten derselben, welche die Erscheinung bedingen, sondern eine nachdauernde Veränderung in dem von ihnen durchstrahlten Gasraume. Auch auf die Rolle, welche man den Wandladungen der Röhre hierbei zuzuschreiben etwa geneigt sein könnte, werfen die genannten Versuche Licht. Diese Ladungen müssen offenbar im Falle gekreuzter Entladungen wesentlich anders verteilt sein, als in dem Falle direkter Entladungen, wie sie in den früher benutzten Röhren vorliegen.

**6. Zwei gleiche Cylinderröhren in Parallelschaltung.** — Mit Hilfe der Spannungssteigerung in Folge von Vorgängen bei der Entladung selbst innerhalb desselben Rohres musste es möglich sein, eine Art Auto-Ventilwirkung zu erzielen, d. h. die Entladung zu veranlassen, sich selbst von einem von ihr bisher allein eingenommenen Entladungswege abzudrängen und z. T. in einen parallel geschlossenen mit hinüber zu gehen. Dieser Versuch gelang.

Zwei einander vollkommen gleiche Cylinderröhren Fig. 1 $R_1$ und $R_2$ werden neben einander nach dem Schaltschema Fig. 5 in den Hochspannungswechselstromkreis eingeschaltet; die von dem Transformator $TT$ kommenden Kabel wurden zwischen beiden Röhren so verzweigt, dass beiden der Strom durch kurze gleichlange und gleichdicke Leitungen von beiden Seiten her zugeführt wurde.

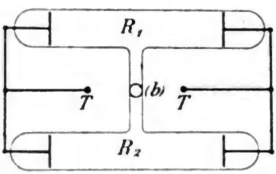


Fig. 5.

Dass sowohl die Röhren wie die Zuleitungen zu beiden wirklich als fast vollkommen identisch betrachtet werden konnten, wurde daran erkannt, dass bei höheren Drucken bald die eine, bald die andere Röhre aufleuchtete, ohne dass eine derselben irgendwie in auffallender Weise bevorzugt wurde.[1])

---

[1]) Bei Füllung mit Luft und im Anfange, als die Röhren eben frisch an die Pumpe angesetzt worden waren, konnte der schmale röthliche

Bei tieferen Drucken wurde die Verteilung der Entladung insofern stabiler, als die Entladung bei Stromschluss immer mehr dasjenige Rohr bevorzugte, welches schon vorher geleuchtet hatte. In demselben waren die Elektroden warm geworden und es ist bekannt, wie eine Entladung das Eintreten der nachfolgenden erleichtert, entweder dadurch, dass die Elektroden gereinigt und aufgelockert sind, oder durch Bildung von Jonen (vergl. die Anregbarkeit von elektrodenlosen Röhren in elektrischen Wechselfeldern). Näherte man sich dem von uns als „Umkehrdruck“ bezeichneten Druckwert, so setzte die Entladung nach jeder Unterbrechung mit Bestimmtheit immer wieder in demselben Rohre ein, dessen Elektroden dadurch sehr heiss gemacht werden konnten. In dem Momente aber, wo der rotierende Spiegel zeigte, dass die äussersten Glimmlichtspitzen nach einander von beiden Seiten her die Mitte des Rohres trafen, begann das andere Rohr regelmässig mitzuleuchten, die Entladung ging gleichzeitig durch beide Röhren. Wiewohl also die Röhre, welche bis dahin den Ausgleich allein vermittelt hatte, erheblich prädisponiert war auch zur weiteren Stromführung, setzte doch die Entladung im genannten Augenblicke in dem anderen Rohre mit kalten Elektroden und ohne die unterstützende Wirkung vorhergehender Entladungen ein, augenscheinlich, weil sich in dem ersten Rohre bei der Begegnung der Glimmlichter die zur Entladung nötige Spannung erheblich steigert. Es ist hier wie in allen früheren Fällen, als ob sich in diesem Momente

Lichtfaden, der von den mit einem bläulichen Glimmlichtbüschel bedeckten Elektroden nach der Rohrmitte zu sich erstreckte, leicht durch äussere Ableitungen derart beeinflusst werden, dass die Entladung von dem einen Rohre auf das andere übersprang. Ging die Entladung etwa durch $R_1$, so genügte das Anlegen eines 4 cm breiten Staniolstreifens an $R_1$ in der Nähe der Elektroden, um hier die Entladung sofort erlöschen und durch $R_2$ hindurch gehen zu lassen. Bei späteren Versuchen, als die Röhren trockener waren, sich Quecksilberdampf in reichlicherer Menge von der Pumpe her in sie hineingezogen hatte, zeigten die Entladungen auch bei hohen Drucken nicht mehr diese Empfindlichkeit.

der Gasdruck in dem stromdurchflossenen Rohre erhöhe. Dass diese Druckerhöhung aber nur eine scheinbare ist, wurde durch sehr häufige Controlen an dem Manometer nachgewiesen; jedenfalls sind die durch die Entladung von den Elektroden etwa losgerissenen Spuren von Gasresten bei weitem nicht hinreichend, um die Umkehr und die im vorliegenden Falle damit in Verbindung stehende Ventilwirkung herbeizuführen. Durch die Wirkung schon eines schwachen transversalen Magnetfeldes wurde die Entladung in einem Rohre ausgelöscht, angelegte Ableitungen riefen sie wieder hervor.

Also nicht einfach deshalb, weil ein gewisser Druckwert erreicht wird, tritt die Umkehr, die Spannungssteigerung und Stromabnahme ein, sondern, weil sich im Rohre selbst gewissermassen elektromotorische Gegenkräfte entwickeln. Denn sonst wäre kein Grund vorhanden, warum die Entladung auf die andere Röhre überspringen sollte, in der ja genau der gleiche Gasdruck herrscht. Durch die Entladung selbst muss also ein Hindernis geschafft werden. Das Auftreten der Gegenkraft ist an den Moment gebunden, wo das Glimmlicht der einen Entladung gezwungen wird, in einen Raum einzudringen, den vorher das Glimmlicht einer anderen Entladung, wenn auch nur zum kleinen Teile, inne gehabt hatte. Der Process der Auslösung der eigentlichen, sichtbaren Entladung wird demnach in den vordersten Saum des Glimmlichtes verlegt, wo auch anderweitige Beobachtungen den Sitz des eigentlichen Ausgleiches beider Elektricitäten vermuten liessen.

Der genannte Ventilversuch gelingt mit allen Gasen, besonders gut mit Luft, Stickstoff, Kohlensäure und Wasserstoff. Das Mitleuchten einer parallel geschalteten gleichbeschaffenen Entladungsröhre giebt ein sehr einfaches und empfindliches Kriterium an die Hand zur Entscheidung der Frage, wann man beim Evacuieren bei dem Umkehrdrucke $U$ angelangt ist.

So ergab sich z. B. bei einer Versuchsreihe mit Stickstoff $U$ zu 0,70 mm, bei einer Reihe mit denselben Röhren bei Füllung mit Kohlensäure zu 0,47 mm. Das Verhältnis dieser

Umkehrdrucke ist 1,49, das ist sehr nahe dasselbe wie das Verhältnis der freien Weglängen bei demselben Drucke: 1,46. Hierdurch wird das schon in § 1 ausgesprochene Gesetz bestätigt.

---

Was die Erklärung des im Vorstehenden nach verschiedenen Seiten hin studierten Phänomens betrifft, so würde man bis vor Kurzem wahrscheinlich zu andauernden Aetherbewegungen gegriffen haben, welche die Kathodenphänomene begleiten sollten. Seit indessen für die Ueberzeugung sichere, namentlich auch quantitative Anhaltspunkte gewonnen worden sind, dass die Canal- und Kathodenstrahlen aus positiv bezw. negativ geladenen kleinsten Teilchen bestehen, die mit grosser Geschwindigkeit von den Elektroden los- und in den Gasraum hineingeschleudert werden, wird man eher geneigt sein, an das Auftreten ähnlicher Teilchen, etwa Jonen, und eine Art Diffusionsprocess derselben durch das Gas hindurch zu denken. Die Production solcher Teilchen muss auch schon bei höheren Gasdrucken stattfinden, wenn sie hier auch in Folge häufigerer Zusammenstösse mit den elektrisch neutralen Gasmolekülen sehr bald ihre grossen translatorischen Geschwindigkeiten einbüssen, und daher nicht zu dem Phänomen ausgedehnterer Strahlungen mit geradliniger Fortpflanzung führen können. Herr E. Riecke hat eine, wie mir scheint, höchst beachtenswerte Theorie der Gasentladungen in diesem Sinne angedeutet.[1]) Auf Grund der Annahme, dass den unelektrischen Molecülen des Gases positive und negative, einwertige Jonen in verhältnismässig kleiner Zahl beigemischt sind, wird es ihm möglich, auf den Elektricitätsausgleich in den Gasen analoge Betrachtungen in Anwendung zu bringen, wie sie ihn zu einer molecularen Theorie der Diffusion und Elektrolyse geführt hatten. Aus Beobachtungsdaten der Herren Hittorf und Warburg leitet er ab, dass die Zeit zwischen zwei Zusammenstössen an der Kathode für die angenommenen Jonen beträchtlich kleiner

---

[1]) Ed. Riecke, Wied. Ann. **63**, p. 220, 1897.

als für die Molecüle neutraler Gase ist. Die mit grösseren als den mittleren molecularen Geschwindigkeiten behafteten positiv geladenen Teilchen, deren Concentration an der Kathode relativ sehr gross ist, und die, wie die Messungen des Potentialgefälles zeigen, das ganze Glimmlicht erfüllen, müssen verhältnismässig rasch durch das Gas hindurch diffundieren. Die erhöhte Zahl ihrer Zusammenstösse mit den Gasmolecülen verhält sich so, als ob das Gas entsprechend dichter, der Gasdruck grösser wäre. In der That wirkt die Begegnung der Glimmlichter nach einander in der Mitte des Rohres ganz im gleichen Sinne wie eine Druckerhöhung, wie namentlich aus den in § 6 beschriebenen Versuchen hervorgeht: Die Spannung wird erhöht, die Stromstärke herabgedrückt, gerade, als ob man von dem „Umkehrdrucke" nicht zu niedrigen Drucken überginge, wie es thatsächlich der Fall ist, sondern zu höheren. Dass die bis in die vordersten Spitzen des Glimmlichtes vorgedrungenen, mit freier positiver Ladung versehenen Teilchen, welche hier eine merkliche räumliche Dichte der $+E$ bedingen, auch noch eine gewisse Zeit lang in dem Gase verbleiben, ehe sie sich etwa an die Wände anlagern, scheint mit Rücksicht auf die endliche Diffusionsgeschwindigkeit wahrscheinlich. Eine positiv geladene Glimmlichtsäule findet aber in einem z. T. mit solchen + Jonen bereits erfüllten Gasraume offenbar andere Bedingungen zu ihrer Ausbildung vor, als in einem nur von neutralen Gasmolecülen eingenommenen Raume; dass dazu höhere Spannungswerte erforderlich sind, folgt aus der elektrostatischen Abstossung der bereits vorhandenen und der neuen Teilchen, welche mit einer gewissen Geschwindigkeit durch denselben Raum getrieben werden sollen.[1]) Daher die Spannungssteigerung bei dem Umkehrpunkte, welche eine Verminderung der Stromstärke zur unmittelbaren Folge hat. Diese an sich unsichtbaren Diffusionsvorgänge der mit freier Ladung versehenen

[1]) Da diese relativ stärker bewegten Teilchen nicht zu gleicher Zeit die leuchtenden zu sein brauchen, so ist nicht zu verwundern, dass das Spectroskop keine Linienverschiebungen zeigt.

und schon bei der ersten Entladung in das Gas hineingeschleuderten Jonen haben daher einen maassgebenden Einfluss auf die Ausgestaltung des sichtbaren Teiles der Entladung, das Vorschiessen der Glimmlichtsäule, die Abschnürung der Anodensäule u. s. w.[1])

So dürfte die Rieckesche Theorie im Stande sein, eine Erläuterung der in Rede stehenden Erscheinung zu geben. Dieselbe tritt hier bei Anwendung des Hochfrequenzstromes besonders auffallend zu Tage. Die genannten intermolecularen Vorgänge müssen aber auch bei einer Aufeinanderfolge gleichgerichteter Entladungen in Wirksamkeit treten. Erregen wir durch den Oeffnungsstrom eines Inductoriums, durch eine Influenzmaschine oder eine Hochspannungsbatterie, so folgt eine grosse Zahl von Einzelentladungen, — im letzteren Falle vielleicht unendlich viele — gleichsinnig aufeinander. Durch jede einzelne werden + Jonen in den vom Glimmlicht eingenommenen Gasraum hineingeschleudert. Daher kann auch hier bei fortschreitender Evacuation die Umkehrerscheinung auftreten, das Spielen der Entladung selbst wirkt wie Druckerhöhung, was gelegentlich auch schon beobachtet wurde. Ebenso ist das hier verwendete Zeitintervall nicht das einzige, bei dem die Erscheinung beobachtbar ist; da die Ladung der Glimmlichtatmosphäre sich längere Zeit, wenn auch mit rasch abnehmender Raumdichte, erhält, so lassen sich deren Wirkungen auch schon bei langsamerem Zeichenwechsel nachweisen, deutlicher treten sie natürlich bei höheren Frequenzen auf, vergl. auch S. 528.

Für die letztgenannten Ausführungen sprechen eine Reihe von anderweitigen Erfahrungen: 1. Mit Hilfe des hochempfindlichen Neesenschen Verdampfungscalorimeters war es den Herren A. Paalzow und F. Neesen[2]) gelegentlich ihrer

---

1) Auch Herr A. Righi (Mem. della R. Acc. di Bologna (5), **3**, p. 115, 1893; Beibl. **17**, p. 978, 1893) hält eine Erklärung seiner Resultate über Sondenpotentiale durch die Annahme für möglich, dass sich um jede Elektrode (und hauptsächlich um die Kathode) eine Atmosphäre von elektrisiertem Gas bildet.

2) A. Paalzow und F. Neesen, Wied. Ann. **56**, p. 276 u. p. 700, 1895.

Untersuchung über den Durchgang der Elektricität durch Gase möglich, auch die elektrischen Grössen für eine einzige Entladung bei verschiedenen Drucken zu messen. Betrachtet man die hierbei erhaltenen, a. a. O. p. 298 in Tabelle I zusammengestellten, in Fig. 5 graphisch veranschaulichten Werte, so erkennt man, dass ein Minimum der Spannung (durch $W/Q$ gemessen), wie es unserer „Umkehrungserscheinung" entspricht, absolut nicht angezeigt ist. Liessen aber die genannten Forscher den Strom ihrer Hochspannungsbatterie während 20 Secunden durch dieselben Entladungsröhren gehen (p. 298, Tabelle II, Fig. 6), so trat die Maximumserscheinung des Stromes, das Minimum der Spannung ($W/Q$) deutlich hervor, vergl. p. 301. Auch die Coincidenz beider Punkte ist ihnen bei direkten Messungen nicht entgangen, vergl. p. 289.

2. Legt man eine Entladungsröhre an eine ergiebige Spannungsquelle, so beobachtet man oft, dass die typische Lichterscheinung sich nicht sofort herstellt; mitunter erfolgt die Ausbildung so allmählich, dass man ihre einzelnen Stadien mit dem Auge verfolgen kann u. s. w. —

Die obigen Andeutungen über die Art des Zustandekommens der Erscheinung mögen genügen; wichtiger erscheint mir der Hinweis, dass durch dieselbe eine Reihe früher beobachteter, seither noch der Deutung harrender Phänomene auf eine sehr einfache Weise erklärt wird; ich führe nur die folgenden an:

1. Die älteste Beobachtung über eine Nachdauer oder ein Vorherrschen der Kathodenerscheinung rührt wohl von Herrn A. Schuster[1]) her. Er fand bei seinen eingehenden Studien über das Sauerstoffspectrum, dass das für die Kathodenerscheinung in Sauerstoff charakteristische Licht bei einer Umkehr des Primärstromes des erregenden Inductoriums noch eine Zeit lang andauert an derjenigen Elektrode, welche durch die Umkehr Anode geworden, vorher aber Kathode gewesen war; erst allmählich, d. h. nach mehreren Entladungen tritt das für

[1]) A. Schuster, Phil. Trans. London, **170**, P. I, p. **41**, **1879**.

die Anodenerscheinung charakteristische Licht an der neuen Anode auf. Schusters Röhren hatten enge capillare Verbindungsstücke zwischen den Elektrodenräumen, durch die nur eine verhältnismässig langsame Diffusion hindurch stattfinden konnte. Wendet man so geringe Wechselzahlen, wie sie sich beim Inductorium durch Commutieren eben nur herstellen lassen, an, so bedarf man enger Capillaren, die den Diffusionsstrom genügend verlangsamen, um die Erscheinung hervorzurufen; bei den 800—1000 Wechseln in der Secunde, wie ich sie anwendete, erscheint das Schustersche Phänomen in jeder noch so weiten Röhre.

2. Herr E. Wiedemann und ich selbst[1]) beobachteten in dem Hochfrequenzfelde des Endcondensators eines einmal überbrückten Lecherschen Drahtsystems, dass irgend ein elektrodenloses, mit verdünntem Gase gefülltes, in dem Wechselfelde leuchtendes Glasgefäss in dem Momente erlischt, in welchem sich die von beiden Seiten her bei abnehmenden Drucken vorrückenden Glimmlichter in seiner Mitte begegnen. Die Folge davon war, dass kleinere Entladungsgefässe, bei denen dies früher eintrat, schon bei höheren Drucken erloschen als grössere, bei denen die Glimmlichter die den tieferen Drucken entsprechende grössere Ausbreitung annehmen konnten, ehe die Begegnung stattfand; kasten- oder cylinderförmige Gefässe leuchteten länger, wenn sie mit der grösseren Längskante, als wenn sie mit der kürzeren Breitseite den Kraftlinien parallel gestellt wurden; das Gas leuchtet hell auf, wenn man die eben sich begegnenden Glimmlichtstrahlen durch einen Magneten zur Seite biegt, so dass sie nicht mehr zusammentreffen u. s. w. Wir haben s. Z. diese auffallenden Erscheinungen beschrieben, ohne im Stande zu sein, für dieselben eine befriedigende Erklärung zu geben. Dieselbe folgt aus dem Obigen. In dem Momente der Begegnung beginnt die zum Unterhalten der Entladung nötige Spannung (genauer gesagt der nötige Spannungsgradient) erheblich zu wachsen in Folge der unsichtbaren Nach-

---

[1]) H. Ebert und E. Wiedemann, Wied. Ann. **62**, p. **182**, **1897**.

wirkung der eben vorhergehenden sichtbaren Entladung; bei der sehr viel schnelleren Aufeinanderfolge der Einzelerregungen bei dem Lecherschen System ist die Spannungssteigerung und Abnahme der Stromstärke noch viel ausgeprägter als in den oben angeführten Tabellen für die hier angewendete viel niedrigere Frequenz. Das Lechersche System stellt aber an seinem Endcondensator nur eine ganz bestimmte, und zwar verhältnismässig kleine Spannungsamplitude zur Verfügung. Folglich muss das in denselben gebrachte Entladungsgefäss in dem Momente erlöschen, in welchem erheblich höhere Spannungswerte erfordert werden, und dieses findet statt, wenn sich die Glimmlichter begegnen; dieses wiederum hängt in unmittelbar ersichtlicher Weise von den Dimensionen der Gefässe ab.

3. Eigentümliche Rückstauungsphänomene der Entladung hat Herr J. Monckman[1]) an rechteckig gebogenen Entladungsröhren beobachtet, an denen an symmetrischen Stellen die die Elektroden enthaltenden Räume seitlich angeschmolzen waren, an Röhren also, welche der Entladung zwei völlig gleichartige und gleichlange Wege darboten. Wird die Entladung eine Zeit lang den einen Weg geschickt (Ableitungen bestimmen den Entladungsweg) und commutiert man, so geht die Entladung innerhalb gewisser Drucke niemals denselben Weg im umgekehrten Sinne, sondern schlägt stets den anderen, vorher nicht betretenen Weg ein. Durch die ersten Entladungen werden Jonen in den ersten Entladungsweg geschafft, welche sich durch Diffusion verbreiten und in dem neutralen Gase eine längere Zeit verbleiben. Dadurch erschweren sie allmählich immer mehr diesen Weg, sie wirken so, als ob sich hier der Druck erhöhte. So lange Entladung auf Entladung im gleichen Sinne folgt, überwiegt die Förderung, welche Erwärmungen der Gasstrecke u. s. w. auf den Entladungsvorgang selbst ausüben. Wird aber der Entladungsstrom unterbrochen, so ist es nach der Commutation der Entladung (innerhalb der entsprechenden Druckgrenzen) leichter den anderen jonenfreien

[1]) J. Monckman, Cambridge Phil. Soc. 9, P. IV, p. 216, 1897.

Weg zu gehen. Der Versuch hat viel Aehnlichkeit mit dem in § 6 beschriebenen: dieser lässt freilich die Bedingungen klarer übersehen und messend verfolgen. Da bei den Monckmanschen Röhren auch Ableitungen eine grosse Rolle spielen, so dürften hier die naturgemäss auftretenden, sehr kräftigen Wandladungen das Phänomen stark mit beeinflussen. Von diesen sind seine Versuche mit zwei Kugelpaaren in einer grossen Luftpumpenglocke frei, die zu ganz ähnlichen Ergebnissen wie die Versuche in § 6 führten.

---

## Oeffentliche Sitzung

zu Ehren Seiner Majestät des Königs und Seiner Königlichen Hoheit des Prinz-Regenten

am 12. November 1898.

Der Präsident der Akademie, Herr M. v. Pettenkofer, Excellenz, eröffnet die Sitzung mit folgender Ansprache:

Die bayerische Akademie der Wissenschaften feiert heute das Namensfest ihres Protektors, Seiner königlichen Hoheit des Prinz-Regenten Luitpold, des Königreichs Bayern Verweser. Ich bin in der angenehmen Lage, über zahlreiche Zeichen des regen und warmen Interesses zu berichten, welches unser erhabener Protektor auch in diesem Jahre der Akademie und den damit verbundenen wissenschaftlichen Sammlungen des Staates zuzuwenden allergnädigst geruht hat.

Für werthvolle Schenkungen an unsere Sammlungen und Förderung bayerischer Gelehrter bei Untersuchungen und Reisen verlieh Seine königliche Hoheit unterm 17. Juni 1898 den kgl. Verdienstorden vom hl. Michael I. Classe dem Direktor der kaiserlich russischen mineralogischen Gesellschaft, Herrn Paul Wladimirowitsch Jeremejeff in St. Petersburg, und den kgl. Verdienstorden vom hl. Michael II. Classe dem Direktor der wissenschaftlichen botanischen Anstalt in Buitenzorg auf Java, Herrn Dr. Melchior Treub.

Unterm 15. August 1898 verlieh Seine königliche Hoheit den kgl. Verdienstorden vom hl. Michael dem Vollstrecker des

Testamentes des Dr. Dioneisios Thereianos, über welches reiche Geschenk ich in der Festsitzung im März dieses Jahres berichtet habe, Herrn Aristides Caracaris in Triest, sowie dem Sachwalter der Akademie in dieser Angelegenheit, Herrn Hof- und Gerichtsadvokaten Dr. Gustav Wolf Krauseneck in Triest. Es kostete viel Mühe und Arbeit, diese für unsere philosophisch-philologische Klasse so werthvolle Schenkung gerichtlich und finanziell zu ordnen. Nun können im kommenden Jahre für Arbeiten über Geschichte, Sprache, Literatur oder Kunst der Griechen von den ältesten Zeiten bis zur Eroberung Konstantinopels durch die Türken aus dem Thereianos-Fond Preise vertheilt werden.

Auch die von Sr. Excellenz dem Herrn Staatsminister Dr. von Landmann wärmstens befürworteten und vom bayerischen Landtage gut geheissenen Zuschüsse für die Kryptogamensammlung des pflanzen-physiologischen Instituts, die Erhöhung der Realexigenz der mineralogischen Sammlung, des Münzkabinets, des Gypsmuseums, des physikalisch-metronomischen Instituts und der zoologisch-zootomischen Sammlung wurden allerhöchst genehmigt, ebenso ein ausserordentlicher Zuschuss von 40000 M. für Ergänzung der mathematisch-physikalischen historischen Sammlung.

Die Pflanzengruppe der Orchideen hat in neuerer Zeit an Bedeutung gewonnen. Unser hochverehrtes Ehrenmitglied, Ihre königliche Hoheit Prinzessin Dr. Therese von Bayern schenkte dem botanischen Garten verschiedene Orchideen aus Brasilien. Nachdem bis jetzt der botanische Garten nur sehr mangelhaft dafür eingerichtet war, bewilligte das kgl. Kultusministerium eine entsprechende Summe für Orchideenkultur.

Unser Mitglied Herr Prof. Dr. Göbel, Konservator des pflanzen-physiologischen Instituts, hat den kühnen Entschluss gefasst, auf eigene Kosten nach Ceylon und Australien zu reisen und hat die Reise bereits im August d. J. angetreten. Falls er Gelegenheit findet, Demonstrations- und Untersuchungsmaterial

für das pflanzen-physiologische Institut zu erwerben, konnten ihm für diesen Zweck aus Mitteln der Akademie 3000 M. zur Verfügung gestellt werden. Das kgl. Staatsministerium für Kirchen- und Schulangelegenheiten hat durch Vermittlung des kgl. Staatsministeriums des kgl. Hauses und des Aeussern dem Reisenden alle möglichen Verkehrserleichterungen verschafft. — Ich erinnere daran, dass vor 80 Jahren ein bayerischer Botaniker und Mitglied unserer Akademie, Herr von Martius mit dem Zoologen Spix nach Brasilien reiste und mit botanischen Schätzen reich beladen heimkehrte. Wir begleiten nun Göbel mit unsern besten Wünschen nach Australien und hoffen auf seine glückliche Heimkehr im kommenden Jahre.

Eine andere wissenschaftliche Reise für zoologische und embryologische Zwecke nach dem grossen Ozean an der Westküste Nordamerika's konnte durch Verwendung von Mitteln aus der Münchener Bürgerstiftung und der Cramer-Klett-stiftung unternommen werden. Unsere Mitglieder, die Herren von Kupffer und Hertwig, beauftragten den Assistenten der zoologisch-zootomischen Sammlung, Herrn Dr. F. Doflein, dahin zu reisen, namentlich, um die Entwicklungsverhältnisse von Bdellostoma Dombeyi, eines Repräsentanten der niedersten Wirbelthiergruppe, der Myxinoiden zu beobachten, der nur an dieser Küste vorkommt. Herr Dr. Doflein ist bereits wieder glücklich heimgekehrt. Auf seiner Reise besuchte Dr. Doflein zuerst Barbados und daran anschliessend eine Reihe der kleineren Antillen, namentlich auf Martinique einen Monat verweilend. Daselbst wurden grössere Sammlungen von marinen Thieren angelegt, wobei hauptsächlich den Verhältnissen der Korallenriffe und des Planktons Beachtung geschenkt wurde. Doch wurden auch Landthiere gesammelt und einzelne in ihren Lebensgewohnheiten beobachtet. Ausschliesslich wurden letztere gesammelt während des kurzen Aufenthalts in Dominica, Nevis und San Christoforo und während des etwas längeren Aufenthalts auf St. Thomas. Auf der letzten Insel wurde der Reisende einige Zeit durch die mangelhaften Schifffahrtsverhältnisse aufgehalten, die durch den Ausbruch des spanisch-

amerikanischen Krieges bedingt waren. Die Weiterreise erfolgte längs der Küsten von Porto-Rico, Hayti und Cuba. Jedoch in Folge des Krieges war eine Landung nur in Hayti möglich. Ein kurzer Besuch von Cap Haytien und Port au Prince war in Folge des kurzen Aufenthalts nicht zu wissenschaftlichen Untersuchungen auszubeuten. Sodann führte die Reise nach Mexiko und erfolgte die Landung auf dem amerikanischen Kontinent in Tambico. Ein 3 wöchentlicher Aufenthalt hauptsächlich in der Gegend der Hauptstadt diente dem Reisenden mehr zu seiner speziellen Information als zu wissenschaftlichen Studien. Das Hauptziel der Reise — Kalifornien — wurde auf dem Wege durch Central-Mexiko und Arizona erreicht. Daselbst fand Dr. Doflein zu Pacific Grove in der biologischen Station der Universität von Palo Alto freundliche Aufnahme. Seine speziellen Forschungszwecke jedoch erreichte er ohne eine weitgehende Ausnützung der Hilfsmittel dieses Instituts. Es gelang ihm ausser der Beobachtung des lebenden Objektes ein reiches Material von Eiern und Embryonen von Bdellostoma zu sammeln und sorgfältig konservirt nach München zu bringen. Ausserdem wurden viele Spezies der dortigen Land- und Meerfauna gesammelt. Mit freudiger Anerkennung erwähnt Dr. Doflein die Liebenswürdigkeit der Professoren und Assistensten des Laboratoriums in Pacific Grove im persönlichen Umgang. Die Weiterreise erfolgte über die nördliche Route, wobei der Reisende zu seiner Information die Museen und Universitäts-Einrichtungen in S. Francisco, Chicago, Washington und New-York besuchte, ferner den Columbiafluss, den Yellowstone Park, den Niagara und die hauptsächliche marine Station der amerikanischen Biologen in Woods Holl in Massachusetts. Die Rückreise ging auf einem deutschen Dampfer über London glücklich von statten. Dr. Doflein ist mit Ausarbeitung eines eingehenden Reiseberichtes an die Akademie befasst.

Unserer paläontologischen Sammlung gingen wieder werthvolle Geschenke zu. Herr Dr. David Rüst in Hannover übergab eine von ihm hergestellte Sammlung von 1350 Dünn-

schliffen von Radiolarien der verschiedensten Arten, die Originalien zu seiner in der „Paläontographica" veröffentlichten Abhandlung. Herr Kommerzienrath Stützel, dem unsere paläontologische Sammlung schon so viel verdankt, begab sich auf die Insel Samos und veranstaltete dort Ausgrabungen fossiler Thiere in grossem Maassstabe. Mit reicher Ausbeute zurückgekehrt, schenkte er uns, was in 73 Kisten verladen war.

Die Akademie verlieh Herrn Dr. Rüst und Herrn Kommerzienrath Stützel die höchste Auszeichnung, die sie zu verleihen hat, die goldene Medaille Bene merenti.

Zum Schlusse sei noch eines Unternehmens der kartellierten deutschen Akademien gedacht, bei welchem unsere Akademie durch unseren Delegirten, Herrn von Wölfflin, vertreten ist, des Thesaurus linguae latinae, welches Unternehmen ich bereits im vorigen Jahre bei dieser feierlichen Gelegenheit erwähnt habe. In dieser Richtung wurde rüstig weiter gearbeitet und ist der baldige praktische Abschluss der Arbeit gesichert, die viel Interessantes und Neues zu Tage fördern wird. Es wird kein gewöhnliches lateinisches Lexikon. Während bisher für unsere lateinischen Wörterbücher, auch die grössten, doch nur die bekanntesten Autoren herangezogen worden sind, weil ein einzelner Bearbeiter nicht mehr zu leisten vermag, beabsichtigt die von mehreren hundert Mitarbeitern unterstützte Thesaurus-Kommission die ganze Literatur bis gegen das Jahr 600 nach Christus auszubeuten, und zwar in der Textgestaltung, welche die neuesten kritischen Ausgaben gesichert haben. Dadurch werden zwar viele Wörter, als durch die handschriftliche Ueberlieferung nicht hinreichend geschützt und gestützt, in Wegfall kommen, aber sicher auch viele Tausend neue dem Wortschatz zugefügt werden. Vor Allem aber hat der Vertreter unserer Akademie den neuen Gesichtspunkt aufgestellt und zur Annahme gebracht, dass jeder Lexikonartikel die Geschichte und den Lebenslauf jedes Wortes geben soll, sein erstes Auftauchen, sein Wachsthum und sein Absterben, und namentlich die Veränderung und Entwicklung

seiner Bedeutungen. Denn wie schon Horaz gesungen hat, gleichen die Wörter den Baumblättern; sie fallen und grünen von neuem. Auch auf das Entstehen der romanischen Sprachen, der italienischen, französischen und spanischen Sprache, sowie auf viele ins Deutsche übergegangene Bezeichnungen und Ausdrücke wird der Thesaurus linguae latinae Licht werfen.

Die Kartellkommission musste jüngst für Abschluss ihres Werkes einen festen Sitz wählen. Sie hat München gewählt. Genau mit Ablauf des Jahrhunderts sollen die seit 1894 gesammelten Materialien im dritten Stockwerke unserer Akademie in 4 geräumigen Zimmern geordnet beisammen stehen und ein zahlreiches, aus allen deutschen Stämmen gemischtes Redaktionspersonal wird mit dem Jahre 1900 die Verarbeitung in 12 Folianten in Angriff nehmen. Aber auch nach Vollendung der Riesenarbeit werden die vielen tausend Schachteln mit Millionen von Zetteln als Repertorium aufgestellt bleiben, damit alle Anfragen der Gelehrten in prompter Weise erledigt werden können. Dadurch wird München für immer ein Centralsitz der lateinischen Studien bleiben, und damit auch ein Wunsch des seeligen Königs Max II. erfüllt sein, der München zu einem hervorragenden Sitz der Wissenschaft zu machen strebte.

Nun bitte ich die Herren Classensekretäre, die am 16. Juli vorgenommenen und von unserem Protektor allergnädigst bestätigten Neuwahlen von Mitgliedern kund zu geben.

Hierauf verkündeten die Classensekretäre die weiteren Wahlen und zwar der Sekretär der II. Classe, Herr C. v. Voit, folgende Wahlen für die mathematisch-physikalische Classe:

als ordentliche Mitglieder:

1. Dr. Robert Hartig, ordentlicher Professor der Anatomie, Physiologie und Pathologie der Pflanzen an der Universität München;
2. Dr. Alfred Pringsheim, ausserordentlicher Professor der Mathematik an der Universität München;

als korrespondirende Mitglieder:

1. Dr. Charles Barrois, Professor der Geologie an der Universität Lille;
2. Dr. Lazarus Fuchs, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Berlin;
3. Dr. Sophus Lie, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Christiania.

Sitzung vom 3. Dezember 1898.

1. Herr Wilhelm Königs erstattet einen Bericht über die „Gedenkfeier des 50. Todestages von Berzelius" am 7. Oktober d. J. in Stockholm, zu welcher er als Vertreter unserer Akademie vom Präsidium gesandt worden war.

2. Herr W. Dyck legt den ersten Theil der von den kartellirten Akademien zu Wien, Göttingen und München herausgegebenen „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" mit einigen Worten über dessen Inhalt vor.

3. Die Herren Richard Hertwig und Carl v. Kupffer überreichen den von Herrn Dr. F. Doflein erstatteten Bericht über seine mit Unterstützung unserer Akademie gemachte „Reise nach Westindien und Nordamerika", wobei er vor Allem Eier von Bdellostoma sammeln sollte.

# Bericht über meine Reise nach Westindien und Nordamerika.

Ausgeführt im März bis August 1898 im Auftrage der k. b. Akademie der Wissenschaften

von F. Doflein.

(Eingelaufen 3. Dezember.)

---

## I. Die Antillen.

Eine glückliche Seefahrt führte mich in den ersten Wochen des März von Southampton nach Barbados. Die See war besonders während des ersten Teils der Reise sehr unruhig, so dass unterwegs sehr wenige Oberflächentiere beobachtet wurden. Bei der Annäherung des westindischen Archipels mehrten sich dieselben und ich beobachtete besonders zahlreiche fliegende Fische, Delphine, Quallen. Sargasso war überaus häufig und oft zu starken Bänken vereinigt.

Barbados, die erste westindische Insel, welche ich besuchte, ist der Typus einer flachen, reich angebauten Tropeninsel. Bekanntlich scheiden sich die kleinen Antillen in eine östliche Kette flacher Inseln mit Korallenbildungen, und eine westliche Kette vulkanischer gebirgischer Inseln. Zu den ersteren gehört Barbados, und zwar zeigt sie in deutlichster Weise den Anteil der Korallen am Aufbau der Landfläche. Weit entfernt vom Ufer kann man noch deutlich erhaltene Riffüberreste erkennen, wie ich sie später auf der Insel St. Thomas in noch ausgeprägterer Form studieren konnte. Barbados ist in seinem gesamten anbaufähigen Areal ausgenützt und bietet somit dem Biologen bei

einem kurzen Besuch nicht viel auffallendes. Die marine Fauna, besonders auf den lebenden Korallenriffen und in deren Umgebung, scheint sehr reich zu sein. Am Lande konnte ich nicht viel erreichen. Vereinzelte Vögel, nicht selten Kolibris, wenige Schmetterlinge, Heuschrecken, Bienen und Gallwespen fielen mir auf und es gelang mir, einzelne davon zu sammeln. Auch Eidechsen waren zahlreich. Diese kurze Beobachtung gibt nur den Eindruck eines Tages in der trockensten Zeit des Jahres wieder; es war Mitte März, vor den ersten Regenfällen. Von einem Hügel aus liess sich erkennen, dass fast die ganze Insel mit Zuckerrohr angepflanzt ist; Rohrzucker wird trotz der starken Konkurrenz des Rübenbaues von hier aus noch in sehr grossen Mengen ausgeführt. Doch erfuhr ich später in Martinique, dass viel Melasse dorthin importiert und zu Rum verarbeitet wird.

Eine äusserst stürmische Nachtfahrt in einem kleineren Dampfer brachte mich nach St. Lucia, der nächsten nördlich gelegenen der kleinen Antillen. Hier überraschte mich eine Ueppigkeit der Tropenvegetation, wie sie nicht einmal in Martinique und Dominica gänzlich erreicht wird. Wie diese Inseln ist St. Lucia von vulkanischer Entstehung und sehr reich an kleinen Wasserläufen. Die Tierwelt ist reich und für Insekten und Vögel scheint St. Lucia ein ausgezeichnetes Sammelgebiet zu sein, kann sich jedoch nicht mit dem später zu besprechenden Dominica messen. Hier schon hörte ich viel von der berüchtigten Lanzettschlange reden, welche in ihrer Verbreitung bekanntlich auf St. Lucia und Martinique beschränkt ist. In St. Lucia ist es gelungen, sie durch Einführung der Mangus wenigstens in der Umgebung der grösseren Ansiedlungen gänzlich auszurotten. Hier Sammlungen anzulegen, erlaubte mir die Kürze meines Aufenthaltes nicht.

Von St. Lucia ist Martinique in wenigen Stunden erreicht. Wenn diese grosse Insel mit ihren stattlichen Bergketten in der Ferne auftaucht, so glaubt man zwei nahe vereinigte Nachbarinseln zu sehen; denn die Insel ist in ihrem mittleren Teile stark eingeschnürt und zudem sind die Gebirge beider

Hälften gerade in diesem Teile durch eine bedeutende Einsenkung von einander geschieden. Erst wenn man sich mehr genähert hat, erkennt man die weite Bucht von Fort de France, welche jene Einschnürung veranlasst. Die schönen Formen der Berge, deren Gipfel von Wolken fast stets umschattet sind, entzücken das Auge. Schon aus grosser Entfernung kann man an ihren Hängen mächtige Bäume erkennen. Die Berge verraten selbst dem Laienauge ohne weiteres ihren vulkanischen Ursprung; an geologischen Aufschlüssen wird man durch die alles überwuchernde Vegetation behindert.

Nachdem wir längere Zeit nicht fern von der Küste nordwärts gefahren waren, erreichten wir den Hafen von St. Pierre, wo ich für einige Zeit mich niederlassen wollte. Die Stadt St. Pierre, welche der Bedeutung nach der erste Platz der Insel ist, obwohl Fort de France offizielle Hauptstadt ist, stellt sich beim ersten Anblick sehr gross und stattlich dar.

Zahlreiche Neger und besonders Knaben in allen Schattierungen der Hautfarbe umschwärmten unser Schiff und tauchten nach Geldstücken. Ein furchtbares Lärmen und Schreien machte eine Verständigung fast unmöglich; dennoch kamen alle meine zahlreichen Kisten glücklich ans Ufer. Es ist überhaupt für Westindien zu bemerken, dass die ausschiffenden Neger gewissenhaft und geschickt sind; man darf sich durch die Begleiterscheinungen ihrer Thätigkeit nicht erschrecken lassen. Fehlt ein Stück des Gepäcks, so kann man meistens davon überzeugt sein, dass man es selbst an Bord vergessen hat.

Ein Begleitbrief, den mir die deutsche Botschaft in Paris besorgt hatte, machte mir die Zollbeamten, welche von vornherein sehr freundlich und höflich waren, noch gefälliger, so dass ich meine Kisten und Kasten ungeöffnet zum Hotel bringen konnte.

Das Hotel „des bains“ ist ein altes verwahrlostes Haus, welches in der alten guten Zeit der Sklaverei mit ziemlicher Pracht ausgestattet worden war; jetzt ist es sehr vernachlässigt; es wird offenbar kein Schaden ausgebessert, es fehlen Schlüssel, es ist überhaupt ächt westindisch, jedoch nicht unreinlich.

In den ersten Tagen sah ich mich in der unmittelbaren Umgebung von St. Pierre um, und suchte zu gleicher Zeit ein kleines Haus in der Nähe des Meeresstrandes zu mieten. Da ich aber nichts geeignetes fand, entschloss ich mich, im Hotel zu bleiben, wo man mir geeignete Räume überliess und wo ich ausserdem mit einem kühlen Hause die Vorteile einer centralen Lage verband. Trotzdem wäre es bei längerem Aufenthalt und besonders wenn man mit einem Genossen reist, weit geeigneter, ein eigenes Haus zu mieten.

Meine ersten Besuche galten den Wäldern, welche sich in einigen Schluchten der Stadt nähern und ausserdem dem botanischen Garten. Der letztere ist ebenso schön, als für den Neuling in den Tropen interessant. Dr. Nollet, der Direktor des Gartens, machte in der liebenswürdigsten Weise meinen Führer, da er aber selbst von dem Interesse für die Agrikulturbotanik gänzlich in Anspruch genommen wird, so konnte er mir in wissenschaftlicher Beziehung wenig Auskunft geben.

Dasjenige, was er mir jedoch von den Schädlingen der hervorragendsten tropischen Nutzpflanzen zeigte, war sehr merkwürdig und wissenswert. Es zeigte sich, dass auch hier Rostpilze ein Hauptkontingent der Schädlinge stellen, jedoch auch die Insektenwelt ist erheblich vertreten. Auf den Cafebäumen war sehr häufig die Raupe eines Microlepidopters, welche die Blätter desselben zerstört. Die Eier werden auf der Unterseite abgelegt, die Larve frisst grosse Stücke aus den Blättern heraus und verpuppt sich ebenfalls auf der Unterseite der absterbenden Blätter in einem Cocon. — Die Cacaobäume werden in den letzten Jahren häufig von einem langhornigen Käfer befallen; die Larve desselben lebt unter der Borke und hat die merkwürdige Gewohnheit, das lebende Gewebe des Baumes in Ringen auszufressen; indem sie so die Nahrungsleitung unterbricht, bringt sie den ganzen oberen Teil des angegriffenen Astes zum Absterben. Dieses Insekt hat in den letzten Jahren in westindischen Cacaopflanzungen wiederholt grossen Schaden angerichtet.

Der mit Nutzpflanzen bebaute Gartenabschnitt nimmt

übrigens nur einen sehr geringen Teil des botanischen Gartens ein. Im Grossen und Ganzen bietet derselbe den frischen Eindruck eines Stückes wilder Natur dar, ja man kann sagen, er besteht aus einem fast unberührten Urwald, in dem die menschliche Hand Lichtungen mit importierten Gewächsen bepflanzt hat. Er zieht sich an einer Schlucht einen Berg hinauf, ein schöner Bergbach durchbraust dieselbe und den Abschluss bildet ein gewaltiger Felsbrocken, der gänzlich mit üppiger Vegetation bekleidet ist. Zu seinen beiden Seiten stürzt das Wasser herab, auf der einen in einer prächtigen Cascade. Trotzdem ich in der trockenen Zeit Martinique besuchte, führten alle Wasserläufe sehr reichliche Fluten.

Ich habe noch oft den Garten und seine Umgebung aufgesucht, nicht nur wegen der prächtigen Szenerie, sondern auch der reichen Tierwelt zuliebe, welche dort hauste. Frösche und Schlangen, Spinnen, Skorpione, Skolopendren und Insekten aller Gruppen wurden von mir dort in grosser Menge gefangen. Der Blütenflor der Beete des angelegten Teiles, sowie das Wasser des Waldbachs lockten zahlreiche Tagfalter an, unter ihnen sehr schöne Papilioniden und Danaiden. Am Wasser waren Libellen sehr zahlreich; doch infolge deren Gewandtheit und des gefährlichen Terrains habe ich mehr Arten gesehen als erbeutet.

In den nächsten Tagen durchstreifte ich die Stadt und deren Umgebung, machte mancherlei wertvolle Bekanntschaften und warb einen schwarzen Fischer an, welcher sich sehr anstellig zeigte und mir von grossem Nutzen war.

Die Stadt St. Pierre ist durch ihre Lage und Bauart für das Auge sehr reizvoll; und wenn man sich nicht gerade in die Häuser und Höfe der armen Negerbevölkerung begibt, so hat man auch den Eindruck einer sauberen Stadt. Mit ihren Vorstädten umfasst sie eine weite Bucht, welche im Charakter ein wenig an den Golf von Neapel erinnert. Den Norden beherrscht ein schöngeformter Vulkan, der Mt. Pelée, welcher bis zum Gipfel in grüne Vegetation gehüllt ist. Wie alle Berge der Antillen zeigt er nur selten seinen Gipfel frei von

Bewölkung; die gewaltigen Wolkenmassen erzeugen stets prachtvolle und pompöse Landschaftsbilder. Wie der Mt. Pelée als isolierter Kegel, erhebt sich im Südosten der Piton du Carbet, ebenfalls ein Berg von vulkanischem Ursprung; doch hat er sich seit unvordenklichen Zeiten nicht mehr gerührt, während der Mt. Pelée im Jahre 1853 einen leichten Ausbruch mit reichlichem Aschenregen hatte.

Die Stadt ist von zahlreichen Gärten umgeben, in denen alle Produkte der Tropen üppig gedeihen: auf meinem Tisch gab es stets in reicher Fülle Bananen, Ananas, Sapotillen, Mangos, Aleghetta Pears etc. Sonst sind die Berghänge und glatten Flächen weithin mit Zuckerrohrpflanzungen bedeckt. Obwohl die Zuckerkrise in ganz Westindien eine grosse Misere hervorgebracht hat, baut man auf Martinique noch sehr viel Rohr zur Rumproduktion an. Rum wird in ganz modern ausgestatteten grossen Fabriken in ausgezeichneter Qualität angefertigt und vermag immer noch Leute reich zu machen.

Während die Schluchten und die dem Innern zustrebenden Hügel vielfach an den unbebauten Stellen von Urwald und üppigen Gesträuchen erfüllt sind, ziehen sich der Küste entlang dürre Hügel. Dieselben sind mit einem stachlichen wilden Gestrüpp erfüllt, wechselnd mit rasigen Lichtungen und erinnern im Gesamteindruck sehr an die Macchien der mediterranen Region. Einen erheblichen Unterschied machte allerdings der trotz der trockenen Zeit sehr reiche Blumenschmuck: Mimosen blühten in verschiedenen Farben, ebenso Akazien mit furchtbaren, hohlen Dornen, welche aber hier keine Ameisen beherbergten. Dazwischen hie und da höhere Bäume, welche jetzt gerade blattlos waren und statt dessen über und über mit scharlachroten Blüten bedeckt waren. Um diese Bäume rankten sich zahlreiche Schlingpflanzen, die sog. indischen Bohnen, ferner blaue, weisse, violette und rote Convolvulaceen. Den Boden schmücken an einzelnen Stellen weisse und rote Blüten einer Phlox-artigen Pflanze. Alle diese Pflanzen sind ein Anzeichen, dass die Dürre hier nur temporär ist, während die dazwischen wachsenden Cakteen (Echinocactus und Cereus)

und Agaven schon verdächtiger sind. Derartige Trockenpflanzen scheinen sich auf Martinique immer weiter auszubreiten, wie sie das auf anderen Inseln der Gruppe schon in sehr hohem Masse gethan haben.

Dieses Gestrüpp wird von einer sehr zahlreichen Tierwelt belebt, unter welchen neben einzelnen Vögeln Eidechsen und Heuschrecken durch ihre Menge auffielen. Hie und da findet man eine schöne dunkle Schlange mit grell orangeroten Flecken, eine ungiftige Colubride.

Solche trockene Oertlichkeiten sind besonders in dem südlichen Teil der Insel, den ich etwas später besuchte, vorherrschend. Dort sind sie nach der Entwaldung der viel niedrigeren Berge durch deren relative Wasserarmut bedingt. Es nehmen dort die sog. Savannen weite Flächen ein: dürres mit kurzem Rasen bedecktes Gelände, das sich über Hügel und Einschnitte erstreckt; es wechseln mit den kahlen Flächen ausgedehnte Gebüsche, die hauptsächlich aus Akazien, Mimosen etc. zusammengesetzt sind. Doch auch in dieser Gegend entwickelt sich, wo Wasser sich findet und die Kultur ruht, eine üppige Tropenvegetation.

Die hohen Berge um St. Pierre und deren sämtliche Abhänge und Ausläufer bis gegen Fort de France hin sind noch mit dickem Urwald bedeckt, dessen Bestände an vielen Orten noch gewaltige Spuren des Cyklons von 1889 zeigen. Diese Waldbestände sind bei Fort de France durch sehr grosse Lücken unterbrochen; denn die Ebene östlich und südlich von dieser Stadt ist mit Anpflanzungen von Zucker und wenigem Kaffee ganz bedeckt. Im Süden sind dann die Berge wieder bewaldet; der Urwald steigt oft bis zum Meer hernieder, was der Landschaft viel romantischen Reiz verleiht. Denn die Küste ist steil und felsig. Dazwischen sind überall Thäler und Ebenen zum Anbau sehr ausgenützt. Man muss bedenken, dass die Insel eine Bewohnerzahl von etwa 180000 Menschen ernährt.

Bei einer Besteigung des Mt. Pelée lernte ich diese Waldregion und zum teil auch ihre tierischen Bewohner etwas genauer kennen. Leider war der zweite Teil dieser Bergfahrt

durch Nebel in den höheren Regionen und durch tropische Regengüsse beim Abstieg sehr beeinträchtigt, und so konnte ich nichts von der in diesen Regionen jedenfalls sehr reichen Insektenfauna beobachten. Ich lernte später die Bergfauna auf St. Kitts (St. Christoforo) kennen und der Reichtum der Höhen besonders an prächtigen Schmetterlingen liess mich jene Nebelhaube des Mt. Pelée umsomehr bedauern. Da ich jedoch meine hauptsächlichsten Anstrengungen der Erforschung mariner Tiere widmete, fand ich keine weitere Zeit, um jene Besteigung zu wiederholen.

Wenn man von St. Pierre aus den Mt. Pelée ersteigt, so führt der Weg zunächst lange Zeit durch das angebaute Gebiet; man passiert eine Anzahl von Zucker- und Rumfabriken, dann unendliche Felder, die mit Zuckerrohr bepflanzt sind. Dieses erstreckt sich bis hoch auf die Vorberge hinauf. Die Felder werden, je höher man steigt, immer häufiger von Waldparzellen unterbrochen. Man sieht auch hier öfter die alte Natur in verlassene Positionen der Kultur vordringen. Hie und da trifft man leicht gebaute Hütten, bewohnt von Negern, welche raschen Schrittes den alten Naturzuständen der afrikanischen Heimat in kultureller Beziehung wieder zustreben.

In etwa 400—500 m Höhe, doch wechselnd nach dem jeweiligen Vordringen der angebauten Region, beginnt der Urwald. Wir nahten demselben über eine Wiese an einer von Baumfarnen verschleierten Schlucht entlang klimmend. Er stellte sich an seinem Rand schwarz und undurchdringlich wie eine Mauer dar; die Stelle, wo der Pfad eintrat, erschien wie ein finsteres Loch und da die Sonne auf die Westseite des Berges noch nicht herüber gekommen war, so war der Wald lichtleer; unser Pfad erschien fast wie ein Gang im Bergwerk.

Als aber die Sonne herüber kam — sie schien mir an diesem Tag nur kurze Zeit — da flimmerte oben durch die Wipfel wunderbares Licht und ich konnte selbst ziemlich ferne Details erkennen. Ich war überrascht von der Pracht dieses Bergwaldes; denn vorbereitet durch die Schriften der meisten modernen Tropenreisenden, hatte ich Einförmigkeit und Farben-

armut erwartet. Statt dessen umgab mich ein Reichtum verschiedenartiger Formen, viele wundervolle Baumfarne und Palmenarten und herrliche uralte Riesenbäume. Dazwischen zahllose rote, gelbe, violette Farbflecke, von Blüten und farbigen Blättern herrührend. Der Wald beherbergt viele Arten von Bromeliaceen, welche durch ihre grell gefärbten Blattumfassungen um die Blüten die schönsten und farbigsten Blumen vortäuschen. Ferner fanden sich zahlreiche Aroïdeen, z. t. mit bunten Blättern, dann Nitidularien, Compositen und vor allem zahlreiche, schön blühende Pflanzen, welche sehr unseren vielgezüchteten Cannaarten gleichen. Dazwischen war der Waldboden von schönen grossblättrigen Farnen bedeckt; hier im Innern des Waldes gab es kaum mehr vereinzelte hochstämmige Baumfarne.

Dagegen fanden sich nicht selten kleine Krautpalmen; der Pfad oder vielmehr die Spur, welche wir verfolgten, war von Krautpalmsuchern getreten; es sind dies im gewöhnlichen Lauf des Jahres die einzigen Menschen, welche den Berg in seinen höheren Regionen betreten. Denn es herrscht eine geradezu unglaubliche Furcht vor der Lanzettschlange, der „fer de lance", unter allen Einwohnern der Insel. Gerade diese mittlere Waldregion soll ihr bevorzugter Schlupfwinkel sein, und bei der Beschaffenheit des Pfades konnte man jeden Moment befürchten, auf eine Schlange zu treten. Man sah meist den Ort nicht, wohin man den Fuss setzte; jeden Augenblick musste man über einen riesigen Baumstamm klettern. Die Spuren des grossen Cyklon sind hier in schrecklicher Weise zu sehen; ganze Lichtungen sind hier zwischen den alten Beständen gebildet, Lichtungen, die man aber nicht betreten kann, denn man würde in den Massen morschen Holzes, dem Gewirr von Schlingpflanzen und Aesten und Sträuchern bis über den Kopf versinken. Der Weg war sehr schwierig und zudem mit der steigenden Sonne durch eine wirkliche Treibhaustemperatur sehr anstrengend. Wir hatten Glück und wurden von keiner Schlange auf unserem Wege belästigt. Meine schwarzen Führer mit ihren nackten Füssen riskierten zwar eine grössere Gefahr,

waren aber beim Klettern in dieser Feuchtigkeit und Hitze mir weit überlegen, der ich schwere Bergschuhe trug. Meine Führer waren im gewöhnlichen Leben Krautpalmensammler.

Von Tierleben zeigte sich sehr wenig; einzelne Vögel flogen schreiend über den Pfad, einzelne Eidechsen liessen sich sehen; Kolibris schwirrten um Blüten der Lichtungen. Als wir jedoch in die Region der Wolken und des Nebels gelangten, reduzierte sich das gesamte sichtbare Leben auf einige wenige Schnecken am Wege und auf den Baumstämmen. Der erhoffte Insektenreichtum der Lichtungen schlummerte, vor der Feuchtigkeit fliehend, unter den grossen Blättern. Sonst ist diese Region thatsächlich durchaus nicht tierarm, d. h. für Westindien. Wiederholt brachte man mir von dort eine Opossumart mit weissem Schwanzende herunter, der Mangu haust verwildert dort, dazu eine reiche Vogel- und Insektenfauna.

Nach $1^1/_2$ Stunden Steigens wird der Urwald niedriger und bald kommt man in eine Region, welche durchaus mit niederem Gebüsch von Pflanzen mit harten glänzenden Blättern bedeckt war, wohl in der Mehrzahl Lorbeer- und Myrthengewächse. Das Gehen ist in diesem Gebiet fast noch schwieriger als im Urwald; man sieht seinen eigenen Weg nicht mehr und wandelt bis über die Hüften in den Büschen verborgen. Auch hier gibt es noch viele blühende Pflanzen und hier wären nach der Analogie viele Schmetterlinge zu erwarten gewesen, wenn nicht ein starker Wind gewaltige Wolkenmassen vom Ozean herüber gewälzt hätte und ein kalter Regen die ganze Gipfelregion überschüttet hätte. Dadurch wurde das Vorwärtsdringen immer beschwerlicher; dabei verhüllte der Nebel meist die Aussicht, nur dann und wann entstand ein Spalt in den Wolken und zeigte uns die Insel im schönsten Glanze der Sonne: ein wunderbares Bild bei der reichen Bildung der Landschaft, und weit darum sich spannend das dunkelblaue Meer, nahe dem Lande erfüllt von dem weissen Schaum über den Korallenriffen. In der Ferne konnte man duftig auf der See schwimmend die Gebirge von St. Lucia im Süden, Dominica im Norden erkennen.

Unser Weg erreichte eine Höhe, senkte sich sodann wieder

eine Strecke und führte wieder in einen Wald; dieser war licht, die Bäume zum grössten Teile abgestorben, vielfach von langen Flechten gänzlich überzogen. Wir durchwateten Moräste und Wasserpfützen; die Nähe des vulkanischen Gipfels kündigte sich durch starken Schwefelgeruch und seltsame Erdspalten an, welche sich oft auf weite Strecken hinzogen und deren Tiefe nicht zu erschauen war. Es war allmählich der Nebel so dicht geworden, dass wir mit Mühe den vorhandenen Spuren zu folgen vermochten.

Indem wir weiter stiegen, waren wir bald so gänzlich in den Nebel gehüllt, dass wir von der Umgebung nichts mehr wahrnahmen. Man hörte nur in der allgemeinen Oede fast unheimlich das Pfeifen eines kleinen Vogels, den man hier den „sifflet de montagne" nennt. In der Bevölkerung gehen allerhand Erzählungen über diesen Vogel um, der sich soll unsichtbar machen können u. s. w. Hier oben ist er sehr häufig, leicht zu sehen; ja ich bekam sogar ein junges Exemplar mit der Hand zu fassen.

Die Bildung dieser Erzählungen vom „sifflet de montagne" sind überhaupt sehr bezeichnend für die Art der Naturbetrachtung der französischen Creolen. Ueber allerhand relativ leicht erreichbare Dinge ihrer eigenen Insel bilden sie eine Menge von Sagen, glauben dieselben und erzählen sie weiter, ohne dass einer das Bedürfnis hätte, sich von den thatsächlichen Grundlagen derselben selbst zu überzeugen.

Binnen kurzem langten wir bei dem Krater an, welcher von einem kleinen See erfüllt ist. Die höchste Spitze des Berges erhebt sich etwas höher als der Krater. Jedoch der Nebel war immer noch so dicht, dass wir weder diese, noch auch nur das andere Ufer des kleinen Sees erblicken konnten. Ich umschritt die Ufer, welche zum teil schlammig waren, zum grössten teil aber aus trachytartigem festem Gestein bestanden. An einer Stelle befand sich ein etwa 15 cm weites Loch, in welchem das Wasser unter lautem Gurgeln abfloss. Das Wasser des Sees ist kalt und sehr angenehm zu trinken. Organismen nahm ich in demselben nicht wahr.

An mehreren Stellen rieselten dem Kratersee kleine Zuflüsse zu, von denen man aber nicht sagen konnte, ob sie regelmässig waren oder dem gegenwärtigen Regen ihre Entstehung verdankten. Jedenfalls ist aber anzunehmen, dass der See sein Wasser aus den fast stets um ihn lagernden Wolken erhält. Die Bildung von Quellen erscheint mir in dieser Gipfelnähe bei der Porosität des Untergesteins nicht wahrscheinlich. Die ganze Umgebung des Sees war an jenem Tag so mit Feuchtigkeit erfüllt, dass wir bei unserer Rast uns nicht niedersetzen konnten. Wenn auch die Bäume hier niedrig und meist abgestorben waren, so grünte doch hier ein überaus üppiges Niederholz und die wuchernden Kräuter hatten keinen Stein ohne ein weiches, mit Wasser vollgesogenes Pflanzenpolster gelassen.

Da es zudem empfindlich kalt war, wurden wir bald zum Rückweg gezwungen. Der Abstieg erfolgte nach Südosten, dann Süden, während wir von Westen aufgestiegen waren. Ausser sehr prächtigen Baumfarnen und wundervollen Blicken in die östlichen Waldthäler bot der Weg nicht viel neues und bemerkenswertes. In mancher Beziehung erwies er sich als geeigneter als der westliche Weg, wenn auch der letztere an ganz sonnigen Tagen dennoch vorzuziehen sein mag. Von einer oben noch nicht erwähnten Plage des Aufstiegs blieben wir auf diesem Wege auch verschont, der „plante couteau“. Diese ist eine Rotang-artige Kletterpalme mit zweischneidigen Blättern, welche so scharf sind, dass sie durch die Kleider hindurch schneidend empfindliche Verletzungen, ja selbst gefährliche Wunden beibringen können. — Der Abstieg führte uns schliesslich wieder in die bebaute Region und zur Sommerfrische der Bewohner von St. Pierre, dem Morne rouge. Nach 11 stündigem Marsche langte ich sehr ermüdet in der Stadt wieder an.

Die Schilderung einer weiteren Landschaftsform, der sumpfigen Region um die Saline im Süden der Insel und der Mangrovewälder ziehe ich vor, im Zusammenhang mit der Küstenbeschreibung jener Gegend zu bringen. Jetzt zunächst will

ich mich der Darstellung meiner marinen Untersuchungen zuwenden.

Wie ich schon oben erwähnte, hatte ich einen intelligenten Fischer mit Namen Matthieu entdeckt, welcher mir sehr von Nutzen war. Er kannte sehr gut die Verteilung der einzelnen Tierformen, so weit er dieselben beachtet hatte, war aber leider in manchen Fällen etwas zu ängstlich. Die ersten Ausfahrten, die ich mit ihm machte, zeigten mir einen ziemlich grossen Tierreichtum des Meeres und bewogen mich, in St. Pierre zu bleiben, statt, wie ich ursprünglich vor hatte, mein Hauptquartier in Fort de France aufzuschlagen. Wie meine Erfahrungen in der Folge zeigten, wäre übrigens einer der Orte an der Südspitze, etwa das von mir besuchte St. Anne noch erheblich günstiger gewesen.

Die Küste fällt, wie bei der Mehrzahl der „Inseln unter dem Winde“, auf der Westseite viel plötzlicher ab, als auf der Ostseite. Die Küstenbildung ist sehr reich und erzeugt eine Menge anziehender Landschaftsbilder. Die Felsen in der Gegend von St. Pierre sind meist Laven und Bimsteintuffe, welche von den Eruptionen der grossen Vulkane stammen; sie fallen an vielen Stellen senkrecht zum Meere ab und wechseln mit sandigen Buchten, welche gewöhnlich in ihrem inneren Winkel zu einer Ansiedlung Anlass geboten haben. Der Meeresboden in der Landnähe ist unter 20 Faden tief, oft viel seichter und beherbergt ein reiches Tierleben.

Jedoch schon in geringer Entfernung von der Küste stürzt der Boden zu sehr grossen Tiefen ab. Ich habe an verschiedenen Stellen der Küste gedregt und mit tauchenden Negern oder auf halb untergetauchten Felsen selbst Tiere gesammelt und will im nachfolgenden ein Bild der örtlichen Verhältnisse möglichst im Zusammenhange geben.

Im Norden der Insel — hier untersuchte ich nur an der Westküste — ist der Strand fast überall felsig, steile Abfälle von Tufffelsen herrschen vor, dazwischen hie und da die oben erwähnten Buchten. Ganz im Norden tritt der Wald in den Buchten hie und da bis ans Meer heran und es gibt zahlreiche

Landschaftsbilder von grosser Romantik. Hier sind auf den Felsen Krabben zahlreich, auf dem Grunde liegen Spongien in Menge, einzelne Ascidien, einfache, wie zusammengesetzte. Die Löcher in den Felsen sind von Seeigeln bewohnt, sowohl einer kleinen Art, als auch den langstacheligen unangenehmen Diademen. Alle diese sind mit grosser Mühe aus den Felsenlöchern herauszuarbeiten, da sie sich mit den Ambulakralfüssen sehr fest saugen. Seesterne sind vereinzelt vorhanden. Ueberhaupt fällt an der ganzen Küste sowohl an Arten wie an Individuen das Ueberwiegen der Seeigel gegenüber den Seesternen auf. Ferner sind Gorgonien hier zahlreich.

Wo der Boden so seicht ist, dass man den Grund sieht, ist er meist sandig, grosse Felsblöcke liegen dazwischen vereinzelt. Auf den letzteren wachsen die Gorgonien; doch stehen sie auch daneben im Sand. Dadurch unterscheiden sie sich von den Steinkorallen, welche hier nur sehr vereinzelt vorkommen und dabei stets auf den Felsblöcken angesiedelt sind.

An Fischen sind neben Rochen und verschiedenen eigentlichen Flachfischen in dieser Region nicht viel interessante Formen vorhanden.

Etwas weiter im Süden, d. h. südlich der Stadt St. Pierre setzt sich dieselbe Küstenbildung fort. Die Tufffelsen sind zum teil noch höher als im Norden und stark zerklüftet; doch gibt es auch viele Trachytfelsen, welche an einzelnen Stellen einen regelrechten Klippenstrand erzeugen. Hier wimmelt es von allerhand Tieren. Das Wasser ist bei ruhigem Wetter wunderbar klar, so dass man selbst in beträchtlicher Tiefe alle Einzelheiten deutlich erkennt. Die Korallen sind hier viel häufiger, überziehen die Steine oft mit ganzen Krusten und zwar gibt es viele Madreporen, Maeandrinen u. s. w. ebenso wie Gorgonien und andere Hornkorallen. Aber trotz des Reichtums an Steinkorallen kommt es auch hier nicht zu einer wirklichen Riffbildung; was der Grund hiezu ist, scheint mir nicht ohne weiteres klar zu sein. Denn es handelt sich um genau die-

selben Arten, welche ich im Süden und Osten der Insel riffbildend fand.

Einen Punkt, der zur Erklärung beitragen kann, will ich hier erwähnen. Während nämlich die Süd- und Ostküste meist von Felsen aus harten Gesteinsarten zusammengesetzt sind, treten hier im Westen Tuffe und Bimsteine, vulkanische Aschen und Laven bis ans Meer heran und bilden zum grossen Teile die Küste. Diese Gesteine werden von den Wellen zu einem feinen glänzenden Sand zermahlen, welcher den Strand der flachen Buchten so lieblich macht. Bei jeder einigermassen erheblichen Wellenbewegung wird aber dieser feine Sand aufgewühlt und trübt das Wasser bis zu ziemlicher Entfernung vom Ufer. Dieser Umstand muss aber, worauf schon Semper hinwies, das Korallenwachstum sehr beeinträchtigen.

Hier gibt es ferner zahlreiche Anneliden, Aktinien, Seeigel, Ophiuren u. s. w. Von den letzteren halten sich viele kletternd auf den Gorgonien und Korallen auf; doch weisen sie nicht die Eigentümlichkeiten auf, welche Doederlein von epizoischen Ophiuren der östlichen Meere beschrieben hat. Zwischen all diesen Tieren bewegen sich die üblichen „Korallenfische“; diese Lebensgemeinschaft weist unter den Fischen die auffallendsten Farben und Formen auf. Es ist dies jedem Naturforscher eine wohlbekannte Erscheinung; aber jeder, der sie mit eigenen Augen sieht, muss von neuem über die grosse Pracht staunen, die hier entfaltet wird, und jeder sich die Frage vorlegen, welche Ursachen wirksam waren, um gerade hier alle diese zierlichen Formen zu versammeln. Die Beantwortung einer solchen Frage erfordert eine tiefe Kenntnis der gesamten Lebensverhältnisse der in Betracht kommenden Arten, eine Kenntnis, zu der wir nur geringe Anfänge besitzen. Einen Anfang zur Erklärung mögen aber schon die folgenden Thatsachen enthalten: Einmal sind zwischen den Aesten der Korallenbäumchen die Fische vor Feinden fast gänzlich geschützt; kein Hai und kein grösserer Raubfisch wagt sich zwischen die gefährlichen Zacken hinein. Somit werden nach der einen Seite hin auftretende buntfarbige u. s. w. Variationen

nicht so leicht ausgemerzt und unterdrückt werden. Vielleicht kann für die eine oder andere Art auch die Annahme zu einer Erklärung führen, dass die betreffenden Arten, die unter anderen Lebensbedingungen die schönen Farben erworben hatten, vor aufgetretenen Verfolgern sich in den bequemen Schutz der Korallen begaben und infolge dessen hier als Arten erhalten blieben, während sie anderswo ausstarben. Uebrigens würden derartige Annahmen nicht die Entstehung des Kleides jener Tiere, vielmehr nur ihr Vorhandensein auf den Korallenriffen erklären.

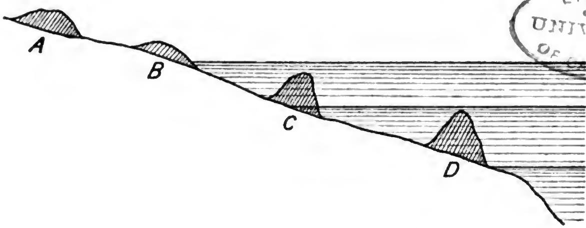
Die Tufffelsen, welche hier das Meer begrenzen, sind sehr hoch und steil und zahlreiche Höhlungen in ihren Wänden sind von Tropikvögeln (Phaëton) bewohnt, daneben von anderen Seevögeln. Es ist bemerkenswert, dass die Phaëton hier in Höhlungen nisten, während sonst von ihnen angegeben wird, dass sie auf dem flachen Boden brüten.

Weiter südwärts habe ich die Küstenfauna nicht genauer kennen gelernt bis zur Gegend der Südspitze, wo ich meine Dredgungen und Planktonfänge wieder aufnahm. Wie bei den obigen Angaben können hier sich alle Mitteilungen nur auf den allgemeinen Charakter der Fauna beschränken; genaue Mitteilungen über die gesammelten Formen werde ich später in einer Liste der Akademie vorlegen.

Nahe der Südspitze der Insel Martinique wird ihre Küstenlinie nochmals durch einen Busen stark nordwärts eingebuchtet; es ist dies die Bai du Marin. An der östlichen Küste derselben liegt das Dörflein St. Anne, wo ich bei der Familie Dejean eine sehr freundliche Aufnahme fand und von wo aus ich mit meinen Fischern das umgebende Meer durchstreifte. Hier im Süden beginnen nun die Korallen echte Riffe zu bilden, insbesondere jedoch auf der östlichen Seite der Insel gibt es grössere zusammenhängende Riffbildungen. Die Arten sind bemerkenswerter Weise dieselben, welche an der nördlichen Küste sich nur zu lockeren Ansiedlungen niederlassen. Die Formen der Riffe sind meist bandförmig; die kleineren sind unregelmässig gestaltet; ihre Form hängt offenbar von derjenigen des felsigen Untergrundes ab. Für die Formen der

grösseren Bänder muss die gleichmässige Hebung der Küste von bestimmendem Einfluss sein. Denn wie ich z. t. hier und insbesondere später bei St. Thomas beobachtete, findet man oft eine Reihe von Riffen auf einander folgen, von denen die meist gehobenen alle abgestorben sind, während dasjenige, welches noch vom mindesten Wasserstand bedeckt war, einzig überlebte. Dass die Riffbildungen durch korallenlose Strecken getrennt sind, weist auf zwar gleichmässig verlaufende, aber in bestimmten Intervallen beschleunigte Hebungen der ganzen Küste hin. Wie dies gemeint ist, zeigt die hier stehende Skizze, welche Riffe an der Südküste von St. Thomas darstellt.






Das Riff *D*, welches unter dem tiefsten Wasserstande sich befindet, besteht aus lebenden Korallentieren und ist in weiterem Wachstum begriffen. Dass es nicht weiter nach aussen wächst, ist wahrscheinlich auf den zu raschen Abfall des Meeresbodens zurückzuführen. Das Riff *C* befindet sich zwar unter Wasser bei höchstem Wasserstande, liegt aber bei niedrigstem völlig trocken; es ist demgemäss vollständig abgestorben, ebenso das Riff *B*, welches vom höchsten Wasser gerade noch berührt wird. Das Riff *A* liegt bereits oben auf der gänzlich trockenen Küste. Alle 4 Riffe sind aber durch gänzlich korallenlose versandete Strecken getrennt. Infolge dessen muss man periodische Hebungen annehmen, was ja in einem so vulkanischen Gebiet nicht verwunderlich erscheint. Erdbeben sind dort häufig, ich erlebte während meines kurzen Aufenthaltes in St. Thomas ein ziemlich heftiges, welches aber keinen Schaden anrichtete.

Das Wasser der Bucht von St. Anne ist von einer wundervollen blauen Farbe und die hellen Korallenriffe schimmern durch dies Wasser in unbeschreiblich schönen Tönen. Die Klarheit lässt das Wasser viel seichter erscheinen, als es thatsächlich ist; man glaubt Gegenstände mit dem Handnetze erhaschen zu können, welche sich thatsächlich in 20—30 m Tiefe befinden. In Tiefen von 15 m ja bis zu etwa 20 m tauchte der eine meiner Fischer vorzüglich und brachte mir auf diese Weise manche Beute herauf. Der innere Teil der Bucht ist schlammig und tierarm, während nach aussen mit der felsigen Bildung der Tierreichtum zunimmt; die westliche Küste der Bucht ist ebenfalls etwas versandet, zeigt sogar einige schwache Mangroveansiedelungen, ist jedoch an Tieren, besonders Echinodermen, noch ziemlich reich.

Hier fiel mir, wie noch nie vorher die Farbenpracht der marinen Tierwelt auf: wir brachten Seeigel herauf, die grasgrün gefärbt waren und lange weisse Stacheln hatten, dann weisse mit schwarzen Stacheln. Grosse Schnecken, Tritoniumartig, gab es in Menge und prächtige Schwämme in leuchtenden Farben: violett, rot, orange und ultramarin! In einem rotgefärbten Schwamm fand ich einen kleinen ebenso gefärbten dekapoden Krebs (ähnlich dem Alpheus); ob wohl hier die Ernährung mit Teilen des Schwamms bestimmend auf die Farbe einwirkte? Jedenfalls kann bei einem Tier, welches Hohlräume in einem anderen bewohnt, die Farbe keinen Schutz gewähren.

Ein Ausflug auf die Ostseite der Insel hinüber zeigte hier die Fauna im grossen und ganzen ähnlich. Hier sind die Korallenriffe sehr zahlreich und ich bedauerte sehr, nicht mehr Zeit auf ihre Untersuchung verwenden zu können. Ziemlich im Süden machen zahlreiche Felsenriffe eine Landung sehr schwierig und gefährlich. In unserem alten gebrechlichen Negerkahn hatten wir manche Fährlichkeiten auszustehen. Einer dieser Riffe, durch seine Form sehr auffallend, heisst im Volksmund table du Diable. In der Nähe desselben sammelte ich in Felsenlöchern ziemlich viele Tiere der Flutgrenze. Ich fand schöne Aktinien, Hydroïdpolypen, zum teil sehr grosse

Arten von schön weisser und karminroter Farbe; ferner Seeigel, Seesterne und Ophiuren, Holothurien und viele Krebse und Krabben. Von den Aktinien lebte eine in den Höhlungen grosser Hornschwämme.

Hier wie im Norden der Insel habe ich wiederholt sehr reiche Planktonfänge gemacht. Die Zusammensetzung in beiden Gegenden war verschieden, doch sind meine Fänge nicht zahlreich genug und aus einer zu kurzen Zeit, um irgend eine Gesetzmässigkeit herausfinden zu können. Jedenfalls war die Windrichtung von grossem Einfluss. Im Norden waren öfter im Plankton die pflanzlichen Bestandteile kolossal dominierend, besonders kleine Phaeophyceen liessen die Tierwelt kaum aufkommen. Doch fanden sich da an andern Tagen viele auffallend geformte und gefärbte Copepoden und andere Krebse und Krebslarven; zahlreich waren Radiolarien, kleine Medusen u. s. w. An einem Tage war das Meer weithin bedeckt mit Exemplaren einer Eucharisart mit 4 auffallenden braunen Flecken auf den Lappen.

Im Süden fielen ausser vielen Larven ziemlich grosse Anneliden, dann ganz riesige Sagitten, Medusen u. s. w. auf. Die Fänge harren noch der genaueren Sichtung und Bestimmung. —

An die oben erwähnte table du diable schliesst sich eine Bucht mit einem weiten Sandstrande an; auf demselben waren grosse weisse Sandkrabben sehr häufig. Der Strand verläuft gegen Lagunen hin, um welche ein undurchdringliches Dickicht von Mangroven sich erstreckt. Ein grosser Teil der Gegend hier besteht aus tertiärem Kalk. Ein Berg und eine Ebene führen ihren Namen von den zahlreich dort vorkommenden Versteinerungen; doch scheint mir die Natur der dort als versteinertes Holz bezeichneten Steine sehr zweifelhaft. Proben davon habe ich zur Untersuchung mitgenommen.

Vom Süden kehrte ich selbst auf einem Ritt durch das Land nach Fort de France zurück; doch will ich auf meine Exkursionen in Martinique nicht weiter eingehen, da sie mehr für mich interessant und lehrreich waren, als hervorragend durch neue wissenschaftliche Beobachtungen.

Ehe ich die Schilderung meiner Reise fortsetze, will ich kurz zwei Dinge erwähnen: Einmal die Trigonocephale, oder fer de lance, die berüchtigte Lanzettschlange (Trigonocephalus lanceolatus). Ich erwähnte oben schon die grosse Furcht, die sämtliche Einwohner vor ihr haben. Bis zu einem gewissen Grade ist diese Furcht sehr berechtigt, denn die Schlange ist eine der grössten und bissigsten Giftschlangen. Wenige Menschen werden von ihrem Biss geheilt, die meisten sterben in wenigen Stunden. Viele geheilte bleiben aber dauernd gelähmt und ich habe verschiedene untersucht, welche sogar infolge des Bisses dauernd blödsinnig geworden waren.

Ferner möchte ich nicht unerwähnt lassen, dass Martinique ein Durchgangspunkt für zahlreiche Wandervögel ist. In der Nähe von St. Anne befindet sich die sog. Saline, ein See und halbsalziger Sumpf, welcher zu allen Zeiten grosse Mengen von Vögeln beherbergt. Ich habe hier viele Arten von Wasservögeln erbeutet. Im Frühjahr und Herbst jedoch sollen, wie mir die Anwohner erzählten, Unmassen von Wandervögeln aus Süd- und Nordamerika hier einfallen. Sie rühmen die grossartige Jagd zu der Zeit; es sollen viele Entenartige Vögel darunter sein. —

Ich verliess Martinique am 17. April 1898 und besuchte von da aus mit einem amerikanischen Schiffe die ganze Reihe der kleinen Antillen, ohne jedoch irgendwo Zeit und Gelegenheit zu ausführlicheren Studien zu gewinnen. Doch will ich über einige der Inseln kurze Bemerkungen anfügen, welche vielleicht späteren Reisenden von Nutzen sein können.

Der nächste Besuch galt der englischen Insel Dominika. Zunächst fiel sofort die grössere Reinlichkeit und bessere Haltung gegenüber der französischen Kolonie auf. Ich bedauerte sehr, nicht Zeit zu haben, um die interessante Landfauna der Insel etwas zu studieren. Dieselbe ist besonders in der Vogel- und Insektenwelt viel reicher als in Martinique. Urwälder überziehen noch alle Berge und das Innere ist noch ganz unkultiviert. Für marine Untersuchungen erschienen mir aber die Küsten nicht so günstig und der Wellengang viel zu

stark. Im Nordosten der Insel soll sich noch eine gänzlich isolierte Karibenkolonie befinden.

Ueber die Inseln Guadelupe und Antigua kann ich nichts berichten, da ich sie zu flüchtig sah. Jedoch Nevis und St. Kitts (St. Christof) sah ich etwas genauer. Beide Inseln sind wegen der Zuckerkultur früher in ihrem ganzen flacheren Gebiet entwaldet worden. Die schön geformten Berggipfel sind zwar noch bewaldet, aber zu der Zeit meines Besuches machte sich grosse Dürre geltend, welche sehr zu den Verhältnissen der südlichen Inseln kontrastierte. Dieser Trockenheit entsprechend zeigte sich auf beiden Inseln in den Niederungen vor allem die Orthopterenfauna sehr entwickelt. Vor allem waren Heuschrecken in zahlreichen Arten und Individuen auf Nevis vertreten. Jedoch wurden daselbst auch viele Wespen und Schmetterlinge gesammelt. Von letzteren wurde jedoch die Hauptausbeute auf den Bergen von St. Kitts gemacht; und ich bedauere es ausserordentlich, dass ich meinen Aufenthalt nicht länger ausdehnen konnte; denn gerade zu der Zeit, wo ich dort war, waren die Umstände zur Anlegung einer grossen Insektensammlung sehr günstig. Hätte ich geahnt, dass ich auf der weit weniger interessanten Insel St. Thomas so lange würde aufgehalten werden, so hätte ich viel lieber diesen Aufenthalt auf eine dieser südlichen Inseln verlegt. Auf den Bergen von St. Kitts habe ich aber einmal kennen lernen können, was Schmetterlingsleben in den Tropen bedeuten kann. Um blühende Bäume und Sträucher schwebten und flatterten da gerade zu Legionen von diesen schönen Geschöpfen: Danaïden, Heliconiden, Pieriden, Papilioniden und viele Andere.

Von St. Kitts, wo man von der Bevölkerung nichts als Klagen über den Niedergang des Zuckerbaues hörte, kam ich über St. Croix nach St. Thomas. Während wir in den Hafen einfuhren, verliess das deutsche Schiff, mit dem ich weiter reisen wollte, denselben; ich konnte nicht mehr mitkommen und war damit für eine Zeit lang auf St. Thomas festgebannt. Denn mittlerweile brach der Krieg aus und die spanischen und

amerikanischen Schiffe, auf welche ich gerechnet hatte, stellten sofort ihre Fahrten ein.

Ich mietete mich, da das Hotel schreklich schmutzig war, bei dem vortrefflichen Quarantäneinspektor Eggert ein und habe da, abgesehen von meiner Ungeduld, weiter zu kommen, köstliche Tage verlebt. St. Thomas ist von so vielen Naturforschern schon besucht worden, dass ich meine wenigen Beobachtungen nicht ausführlich hier schildern will. Für die Untersuchung von mariner Fauna wäre die Insel wohl nicht ungünstig gewesen, jedoch konnte ich, von Tag zu Tag auf einen Dampfer wartend, meine Kisten nicht auspacken. Ich begnügte mich damit, eine Anzahl von Insekten zu sammeln und hatte vor allen Dingen hier Gelegenheit, den Uebergang von Trocken- zur Regenzeit vollständig mitzumachen. Als ich mich der Insel nahte, bot sie einen braunen dürren Anblick dar; es war seit Monaten kein Regen gefallen: sogar die Cisternen waren fast leer. Kurz nach meiner Ankunft stellten sich die ersten Regen ein und als ich nach etwa 16 Tagen die Insel wieder verliess, prangte sie im herrlichsten Grün. Viele Bäume blühten; besonders auffallend waren die verschiedenartigen Papilionaceen, so der Flamboyant, dann Albizzia Lebbek u. A. Zahlreich sind auf der Insel die Mahagonibäume, aber stets angepflanzt als Zierbäume und besonders beliebt auf Gräbern. — Erwähnen will ich an dieser Stelle nur noch, dass man am sandigen Strand der Insel an manchen Stellen sehr häufig die Schalen von Spirula findet. Dieselben hängen fast immer in Haufen von angeschwemmtem Sargasso, mit welchem sie offenbar zusammen vom Ozean hergetrieben worden sind.

Ich verliess St. Thomas mit dem Dampfer der Hamburg-Amerikanischen P.-A.-Gesellschaft „Castilia“, dessen Kapitän Grommeyer mir während der Reise viele grosse Liebenswürdigkeiten erwies. Die Fahrt ging an der Nordküste von Porto Rico und Hispaniola entlang; in Porto Rico war eine Landung wegen des Krieges unmöglich; doch fuhren wir so nahe der Küste, dass wir manches Interessante sehen konnten, so die

Stadt S. Juan mit ihren Befestigungen und den eifrig exerzierenden Soldaten. Als wir an der Küste von Hayti entlang segelten, begegnete uns des abends die amerikanische Kriegsflotte, welche am Tag darauf S. Juan bombardierte.

Von der Insel Hayti bekam ich die Hafen Cap Haytien und Port au Prince zu sehen. Die wenigen Dredgungen, welche ich in dem ersteren vornahm, hatten wenig Erfolg: einige Seeigel, grosse Seesterne und eine Anzahl solitärer Korallen wurden erbeutet. Die landschaftliche Schönheit, welche diesen Hafen, wie ganz Hayti, auszeichnet, liess mich ohne Schwierigkeiten über den Schmutz und all die Liederlichkeit, welche in diesem Negerstaat herrschen, hinwegsehen.

Zoologisch weit interessanter scheint die Bucht von Port au Prince zu sein; die weiter draussen liegenden wundervollen Korallenriffe versprechen eine Menge interessanter Formen. Hier wie überhaupt in ganz Westindien konnte man deutlich noch den tiefen Eindruck der vor wenigen Monaten erfolgten deutschen Flottendemonstration konstatieren.

Die Weiterfahrt erfolgte längs der Südküste von Cuba, wobei ich einen kurzen Blick auf Santiago und das Castel Morro werfen konnte; doch geschah dies nur im Vorüberfahren, denn die Blokade war bereits erklärt und eine Landung für uns ausgeschlossen, obwohl recht gut möglich; denn an der ganzen Südküste der grossen Insel sahen wir kein einziges amerikanisches Schiff.

Nachdem wir das Cap S. Antonio, die westliche Spitze von Cuba, passiert hatten, traten wir in die Strasse von Yucatan ein, um sodann den Golf von Mexiko zu durchqueren und in Tampiko zu landen. Während wir fern der Küste von Yucatan über die Campechebank segelten, ohne jemals auch nur annähernd in Sehweite vom Land zu kommen, brachte uns ein heftiger Wind Scharen von Vögeln und Insekten aufs Schiff. So fiel mit einem male eine Wolke von kleinen grünen Cikaden auf den Dampfer nieder. Vögel, welche sich niederliessen, waren zum teil so erschöpft, dass sie sehr bald starben.

Ein ähnliches Schauspiel wiederholte sich, als wir uns der Mündung des Tampikoflusses näherten, nur mit dem Unterschiede, dass hier ein nordwestlicher Wind die Tiere über den ganzen Golf herübergetragen hatte.

Meinen Aufenthalt in Mexiko und die Weiterreise nach Californien will ich nur in aller Kürze erwähnen; denn es haben so zahlreiche Reisende bereits diese Gegenden besucht, dass ich meine nur auf der Durchreise gewonnenen Eindrücke nicht an die Seite der Schilderungen gründlicher Forscher stellen darf.

Meine Route war die folgende: ich reiste von Tampico mit der Eisenbahn nach der Stadt Mexiko. Daselbst verweilte ich etwa 14 Tage, besuchte die grossen Lavorfelder der Umgebung, sowie einige der aztekischen Ruinenstätten und den Fuss der grossen Vulkane Popocatepetl und Ixtaccihuatl. Eine Besteigung derselben zu unternehmen, verbot mir meine gemessene Zeit und die Ungunst der Jahreszeit. Nach San Francisco gelangte ich auf dem Wege durch Centralmexiko, durch Arizona und den Süden Californiens.

Eine Beobachtung, allerdings nicht naturwissenschaftlicher Art, möchte ich dabei nicht unterlassen, der Akademie vorzulegen.

Als ich mit dem Münchener Arzt Dr. E. Schmidtlein, dessen Freundlichkeit ich vieles verdanke, einen Ausflug nach der Ruinenstätte bei S. Juan di Teotihuacan machte, fiel es mir auf, dass hier ein Feld voll der interessantesten archäologischen Schätze unausgebeutet daliegt. Die mexikanischen Forscher scheinen nicht im stande zu sein, diese Schätze in der richtigen Weise zu heben; und nach allem, was ich sah, sind dort ausserordentliche Befunde zu hoffen.

Ein Indianer hatte daselbst ein Haus ausgegraben, welches in sehr merkwürdiger Weise an den Wänden mit reichlichem Bilderschmuck ausgestattet war, in den Tönen ähnlich den pompejanischen Malereien, in der Zeichnung natürlich den Geschmack der alten Mexikaner bekundend; es fiel mir aber auf, dass die Malereien mit viel Technik und Sicherheit ausgeführt waren.

Kleinere Reste, wie Pfeilspitzen, kleine Masken, Vasenreste findet man dort in Masse, und wir fanden selbst einige sehr hübsche Stücke, sogar einige edle Steine.

Bei einem Versuch zur Ausgrabung haben die Mexikaner nur ein Haus zum Einsturz gebracht, und dann nichts weiter gethan. Obwohl die mexikanische Regierung ein Ausfuhrverbot für Altertümer erlassen hat, wäre für eine richtig eingeleitete Unternehmung auf diplomatischem Wege leicht die Zustimmung derselben zu erlangen. Jedenfalls scheint dort für deutsche Forscher sich eine sehr lohnende Aufgabe zu bieten. —

## II. Nordamerika.

Nach einer mehrtägigen Eisenbahnreise durch die wunderbaren Wüstenlandschaften Centralmexikos und der südlichen Unionsstaaten, mit ihren vielen überraschenden Paradigmen recenter geologischer Phänomene, langte ich in S. Francisco an. Von dort führte mich eine weitere Fahrt von wenigen Stunden nach Pacific Grove bei Monterey, dem eigentlichen Ziel meiner Reise.

Ich wurde dort schon am Bahnhof von Dr. Mc. Farland, Assistant Professor an der Palo Alto Universität, welcher vor wenigen Jahren an der Universität zu Würzburg promoviert hatte, mit viel Liebenswürdigkeit und Kollegialität empfangen. Auch die übrigen Herren, unter welchen ich besonders Dr. Price, einen Schüler von Geheimrat v. Kupffer, Mr. Heath, Mr. Green, und den Botaniker Mr. Nott erwähne, bezeugten mir eine sehr freundschaftliche Gesinnung; von den jüngeren Assistenten war mir besonders Mr. Abbot bei verschiedenartigen Gelegenheiten sehr behilflich.

Jedoch die Ausrüstung, welche ich dem zoologischen Institute resp. der Güte meines Chefs, Prof. Hertwig, verdankte, war so vorzüglich, dass ich die spärlichen Hilfsmittel der Station kaum zu benutzen brauchte; zudem schickte mir Prof. v. Kupffer noch einen ganzen Vorrat von Glassachen und Chemikalien nach.

Für spätere Besucher, welche die reiche Flora und Fauna der kalifornischen Küste zum Gegenstand ihrer Untersuchungen machen wollen, möchte ich bemerken, dass es unnütz ist, sich

die allgemein gebräuchlichen Gläser und Chemikalien dorthin mitzunehmen. In S. Francisco kann man alle Wünsche dieser Art, wenn es nicht gar zu spezielle sind, befriedigen.

Die Station zu Pacific Grove liegt auf einer kleinen Landzunge, welche in die weite Bucht von Monterey hineinragt. Die Bucht mag etwa an Grösse dem Golf von Neapel nahe kommen. Jedoch fehlen ein Vesuv, ein Capri und Ischia; auch die Hügelketten der Vorgebirge stellen sich nicht so stattlich dar, wie der Posilipp und die Berge von Sorrent. Aber in der Tiefe des Meeresblau, in der Pracht der farbigen Stimmungen zu den verschiedenen Tageszeiten kann die mittelkalifornische Küste wohl mit der italienischen wetteifern.

Eine Reihe von Städtchen und Ortschaften ziehen sich an den Ufern der Bucht hin von St. Cruz im Norden bis Pacific Grove im Süden; dieselben weichen in ihrem allgemeinen Charakter sehr von einander ab. Insbesondere kontrastieren die beiden Nachbarorte Monterey und Pacific Grove ganz ausserordentlich. Während das erstere noch einen durchaus spanischen Charakter bewahrt hat — viele der Einwohner sprechen im Familienverkehr nur spanisch —, ist das erst vor einer kurzen Reihe von Jahren gegründete Pacific Grove ein echt amerikanisches Nest, welches zudem als methodistische Gründung noch eine Reihe von speziellen Charakterzügen erhalten hat.

Trotzdem in Monterey eine Reihe von älteren malerischen Bauten, so die alte spanische Missionskirche, vorhanden sind, so wirkt doch Pacific Grove durch seine wundervolle Reinlichkeit und die nette Art, wie seine kleinen Holzhäuser zwischen die Bäume eines alten Waldes hineingebaut sind, noch anziehender. Während das üppige Hotel del Monte die reichen Leute, Santa Cruz die guten Bürgersfamilien im Sommer beherbergt, ziehen sich nach Pacific Grove mehr die Leute, welche einen schönen Sommeraufenthalt für weniges Geld haben wollen. Und man muss gestehen, wer mit seiner Familie abgeschlossen in einer der kleinen reizenden Villen in aller Ruhe lebt, der kann hier eine ganz wundervolle Sommerfrische verbringen. Für den Junggesellen ist weniger gut gesorgt; doch kann man

bei einiger Anpassung an die Landesverhältnisse ganz gut existieren. Als Temperenzlergemeinde gewährt Pacific Grove dem Manne mit eigenem Haushalt viel bessere Bedingungen; denn in Amerika kann man überall die Erfahrung machen: wo es nichts zu trinken gibt, ist auch das Essen in den Wirtshäusern recht mangelhaft.

Die biologische Station, nach ihrem Stifter „Hopkins Seaside laboratory“ genannt, besteht aus zwei geräumigen Holzgebäuden mit je einem ebenfalls hölzernen Wasserturm, auf welchen in grosse Tanks das zur Speisung der Aquarien notwendige Seewasser hinaufgepumpt wird. Wenn ich anfangs von den Einrichtungen der Station enttäuscht war, so hatte das seinen Grund darin, dass ich nach der Schilderung Bashford Deans (in Natural Science Vol. XI) die ganze Art der Stationsanlage missverstanden hatte. Die Station ist nämlich in erster Linie Schulstation, d. h. ein marines Laboratorium, in welchem die biologischen Sommerkurse der Leland Stanford Universität abgehalten werden; für diese Zwecke ist die Anstalt ganz ausreichend ausgerüstet. In zweiter Linie aber erst beherbergt sie Forscher zu speziellen Studien; und da muss sich ein jeder selbst helfen, so gut es geht. In den unteren Stockwerken der beiden Gebäude befinden sich grössere Kurssäle und in denselben wird täglich Unterricht erteilt. Während der Ebbezeit ziehen Lehrer und Schüler zu gemeinsamen Exkursionen aus, wobei sich die Untersuchungen fast ausschliesslich auf die Gezeitenzone beschränken. Systematische Fänge mit Planktonnetz oder Dredge werden gar nicht kultiviert, man begnügt sich vorläufig mit dem, was man von der Küste aus erlangen kann oder den gelegentlichen Fängen der chinesischen Fischer. Man ist gewohnt, dass Leute, welche spezielle Zwecke verfolgen, sich für diese selbst ausrüsten.

Man stellte mir in dem östlichen Gebäude einen netten, hellen Raum zur Verfügung, sowie zwei Tische, einige Aquarien und grössere Gläser. Sonst erhielt ich von der Station nur noch etwas Alkohol. Viele kleine Gefälligkeiten erwiesen mir jedoch sämtliche Herren des Laboratoriums.

Da die Station mit Booten schlecht versehen ist und vor allem keinerlei Bedienung irgend welcher Art vorhanden ist, so war ich genötigt, mein Material mir selbst zu verschaffen. Ich habe vielfach an der Küste gesammelt, ferner Plankton gefischt und mehrere male gedregt. Letzteres musste ich aber bald aufgeben; denn meine Dredge erwies sich als viel zu schwer für die kleinen Bote von Pacific Grove. Das Plankton im Innern der Bucht ist ziemlich arm und eintönig gewesen; doch hängt es darin offenbar von den Winden und Strömungen ab. Denn an einzelnen Tagen fing ich viel grössere Mengen als an anderen. Auffallend war der Reichtum an Protozoen: Flagellaten verschiedener Gruppen und Infusorien waren oft in Mengen vorhanden. Eines Tages war das Meer gänzlich gerötet von ungeheuren Schwärmen von Noctiluca. Es gelang mir, ein grosses Material von dieser interessanten Cystoflagellate zur Untersuchung der Fortpflanzungsvorgänge zu konservieren.

Den wertvollsten Teil meiner Sammlungen verdanke ich jedoch den chinesischen Fischern, deren Tüchtigkeit bereits B. Dean so sehr rühmt.

In der Mitte zwischen Pacific Grove und Monterey liegt auf einem felsigen Vorsprung das Dorf dieser Fischer; es ist durchaus ein chinesisches Dorf und wie überall in der Welt haben die Chinesen ihre sämtlichen Lebensgewohnheiten auch fern der Heimat beibehalten. Häuser, Fahrzeuge und Trachten sind dieselben, welche bei Kanton üblich sind und ihre Eigentümer haben so gut wie nichts von der fortgeschrittenen amerikanischen Kultur angenommen. Nur in einem Punkte unterscheidet sich speziell diese Kolonie von den meisten chinesischen Siedelungen der Welt: die Fischer sterben ohne Gewissensbisse auf dem fremden Boden und lassen sich auch da begraben, ohne ihre Gebeine der heiligen chinesischen Erde wieder zuführen zu lassen.

Hier fand ich die geeigneten Fischer, welche bereits durch den Besuch B. Deans auf den Wert der Eier von Bdellostoma aufmerksam gemacht, sich bereit erklärten, solche auch für mich zu sammeln. Die Methode, mit welcher diese Fischer

ausschliesslich oder doch fast ausschliesslich arbeiten, ist sehr bemerkenswert, indem dieselbe für das Erlangen der Eier von Bdellostoma speziell günstig ist. An einem mehrere Hundert Meter langen Seil sind eine sehr grosse Anzahl von Angelhaken an kurzen Schnüren befestigt. Der Abstand der einzelnen von einander beträgt etwa 40 cm. Jede Angel ist mit einem Stück gesalzenen Fisches besteckt; um Bdellostoma zu fangen, nimmt man kleinere Haken, als für die Lachse und anderen grösseren Fische. Dieses lange Seil lässt der Fischer bei seiner Ausfahrt allmählich hinab und lässt es dann mehrere Stunden lang hinter seinem Schiffe herflottieren.

Mit Hilfe dieser Haken bringt man die Eier von Bdellostoma entweder in den Schleimbeuteln der Weibchen oder direkt in den Schnüren und Haken verfangen herauf. Die den Weibchen so sehr zäh anhaftenden Schleimbeutel, welche B. Dean bereits abgebildet und beschrieben hat (a. a. O.), ermöglichen, wie es scheint, eine Art von Brutpflege. Das Weibchen behält die Eier offenbar anhängend, bis die jungen Tiere ausschlüpfen. Denn ich erhielt Embryonen von ganz jungen Stadien an bis zu gänzlich dottersacklosen Exemplaren und manchmal fanden sich auch leere Eikapseln dabei. An dem Schleimsack und unter einander sind die Eier durch die bekannten Hakenapparate festgehalten.

Ein Umstand, welcher die Annahme der Brutpflege zu bestätigen scheint, ist ferner darin zu erblicken, dass die Eier hegenden Weibchen sich in Scharen zusammenhalten. Mein Fischer fing oft Tage lang an beliebigen Orten nur Männchen und junge Weibchen, bis er schliesslich einen „Platz“ fand, von dem er täglich Weibchen mit Eiern und Embryonen heraufbrachte. Dem Fischer war ferner aufgefallen, dass die Weibchen mit Eiern sehr schwer auf den Köder beissen, und insbesondere kurz nach der Eiablage; dass sie jedoch in der vorgerückteren Jahreszeit, wenn sie meist schon ausgebildete „Babies“ in den Eikapseln tragen, wieder viel leichter zu fangen sind.

Aus der allgemeinen Biologie von Bdellostoma möchte ich zwei Punkte hervorheben; der Schleim, welchen die Tiere ab-

sondern, ist sehr zähe und ein einzelnes Tier vermag eine kolossale Menge zu produzieren. Der Schleim besteht bekanntlich aus lauter ganz feinen Fäden, welche Bildungen entstammen, die an die Nesselkapseln der Coelenteraten erinnern. Greift man in solchen Schleim hinein, so klebt er an den Fingern und es kostet viel Mühe, ihn wieder wegzubekommen. Das Gefühl dabei ist ganz ähnlich demjenigen, welches beim Anfassen einer kleineren Aktinie erzeugt wird. Transportiert man andere gesammelte Tiere mit den Bdellostomen im gleichen Gefäss, so werden dieselben, insbesondere z. B. Echinodermen dermassen von den Fäden umsponnen, dass man eine grosse Mühe hat, sie wieder zu reinigen.

Von Interesse ist ferner, dass die Tiere, wie ich beobachten konnte, nicht nur in tote Fische eindringen, sondern auch in lebende. Einen Torpedo, den ich mit anderen Fischen und Bdellostomen in einem Kübel vom Chinesendorf nach der Station schleppte, bewahrte auch sein elektrisches Organ nicht vor der Invasion. Bei der Ankunft in meinem Arbeitszimmer vermisste ich in dem Kübel sämtliche Bdellostomen und fand sie dann in der Bauchhöhle der übrigen grösseren Fische wieder. Sie hatten sich durch Löcher in der Bauchdecke eingebohrt, wobei ihnen ihre mit scharfen Hornzähnen besetzte, stark verstülpbare Zunge sehr vorteilhaft ist.

Das Material an Eiern und Embryonen war anfangs spärlich, mehrte sich im Laufe des Juni, um im Juli ziemlich reichlich zu werden; in der letzten Zeit waren besonders vorgerücktere Stadien nicht selten. Eines Tages erklärten mir jedoch die Chinesen, dass sie keine Bdellostomaeier für mich sammeln würden; denn es waren, wie alljährlich die grossen Salmschwärme in der Bucht eingetroffen und damit ergab sich für die Fischer die Möglichkeit, an einem Tage an Salmen das 3 bis 4 fache von dem zu verdienen, was ich ihnen bieten konnte. Da nun die Möglichkeit, weiteres Material zu erhalten, sich damit auf Wochen hinausschob, ich ausserdem schon eine ziemlich befriedigende Collektion zustande gebracht hatte, so beschloss ich, meine Reise fortzusetzen.

Was ich von Beobachtungen an den frischen Objekten machen konnte, werde ich an anderem Orte veröffentlichen. Hier will ich nur einige Bemerkungen anfügen. Wie schon Dean in einer kurzen Mitteilung erwähnt, beginnt die Entwickelung stets von dem operkularen Pol des Eies. Dort befindet sich auch die Mikropyle. Der Embryo entwickelt sich auf der konkaven Seite des, einer Bananenfrucht ähnlich, leicht gebogenen Eies. Die Kopfanlage liegt dabei ungeführt unter der Stelle, wo der Operkularspalt um das Ei herumgreift. Das Schwanzende wächst langsam dem aboperkularen Ende zu, wobei im Gegensatz zu der Behauptung Deans ein Umwachsungsrand deutlich zu sehen ist.

Die Wachstumsverhältnisse des Embryos sind eigenartig und verdienen ausführlicher berücksichtigt zu werden, was aber an dieser Stelle nicht geschehen soll, da sie sich sehr schwer ohne Abbildungen klar machen lassen.

Wenn das Schwanzende ungefähr den aboperkularen Pol erreicht hat und sich umzuschlagen beginnt, beginnt das Wachstum an Kopf- und Schwanzende gleichmässig einzusetzen. Der Kopf erreicht bald den operkularen Pol, und nachdem er sich ebenfalls herumgebogen, beginnen beide Enden auf der konvexen Seite des Eies auf einander loszuwachsen.

Vorher, als der Schwanz etwa gerade am aboperkularen angelangt war, zeigten sich die ersten Spuren von rotem Blut deutlich von aussen sichtbar. Sie traten auf in Form von Kanälen und Lakunen, welche die Seitenbegrenzung des Embryos bildeten, und besonders am Kopf- und Schwanzende stark ausgebildet erschienen. Aus der vor dem Kopfe gelagerten Lakune bildete sich bald ein starker Gefässast hervor, welcher auf der konvexen Seite des Eies geradeaus vorwärts wachsend, sich bald in zahlreiche Dottergefässe spaltete. Im weiteren Verlauf bilden sich zahlreiche weitere Dotterblutgefässe, von den seitlichen Lakunen ausgehend, so dass schliesslich der ganze Dotter von einem feinen Blutgefässnetz überzogen ist.

Das gerade vor dem Kopfe entspringende Hauptgefäss bezeichnet in seiner Richtung die Wachstumsbahn des Kopfes;

schliesslich wird es vom Schwanze bei dessen Wachstum bei Seite gedrängt.

Späterhin treten bedeutende Veränderungen an den Blutgefässen auf, der Dottersack ist zu der Zeit, wo Kopf und Schwanz sich im Wachstum ausweichen müssen, schon ziemlich aufgezehrt. Doch erscheint der Embryo noch in sehr späten Stadien ganz in den Dotter eingesenkt, da die enge Eischale ihn hindert, sich von demselben abzuheben.

Auf weitere Einzelheiten der Entwickelung will ich an dieser Stelle, ehe eine genaue Untersuchung des konservierten Materiales vorher gegangen ist, nicht eingehen. Nur eine Beobachtung will ich noch anführen. In den älteren Embryonalstadien, besonders, wenn der Embryo schon anfängt, sich zu bewegen, löst sich der Deckel (das Operculum) immer leichter von der übrigen Schale ab, so dass man ohne weiteres annehmen kann, dass das ausgebildete junge Tier durch seine Bewegungen den Deckel zu öffnen vermag und so ins Freie gelangt. —

Ueber die sonstige Fauna der Bucht von Monterey kann ich noch folgendes mitteilen: Vom Plankton habe ich oben schon gesprochen. Sonst kenne ich nur die Fauna der Gezeitenzone, eine ziemlich grosse Anzahl von Fischen aus allen Zonen und die gelegentlichen Tiefenfänge der Chinesen.

Die Küste besteht meist aus wild durch einander getürmten Felsmassen, mit welchen an einigen Stellen lange Strecken flachsten Sandstrandes abwechseln. Letztere Strecken sind landeinwärts meist von Dünen begrenzt. Die marinen Tiere sind wenige und nicht besonders interessante Formen: Krabben und amphibische Isopoden sind häufig.

An der felsigen Küste entwickelt sich jedoch ein Tierleben von einem kaum glaublichen Reichtum der Formen. Ein weiter Raum der Gezeitenregion — die Ebbe ist hier im Sommer sehr tief — ist mit Algen bewachsen, welche ebenfalls einen riesigen Artenreichtum aufweisen. Zwischen denselben wimmelt es von tierischem Leben. Es gibt da ungezählte Arten von Protozoen, Hydroidpolypen, Aktinien. Unter letzteren fällt besonders eine

knospende Form auf. Aus dem Stamm der Würmer sind besonders schöne Turbellarien, Nemertinen, Anneliden und Gephyreen zu nennen. Von Echinodermen sind besonders zahlreich Seesterne und Holothurien, während Seeigel, Ophiuren und Crinoiden nur durch wenige Arten vertreten scheinen. An Mollusken erscheint die Artenfülle unerschöpflich: es kommen 23 Chitonen dort vor, darunter der riesengrosse Cryptochiton kamtschatkensis, viele Fissurellen und Patellen und verschiedene Haliotisarten. Unter ersteren zeichnet sich, ebenfalls durch ihre gigantischen Formen die Lucupina crenulata aus. Dadurch, dass Prof. M. Farland eine Monographie der Nacktschnecken der Küste vorbereitet, hatte ich Gelegenheit, eine Unmenge der wundervollsten Arten dieser farbenprächtigen Geschöpfe zu sehen. Zahlreiche Krabben und Fische beleben ferner die Algengebüsche.

Unter den Fischen der Bucht hebe ich besonders eine sehr häufige Chimaera hervor, von der ich auch Eier zu sehen bekam. Da jedoch Prof. Dean den Fischer beauftragt hatte, die Eier für ihn zu sammeln und in Fischkästen zu halten, so machte ich selbstverständlich keinen Versuch, ihm seine Kreise zu stören.

Von den Formen der etwas tieferen Zone waren sehr interessant verschiedene Arten von Pennatuliden, welche wundervoll leuchteten; ferner verschiedene Seesterne: Solastriden und Asteracanthionarten, dazu eine wundervolle Spezies von Astrophyton. Auch mehrere Cephalopoden gibt es; in ungeheuerlichen Massen kommt ein Loligo vor, welcher von den Chinesen in Netzen gefangen und am Strand auf den Felsen getrocknet, in Säcke gepackt und nach China geschickt wird, um, wie man sagt, als Dung für die Reisfelder zu dienen. Ich kann den Verdacht nicht unterdrücken, dass am Ende die langzopfigen Herren doch irgend eine Suppe davon bereiten.

Ich will mich nicht weiter in Aufzählungen verlieren, man ersieht aus dem Mitgeteilten bereits, wie reich das Tierleben dort sein muss. Dazu kommt noch, dass gerade in den Sommermonaten die meisten dieser Tiere auch laichen. Ich

habe wenige Tiere in Pacific Grove gesehen, von denen ich nicht auch Eier oder Embryonen gesehen habe. Für eine Station ist also die Lage ideal.

Soweit ich bis jetzt die gesammelten Arten übersehe, trägt die Fauna einen ausgesprochen nördlichen Charakter, was ja gut stimmt zu der Thatsache, dass an der Küste ein nördlicher Strom entlang streicht.

Auch die Landfauna ist ziemlich reich, die Insektenwelt ist bunt und auffallend. Doch diese Dinge sind zu wohl bekannt; meine geringen Erfahrungen enthalten keine neuen Befunde.

Von meiner Weiterreise und Heimkehr will ich nur kurze Züge mitteilen; sie war für mich von äusserstem Interesse und sehr lehrreich, doch habe ich aus dieser Zeit keine für die Wissenschaft neuen Resultate mitzuteilen.

Auf dem Wege nach Norden besuchte ich zunächst S. Cruz, schlug mich dann durch die Wälder der Küstengebirge — die wundervollen Wälder des Riesenbaumes Sequoia sempervirens — nach San José und dem durch seine Fruchtbarkeit berühmten Santa Clarathal durch. Dann besuchte ich die Universität von Palo Alto; der liebenswürdigen Aufnahme daselbst, besonders durch die Familie des deutschen Professors Flügel gedenke ich mit grösster Dankbarkeit.

Von San Francisco, wo ich die Sammlungen und Institute eingehend besichtigte, gelangte ich zunächst nach Portland in Oregon, sah dort den Willamettefluss und machte eine Fahrt auf demselben und auf dem riesenhaften, fischreichen Columbia River.

Mit Hilfe der Northern Pacificbahn fuhr ich sodann über Tacoma und Spokanefalls nach Livingstone, um von da aus den Yellowstonepark zu besuchen. Dann besuchte ich Chicago und seine wundervolle Universität, weiterhin den Niagara, Washington, New-York. Besonders an beiden letzteren Orten war die Besichtigung der grossen Sammlungen und Institute für mich von grossem Interesse und Wert.

Von New-York aus machte ich einen Abstecher nach dem nördlich in Massachusetts gelegenen Woods Hall, der biolo-

gischen Station der amerikanischen Naturforscher. Hier hatte ich Gelegenheit, die meisten der angesehensten Vertreter der Zoologie und vergleichenden Physiologie in Amerika kennen zu lernen. Es war sehr anregend, die Einrichtung der Station sowie des Laboratoriums der Fish Commission kennen zu lernen und zugleich einen Einblick in die Arbeitsweise so vieler vortrefflicher Forscher zu gewinnen.

Auf dem Dampfer Augusta Victoria der Hamburg-Amerika Linie trat ich die Heimreise an, um nach einem kurzen Aufenthalt in London in den letzten Tagen des August wohlbehalten wieder in München einzutreffen.

Ausser den Empfehlungen, welche die Akademie mir mitgab, waren mir solche von der deutschen Botschaft in Paris, der deutschen Gesandschaft in Mexiko, vom Direktorium der „badischen Soda- und Anilinfabrik“, und von vielen befreundeten Privatleuten vom grössten Nutzen. Ihnen allen sowie den vielen Deutschen in der Fremde, welche mich wohlwollend in meinen Absichten unterstützten, sei auch an dieser Stelle herzlicher Dank gesagt. Derselbe gilt auch ehrerbietigst der Akademie, welche durch ihre Bewilligung meine Reise möglich machte.

## Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Juli bis Dezember 1898.

---

**Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten.**

---

### Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

*Société d'Émulation in Abbeville:*

Mémoires. Tome 2. 1897. 4⁰.
Mémoires. Tome 17. partie 2. 1897. 8⁰.
Bulletin trimestriel 1896 et 1897. 8⁰.

*Royal Society of South-Australia in Adelaide:*

Transactions. Vol. XXII, part 1. 1898. 8⁰.

*Observatory in Adelaide:*

Meteorological Observations during 1895. 1898. fol.

*Südslavische Akademie der Wissenschaften in Agram:*

Ljetopis za godinu. 1897. 1898. 8⁰.
Rad. Vol. 134. 135. 1898. 8⁰.
Ant. Radić, Zbornik za narodni život Bd. III, 1. 1898. 8⁰.

*Société des Antiquaires de Picardie in Amiens:*

Bulletin. Année 1897 No. 3. 4. 1898. 8⁰.

*K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:*

Verhandelingen. Afd. Natuurkunde I Sectie. Deel VI, No. 1–5. II Sectie Deel VI, No. 1. 2. 1897/98. 4⁰.
Verhandelingen. Afd. Letterkunde. N. Reeks. Deel II, No. 1. 2. 1898. 4⁰.
Zittingsverslagen. Afd. Natuurkunde. Jaar 1897/98. Deel VI. 1898. 4⁰.
Verslagen en Mededeelingen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel I. II. 1897/98. 8⁰.
Jaarboek voor 1897. 1898. 4⁰.
Prijsvers Laus Mitiae. 1898. 8⁰.

*K. Zoologisch Genootschap in Amsterdam:*

Festschrift 1838 — 1. Mei — 1898. 1898. 4⁰.

*Peabody Institute in Baltimore:*

31th annual Report, June 1, 1898. 8⁰.

*Johns Hopkins University in Baltimore:*

Circulars. Vol. XVII, No. 136–138. 1898. 4⁰.
American Journal of Mathematics. Vol. XX, No. 2. 3. 1898. 4⁰.

The American Journal of Philology. Vol. XVIII, 4; XIX, 1. 1897/98. 8°.
American Chemical Journal. Vol. 20, No. 2—7. 1898. 8°.
Studies in historical and political Science. Ser. XVI. No. 1—9. 1898. 8°.
Bulletin of the Johns Hopkins Hospital. Vol. IX, No. 87—89. 1898. 4°.
The Johns Hopkins Hospital Reports. Vol. VII, No. 1. 2. 1898. 4°.

*Naturforschende Gesellschaft in Basel:*

Verhandlungen. Band XII, 1. 1898. 8°.

*Universitätsbibliothek in Basel:*

Schriften der Universität aus dem Jahre 1897/98. 4° und 8°.
Jahresverzeichniss der Schweizerischen Universitätsschriften 1897/98. 1898. 8°.

*K. natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch Indië zu Batavia:*

Natuurkundig Tijdschrift. Deel 57. 1898. 8°.
Boekwerken ter tafel gebracht gadurende heet jaar 1897. 1898. 8°.

*K. Kanzleibibliothek in Bayreuth:*

Fortsetzung des Katalogs vom Jahre 1868, die 1869 bis 1898 zugegangenen Bücher enthaltend. 1898. 8°.

*K. Serbische Akademie in Belgrad:*

Godischniak. X. 1896. 1898. 8°.
Aktenstücke betreffend den Transport der Asche des Vuk. Stef. Karagić aus Wien nach Belgrad 1897 von Andr. Gavrilović. 1898. 8°.

*Museum in Bergen (Norwegen):*

G. O. Sars, An Account on the Crustacea of Norway. Vol. II. part XI. XII. 1898. 4°.

*University of California in Berkeley:*

Schriften aus dem Jahre 1897.

*K. preussische Akademie der Wissenschaften in Berlin:*

Sitzungsberichte. 1898, No. XXIV—XXXIX; 1898. 4°.
Inscriptiones graecae insularum maris Aegaei Fasc. III. 1898. fol.

*Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:*

Berichte. 31. Jahrg., No. 11—17. 1898. 8°.

*Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:*

Zeitschrift. Band 50, Heft 1. 2. 1898. 8°.

*Physikalische Gesellschaft in Berlin:*

Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897 in 3 Abtheilungen. Braunschweig 1898. 8°.
Verhandlungen. Jahrg. 17, No. 7—11. 1898. 8°.

*Physiologische Gesellschaft in Berlin:*

Centralblatt für Physiologie. Bd. XI. Register, Bd. XII, No. 8—19. 1898. 8°.
Verhandlungen. Jahrg. 1897/98, No. 11—17. 1898. 8°.

*Kaiserlich deutsches archäologisches Institut in Berlin:*

Jahrbuch. Band XIII, Heft 2. 3. 1898. 8°.
Antike Denkmäler. Bd. II, Heft 3. 1898. fol.

*Geodätisches Institut in Berlin:*

Beiträge zur Theorie des Reversionspendels. Potsdam 1898. 4°.
Beiträge zur Berechnung von Lothabweichungssystemen. Potsdam 1898. 4°.

*K. preuss. meteorologisches Institut in Berlin:*

Veröffentlichungen. 1897. Heft 2. 1898. 4⁰.
Bericht über die Thätigkeit im Jahre 1897. 1898. 8⁰.
Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam 1892 und 1893. 1898. 4⁰.

*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik in Berlin:*

Jahrbuch. Band 27, Heft 1. 2. 1898. 8⁰.

*Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den preuss. Staaten in Berlin:*

Gartenflora. Jahrg. 1898, Heft 14—24. 8⁰.

*Verein für Geschichte der Mark Brandenburg in Berlin:*

Forschungen zur Brandenburgischen und Preussischen Geschichte. Bd. XI, 2. Hälfte. Leipzig 1898. 8⁰.

*Verein deutscher Eisenbahnverwaltungen in Berlin:*

Protokoll der in München am 31. August, 1. und 2. September 1898 abgehaltenen Vereinsversammlung. Berlin 1898. fol.

*Naturwissenschaftliche Wochenschrift in Berlin:*

Wochenschrift. Band XIII, Heft 7—12. 1898. fol.

*Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:*

Zeitschrift. 18. Jahrg., Heft 7—12. 1898. 4⁰.

*Allgemeine geschichtsforschende Gesellschaft der Schweiz in Bern:*

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Band XXIII. Zürich 1898. 8⁰.

*Historischer Verein in Bern:*

Archiv. Band XV, 2. 1898. 8⁰.

*R. Accademia delle Scienze dell' Istituto Bologna:*

Memorie. Ser. V, Tom. 6, fasc. 1—4. 1896—97. 4⁰.

*Universität in Bonn:*

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

*Verein von Alterthumsfreunden im Rheinlande in Bonn:*

Bonner Jahrbücher. Heft 103. 1898. 4⁰.

*Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:*

Mémoires. V. Série, Tome III, cahier 1. Paris 1898. 8⁰.

*Société Linnéenne in Bordeaux:*

Actes. Vol. 51. 52. 1897. 8⁰.

*Société de géographie commerciale in Bordeaux:*

Bulletin. 1898, No. 13. 14; 17—22. 8⁰.

*American Academy of Arts and Sciences in Boston:*

Proceedings. Vol. 33, No. 13—27; Vol. 34, No. 1. 1898. 8⁰.
Memoirs. Vol. XII, 4. Cambridge 1898. 4⁰.

*Boston Society of natural History in Boston:*

Proceedings. Vol. 28, No. 6—12. 1897/98. 8⁰.
Memoirs. Vol. V, No. 3. 1898. 4⁰.

*Meteorologische Station in Bremen:*

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen i. J. 1897. Jahrg. VIII. 1898. 4⁰.

*Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur in Breslau:*

75. Jahresbericht für das Jahr 1897 nebst Ergänzungsheft. 1898. 8⁰.

*Verein für die Geschichte Mährens und Schlesiens in Brünn:*

Zeitschrift. 2. Jahrg., Heft 3. 4. 1898. 8⁰.

*Académie Royale de médecine in Brüssel:*

Bulletin. 4. Série, Tome XII, 6—9. 1898. 8⁰.

*Académie Royale des sciences in Brüssel:*

Bulletin. 3. Série, Tome 35, No. 6; Tome 36, No. 7—10. 1898. 8⁰.
Classe des lettres. Concours pour les années 1899—1901. 1898. 8⁰.

*Société des Bollandistes in Brüssel:*

Analecta Bollandiana. Tome 17, fasc. 3. 4. 1898. 8⁰.

*Société Royale malacologique de Belgique in Brüssel:*

Annales. Tome 28—30, 31, fasc. 1; 1893—96. 8⁰.
Procès-verbaux. Tome 24, p. LXXXV—CLII; Tome 25—27. 1895—98. 8⁰.

*K. ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:*

Almanach. 1898. 8⁰.
Nyelvtudományi Közlemények. (Sprachwissenschaftliche Mittheilungen.) Bd. XXVII, 3. 4; Bd. XXVIII, 1. 2. 1897/98. 8⁰.
Történettud. Ertekezések. (Historische Abhandlungen.) Bd. XVII, 2—8. 1897/98. 8⁰.
Monumenta comitiorum regni Transylvaniae. Vol. 20. 1897. 8⁰.
Archaeologiai Ertesitö. (Archäologischer Anzeiger.) Vol. XVII, 4. 5; XVIII, 1—3. 1897/98. 4⁰.
Archaeologiai Közlemények. (Archäologische Mittheilungen.) Bd. 20. 1897. fol.
Nyelvtudomán. Értekezések. (Sprachwissenschaftliche Abhandlungen.) Bd. XVI, 10. 1897. 8⁰.
Corpus statutorum Hungariae Municipalium. Vol. IV, 2. 1897. 8⁰.
Monumenta Hungariae historica. Sectio I. Vol. 29. 1898. 8⁰.
Hampel J., A régibb Középkor emlékei. Magyarhonban. (Denkmäler des früheren Mittelalters.) Vol. II. 1897. 8⁰.
Mathematikai Ertesitö. (Mathemat. Anzeiger.) Bd. XV, 4. 5; XVI, 1. 2. 1897/98. 8⁰.
Mathematikai Közlemények. (Mathemat. Mittheilungen.) Bd. XXVII, 1. 2. 1897/98 8⁰.
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. XIV. 1898. 8⁰.
Chyzer C., Araneae Hungariae. Vol. II, 2. 1897. 4⁰.
J. Bayer, A Magyar drámairodalom története (Geschichte des Dramas in Ungarn.) Bd. 1. 2. 1897. 8⁰.
Csànki Dezsö, Magyarország történelmi földrajza a Hungadyak Korabán. Bd. 3. (Geschichtl. Geogr. Ungarns im XV. Jahrh.). 1897. 8⁰.
Rapport sur les travaux de l'Acad. en 1897. 1898. 8⁰.

*K. ungarische geologische Anstalt in Budapest:*

General-Register der Bände I—X der Mittheilungen aus dem Jahrbuche. 1898. 4⁰.
Földtani Közlöny. Bd. 28. Heft 5. 6. 1898. 4⁰.
Jahresbericht für 1896. 1898. 4⁰.
A Magyar Kir Földtani Intézet Evkönyve. Bd. XII, 2. 3. 1898. 4⁰.
A Magyar Kir Földtani Intézet Kiadványai. 1898. 4⁰.

*Statistisches Bureau der Haupt- und Residenzstadt Budapest:*

Publikationen. Vol. XXV, 3; XXVI—XXVIII. 1898. 4⁰.
Die Natalitäts- und Mortalitätsverhältnisse ungarischer Städte von Jos. von Kőrösy und G. Thirring. 1897. 8⁰.

*K. ungarische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Budapest:*

Francé, Craspedomonadinae. 1897. 8⁰.
Róna, Luftdruckverhältnisse Ungarns. 1897. 8⁰.
Szádeczky, Geologie d. Zempléni-szigethegysèg. 1897. 4⁰.
Kurländer, Erdmagnetische Messungen in Ungarn. 1896. 4⁰.
Kohaut, Libellulidae Hungariae. 1896. 4⁰.
Geologie der Csetrás-Gebirge. 1896. 4⁰.

*Museo nacional in Buenos Aires:*

Anales. Tom. XII. 1898. 8⁰.
Comunicaciones. Tom. I, No. 1. 1898. 8⁰.

*Dirección general de estadística de la Provincia in Buenos Aires:*

Memoria demográfica año 1895. La Plata. 1898. 4⁰.

*Botanischer Garten in Buitenzorg (Java):*

Mededeelingen. No. XIX, XXV—XXVII. Batavia 1898. 4⁰.
Verslag over het jaar 1897. Batavia 1898. 4⁰.
Conspectus hepaticarum Archipelagi Indici von Victor Schiffner. Batavia 1898. 8⁰.

*Society of natural sciences in Buffalo:*

Bulletin. Vol. V, 5; VI, 1. 1897/98. 8⁰.

*Academia Romana in Bukarest:*

Analele. Ser. II. Tome 18. Sect. sciintif.
„ 19. „ istor.
„ 20. Partea administr. 1897/98. 4⁰.
Artur Gorovei, Cimiliturile Românilor. 1898. 8⁰.
Etymologicum Magnum Romaniae. Tom. IV. Introducerea. 1898. 8⁰.

*Société Linnéenne de Normandie in Caen:*

Bulletin. 5ᵉ Sér., Vol. 1, fasc. 2—4. 1898. 8⁰.

*Meteorological Department of the Government of India in Calcutta:*

Monthly Weather Review 1898 February—July. 1898. fol.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. X, part 1. Simla. 1898. fol.
Report on the Administration in 1897/98. 1898. fol.

*Departement of Revenue and Agriculture of the Government of India in Calcutta:*

Memorandum on the snowfall of 1898. Simla. 1898. fol.

*Asiatic Society of Bengal in Calcutta:*

Bibliotheca Indica. New Ser., No. 910—921. 1897/98. 8⁰.
Journal. No. 370—374. 1898. 8⁰.
Proceedings. 1898, No. V—VIII. 8⁰.

*Superintendent of Government Printing in Calcutta:*

Report on the natural history results of the Pamir Boundary Commission by A. W. Alcock. 1898. fol.

*Geological Survey of India in Calcutta:*

General-Report 1897/98. 1898. 8⁰.

*Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Mass.:*
Astronomical Observations. Vol. 23. 1898. 4°.

*Philosophical Society in Cambridge:*
Proceedings. Vol. IX, part 9. 1898. 8°.
Transactions. Vol. XVII, part. 1. 1898. 4°.

*Museum of comparative Zoology at Harvard College in Cambridge, Mass.:*
Bulletin. Vol. 32, No. 6–8. 1898. 8°.

*Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania:*
Atti. Serie IV, Vol. XI. 1897. 4°.
Bullettino mensile. Nuova Ser., fasc. 53, 54. 1898. 8°.

*K. sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:*
Abhandlungen. Heft 3. Leipzig 1898. 4°.
Das Klima des Königreichs Sachsens. Heft V. 1898. 4°.

*Field Columbian Museum in Chicago:*
Publications. No. 23. 26–28. 1898. 8°.

*Zeitschrift „The Monist“ in Chicago:*
The Monist. Vol. 9, No. 1. 1898. 8°.

*Zeitschrift „The Open Court“ in Chicago:*
The Open Court. Vol. XII, No. 8–12. 1898. 4°.

*Naturforschende Gesellschaft Graubündens in Chur:*
Jahresbericht. Neue Folge. Bd. 41. 1897/98. 1898. 8°.
P. Lorenz, Die Fische des Kantons Graubünden. Zürich 1898. 8°.

*Franz-Josephs-Universität in Czernowitz:*
Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8°.
Uebersicht der akademischen Behörden 1898/99. 1898. 8°.

*Historischer Verein für das Grossherzogthum Hessen in Darmstadt:*
K. Adamy, die ehemalige Centralkirche des Stiftes Sct. Peter zu Wimpfen. 1898. fol.

*Colorado Scientific Society in Denver, Colorado:*
P. H. van Diest, A mineralogical Mistaké. 1898. 8°.

*Gelehrte estnische Gesellschaft in Dorpat:*
Sitzungsberichte 1897. 1898. 8°.

*Union géographique du Nord de la France in Douai:*
Bulletin. Tom. XIX, 2. 3. 1898. 8°.

*K. sächsischer Alterthumsverein in Dresden:*
Die Sammlung des Alterthumsvereins. Lief. I, Bl. 1–10. 1898. 4°.
Neues Archiv für sächsische Geschichte. Bd. 19. 1898. 8°.

*Verein für Erdkunde in Dresden:*
XXVI. Jahresbericht. 1898. 8°.

*Royal Irish Academy in Dublin:*
Proceedings. Ser. III. Vol. V, No. 1. 1898. 8°.

*American Chemical Society in Easton, Pa.:*
The Journal. Vol. XX, No. 8–11. 1898. 8°.

*Royal Society in Edinburgh:*
Proceedings. Vol. XX, No. 2, p. 137–248. 1898. 8°.

*Verein für Geschichte der Grafschaft Mansfeld in Eisleben:*
Mansfelder Blätter. 12. Jahrg. nebst Beilage zum 11. Jahrg. 1898. 8⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Emden:*
82. Jahresbericht für 1896/97. 1898. 8⁰.

*K. Universitätsbibliothek in Erlangen:*
Schriften aus den Jahren 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

*Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:*
Atti. IV. Ser. Vol. 20, disp. 3. 4.
„ 21 „ 1. 2. 1897/98. 8⁰.

*Società Asiatica Italiana in Florenz:*
Giornale. Vol. XI, 1897/98. 1898. 8⁰.

*Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:*
Abhandlungen. Band XXI, 2; XXIV, 3. 1898. 4⁰.
Bericht. 1898. 8⁰.

*Verein für Geschichte und Alterthumskunde in Frankfurt a/M.:*
Mittheilungen über römische Funde in Heddernheim II. 1898. 4⁰.

*Physikalischer Verein in Frankfurt a/M.:*
Jahresbericht für die Jahre 1896/97. 1898. 8⁰.

*Verein für Naturkunde in Fulda:*
VIII. Bericht 1884—1898. 1898. 8⁰.

*Universität Genf:*
Schriften aus d. J. 1897/98 in 8⁰.

*Universität in Giessen:*
Schriften aus d. J. 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Görlitz:*
Abhandlungen. Bd. XXII. 1898. 8⁰.

*Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz:*
Codex diplomaticus Lusatiae superioris II. Heft 3. 1898. 8⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:*
Göttingische gelehrte Anzeigen. 1898. No. VIII—X. Berlin. 8⁰.
Nachrichten. a) Philol.-hist. Classe. 1898, Heft 2. 3. 4⁰.
b) Mathem.-phys. Classe. 1898, Heft 2. 3. 4⁰.
Abhandlungen. a) Philos.-hist. Classe. N. F. Bd. II, 7.
b) Mathem.-physikal. Classe. N. F. Bd. I, 3. 1898. 4⁰

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Gothenburg:*
Göteborgs kgl. Vetenskaps — och Vitterhets — Samhälles Handlingar Följd IV, Heft 1. 1898. 8⁰.

*The Journal of Comparative Neurology in Granville (U. St. A.):*
The Journal. Vol. VIII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

*Gesellschaft für Pommersche Geschichte in Greifswald:*
Nachträge zur Geschichte der Greifswalder Kirchen von Th. Pyl. Heft 2. 1897. 8⁰.

*K. Instituut voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië im Haag:*
Catalogus der Land en Zeekaarten. 1898. 8⁰.
Bijdragen. VI. Reeks. Deel 5, aflev. 3. 4. 1898. 8⁰.

*Teyler's Genootschap in Haarlem:*

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. V, partie 4. Vol. VI, partie 1. 2. 1898. 4°.

Verhandlingen van Teylers godgeleerd Genootschap N. S. Deel XVI. 1898. 8°.

*Société Hollandaise des Sciences in Haarlem:*

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II. Tom. 2, livr. 1. La Haye 1898. 8°.

*Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:*

Leopoldina. Heft 34, No. 7—11. 1898. 4°.

Nova acta. Tom. 55—69. 1891—98. 4°.

Katalog der Bibliothek. Lief. 3—8. 1891—97. 8°.

*Deutsche morgenländische Gesellschaft in Halle:*

Zeitschrift. Band 52, Heft 2. 3. Leipzig 1898. 8°.

Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. XI, No. 1. Leipzig 1898. 8°.

*Universität in Halle:*

Verzeichniss der Vorlesungen. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8°.

Schriften aus d. J. 1897/98 in 4° und 8°.

*Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle:*

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 71, Heft 1—3. Leipzig 1898. 8°.

*Thüring.-Sächs. Geschichts- und Alterthums-Verein in Halle:*

Jahresbericht für 1897/98. 1898. 8°.

*Verein für Hamburgische Geschichte in Hamburg:*

Zeitschrift. Bd. X, 2. 1898. 8°.

*Stadtbibliothek in Hamburg:*

Schriften der Hamburgischen wissenschaftlichen Anstalten von 1895 und 1896.

*Historischer Verein für Niedersachsen in Hannover:*

Atlas vorgeschichtlicher Befestigungen in Niedersachsen von Carl Schuchhardt. Heft V. VI. 1896—98. fol.

Zeitschrift. Jahrgang 1898. 8°.

*Universität Heidelberg:*

Ferd. Ad. Kehrer. Ueber die Vorgänge bei der Wundheilung. 1898. 4°.

Schriften der Universität aus dem Jahre 1897/98 in 4° und 8°.

*Finländische Gesellschaft der Wissenschaften in Helsingfors:*

Acta societatis scientiarum Fennicae. Tom. 22. 23. 1897. 4°.

Ofversigt XXXIX. 1896/97. 1897. 8°.

*Commission géologique de la Finlande in Helsingfors:*

Finlands geologiska Undersökning. Kartbladet 32 und 33 (mit erläuterndem Text). 1898. 8°.

*Societas pro Fauna et Flora Fennica in Helsingfors:*

Acta. Vol. 13. 14. 1897. 8°.

Meddelanden. Heft 23. 1898. 8°.

*Universität Helsingfors:*

Schriften aus d. J. 1897/98 in 4° und 8°.

*Verein für siebenbürgische Landeskunde in Hermannstadt:*
Archiv. N. F. Band XXVIII, Heft 2. 1898. 8°.
Jahresbericht für das Jahr 1897/98. 1898. 8°.

*Verein für Meiningische Geschichte und Landeskunde in Hildburghausen:*
Schriften. 30. u. 31. Heft. 1898. 8°.

*Ferdinandeum in Innsbruck:*
Zeitschrift. 3. Folge. Heft 42. 1898. 8°.

*Journal of Physical Chemistry in Ithaca, N.Y.:*
The Journal. Vol. II, No. 7. 8. 1898. 4°.

*Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:*
Denkschriften. Bd. VI, Lfg. 1; Bd. VII, Lfg. 1. Text und Tafeln.
„ VIII, „ 4. „ „
1897/98. fol.

*Verein für Thüringische Geschichte und Alterthumskunde in Jena:*
Zeitschrift. N. F. Bd. X, Heft 3 u. 4; Bd. XI, Heft 1. 1897/98. 8°.
Regesta diplomatica historiae Thuringiae. Bd. II, Theil 1 (1152—1210). 1898. 4°.

*Historischer Verein in Ingolstadt:*
Sammelblatt. XXII. Heft. 1897. 8°.

*Universität Jurjew (Dorpat):*
Schriften der Universität aus dem Jahre 1897/98 in 8°.
Acta. Bd. VI, No. 1 u. 2. 1898. 8°.

*Grossherzoglich technische Hochschule in Karlsruhe:*
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 8°.

*Universität Kasan:*
Utschenia Sapiski. Bd. 65, No. 5—11. 1898. 8°.

*Verein für hessische Geschichte und Landeskunde in Kassel:*
Zeitschrift. N. F. Band 33 und neue Folge Suppl.-Heft 12. 1898. 8°.
Mittheilungen. Jahrgang 1897. 1898. 8°.

*Verein für Naturkunde in Kassel:*
Abhandlungen und Bericht XLIII. 1898. 8°.

*Université Impériale in Kharkow:*
P. J. Kul, Die Provinzialversammlungen bei den Römern. 1898. 8.
Annales 1898. Vol. 4. 8°.
M. Tikhomandritzky, Cours de la théorie des probabilités. 1898. 8°.

*Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte in Kiel:*
Zeitschrift. Bd. 27. 1898. 8.

*Kommission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel:*
Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. N. F. Bd. III, Abtheilung Kiel. 1898. 4°.

*K. Universität in Kiel:*
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4° u. 8°.

*Universität in Kiew:*
Iswestija. Band 38, No. 6—10. 1898. 8°.

*Geschichtsverein für Kärnten in Klagenfurt:*

Jahresbericht für 1897. 1898. 8⁰.
Carinthia I. 88. Jahrgang. No. 1—6. 1898. 8⁰.

*Naturhistorisches Landesmuseum in Klagenfurt:*

Festschrift zum 50jährigen Bestehen. 1898. 4⁰.

*Universität in Königsberg:*

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ und 8⁰.

*K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:*

Oversigt. 1898. No. 4. 5. 8⁰.
Mémoires. a) Classe des lettres, 6ᵉ série, tom. IV, No. 5;
b) Classe des sciences, 5ᵉ série, tom. IV, No. 3. 1898. 4⁰.

*Gesellschaft für nordische Alterthumskunde in Kopenhagen:*

Aarböger. II. Raekke, Bd. XIII, 2. 3. 1898. 8⁰.

*Akademie der Wissenschaften in Krakau:*

Anzeiger. 1898, Juni, Juli, Oktober, November. 8⁰.
Rozprawy. filolog. Ser. II, tom. 11. 12; histor.-filoz. Ser. II, tom. 10. 1898. 8⁰.
Collectanea ex Archivio collegii iuridici. Tom. V. 1897. 8⁰.

*Société mathématique de Kharkow:*

Communications. 2ᵉ Série, Vol. VI, No. 4. 1898. 8⁰.

*Verein für Naturkunde in Krefeld:*

III. Jahresbericht für 1896—98. 1898. 8⁰.

*Historischer Verein in Landshut:*

Verhandlungen. 34. Band. 1898. 8⁰.

*Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:*

Bulletin. IV. Série, Vol. 34, No. 128. 129. 1898. 8⁰.

*Kansas University in Lawrence, Kansas:*

The Kansas University Quarterly. Vol. VII, No. 2, Series A. Vol. VII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

*Maatschappij van Nederlandsche Letterkunde in Leiden:*

Tijdschrift. N. Serie. Deel XVII, afl. 3. 4. 1898. 8⁰.
Handelingen en Mededeelingen, Jaar 1897—98. 1898. 8⁰.
Levensberichten 1897—98. 1898. 8⁰.

*Sternwarte in Leiden:*

Annalen. Bd. VII. Haag 1897. 4⁰.

*Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:*

Archiv. II. Reihe. Theil XVI, 3. 4. 1898. 8⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:*

Abhandlungen der philol.-hist. Classe. Bd. XVIII, No. 2. 3 und Sachregister 1846—95. 1898. 4⁰.
Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XXIV, No. 4. 5. 1898. 4⁰.
Berichte der philol.-hist. Classe. Band 50, Heft 3. 4. 1898. 8⁰.
Berichte der mathem.-physik. Classe. Band 50, Heft 3—5. 1898. 8⁰.

*Journal für praktische Chemie in Leipzig:*

Journal. N. F. Bd. 57, Heft 10—12; Bd. 58, Heft 1—10. 1898. 8⁰.

*Geschichts- und Alterthumsverein in Leisnig:*

Mittheilungen. 11. Heft. 1898. 8⁰.

*Société des Sciences in Lille:*

Mémoires. Vᵉ Série, fasc. 1—6. 1895/96. 8⁰.

*University of Nebraska in Lincoln:*

Bulletin. Vol. X, Article 1—5. 1897/98. 8⁰.

*Museum Francisco-Carolinum in Linz:*

55. und 56. Jahresbericht. 1897/98. 8⁰.

*Sociedade de geographia in Lissabon:*

Boletin. 16. Serie, No. 9. 1897. 8⁰.

*Literary and philosophical Society in Liverpool:*

Proceedings. No. LII. London 1898. 8⁰.

*Zeitschrift „La Cellule" in Loewen:*

La Cellule. Tome XV, fasc. 1. 2. 1898. 4⁰.

*Institution of civil Engineers in London:*

List of Members. 1. July 1898. 8⁰.

*The English Historical Review in London:*

Historical Review. Vol. XIII, No. 51. 52. July, Oct. 1898. 8⁰.

*Royal Society in London:*

Proceedings. Vol. 63, No. 399—401. Vol. 64, No. 402—405. 1898. 8⁰.
Philosophical Transactions. Series A, Vol. 189. 190; Series B, Vol. 188. 189. 1897/98. 4⁰.
List of Members. 30th Nov. 1897. 4⁰.

*R. Astronomical Society in London:*

Monthly Notices. Vol. 58, No. 8. 9 und Appendix Vol. 59, No. 1. 1898. 8⁰.

*Chemical Society in London:*

Journal. No. 428. 429 and Supplementary Number. No. 430—433.
Proceedings. Session 1898/99. No. 198—200. 8⁰.

*Linnean Society in London:*

Proceedings. Nov. 1896 — June 1897. 1897. 8⁰.
The Journal. a) Botany. Vol. 33, No. 229—233.
b) Zoology. Vol. 26, No. 168—171. 1897/98. 8⁰.
The Transactions. a) 2. Series. Botany. Vol. V, 7. 8.
b) 2. Series. Zoology. Vol. VII, 4. 1897/98. 4⁰.
List 1897/98. 1897. 8⁰.

*Medical and chirurgical Society in London:*

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 81. 1898. 8⁰.

*R. Microscopical Society in London:*

Journal. 1898. Part. 4—6. 8⁰.

*Zoological Society in London:*

Proceedings. 1898. Part II. III. 8⁰.
Transactions. Vol. XIV, part 7. 8. Vol. XV, part 1. 1898. 4⁰.
A List of the Fellows. 1898. 8⁰.

*Zeitschrift „Nature" in London:*

Nature. No. 1496—1522. 1898. 4⁰.

*Academy of Science in St. Louis:*
Transactions. Vol. VII, No. 17—20; Vol. VIII, No. 1—7. 1897/98. 8⁰.

*Reale Accademia di scienze in Lucca:*
Atti. Vol. 29. 1898. 8⁰.

*Historischer Verein der fünf Orte in Luzern:*
Der Geschichtsfreund. Bd. 53. Stans. 1898. 8⁰.

*Société Linnéenne in Lyon:*
Annales. N. S. Tome 44, Année 1897. 1898. 8⁰.
Saint-Lager, Grandeur et décadence du Nard. Paris 1897. 8⁰.
Saint-Lager, Notice sur Alexis Jordan. Paris 1898. 8⁰.
Meyran Octave, Les noms de genre. Paris 1898. 8⁰.

*Université in Lyon:*
Annales fasc. 35. 36. Paris 1898. 8⁰.

*Wisconsin Academy of Sciences in Madison:*
Transactions. Vol. XI. 1898. 8⁰.

*Government Museum in Madras:*
Bulletin. Vol. 2, No. 2. 1898. 8⁰.

*Government Astronomer in Madras:*
Report on the Madras Observatory for 1897/98. 1898. 8⁰.

*R. Academia de la historia in Madrid:*
Boletin. Tomo 33, cuad. 1—3. 5. 6. 1898. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Magdeburg:*
Jahresbericht und Abhandlungen 1896—98. 1898. 8⁰.

*R. Istituto Lombardo di scienze in Mailand:*
Rendiconti. Ser. II, Vol. 30. 1897. 8⁰.
Memorie. a) Classe di lettere. Vol. XX, 6.
b) Classe di science matematiche. Vol. XVIII, 4. 5. 1897/98. 4⁰.

*Società Italiana di scienze naturali in Mailand:*
Memorie. Vol. VI, fasc. 2. 1898. 4⁰.
Atti. Vol. 37, fasc. 3. 1898. 8⁰.

*Società Storica Lombarda in Mailand:*
Archivio Storico Lombardo. Ser. III. Anno 25, fasc. 19. 1898. 8⁰.

*Literary and philosophical Society in Manchester:*
Memoirs and Proceedings. Vol. 42, part 3. 5. 1898. 8⁰.

*Universität in Marburg:*
Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

*Faculté des sciences in Marseille:*
Annales de l'Institut botanico-géologique colonial. Vol. 3. 4. 1897/98. 8⁰.

*Verein für Geschichte der Stadt Meissen in Meissen:*
Mittheilungen. Bd. V, 1. 1898. 8⁰.

*Royal Society of Victoria in Melbourne:*
Proceedings. Vol. X, part 2. 1898. 8⁰.

*Scientific Association in Meriden, Conn.:*
Transactions. Vol. VIII. 1898. 8⁰.

*Rivista di Storia Antica in Messina:*
Rivista. Anno 3, fasc. 2—4. 1898. 8⁰.

*Gesellschaft für lothringische Geschichte in Metz:*

Jahrbuch. 9. Jahrgang. 1897. 4⁰.

*Observatorio meteorológico-magnético central in México:*

Boletin mensual. 1898 Marzo—Agosto. 4⁰.

*Secretaria de formento etc. in Mexico:*

Boletin del Instituto geológico de Mexico. No. 10. 1898. 4⁰.

*Sociedad cientifica „Antonio Alzate" in Mexico:*

Memorias. Tomo XI, No. 5—12. 1898. 8⁰.

*Società dei naturalisti in Modena:*

Atti. Ser. III, Vol. XV, fasc. 1. 2; Vol. XVI, fasc. 1. 2. 1898. 8⁰.

*Internationales Tausch-Bureau der Republik Uruguay in Montevideo:*

Anuario hidrográfico del Rio de la Plata. 1891. 8⁰.

*Museo nacional in Montevideo:*

Anales. Tom. 3, fasc. 9. 10. 1898. 4⁰.

*Numismatic and Antiquarian Society in Montreal:*

The Canadian Antiquarian and Numismatic Journal. Series III. Vol. I, No. 3. 1898. 8⁰.

*Oeffentliches Rumiantzoff'sches Museum in Moskau:*

Ottschet 1897. 1898. 8⁰.

*Société Impériale des Naturalistes in Moskau:*

Bulletin. Année 1898, No. 1. 1898. 8⁰.

*Mathematische Gesellschaft in Moskau Universität Moskau:*

Sbornik. Bd. XX, 2. 1898. 8⁰.
Utschenia-Sapiski. Bd. XIII. XIV. 1896—98. 8⁰.

*Statistisches Amt der Stadt München:*

Münchener Jahresübersichten für 1897. 1898. 4⁰.
Gewerbezählung v. 14. Juni 1895. 1898. 4⁰.

*Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München:*

Correspondenzblatt. 29. Jahrg., No. 7—10. München. 1898. 4⁰.
Beiträge zur Anthropologie Braunschweigs. Festschrift. Braunschweig. 1898. 8⁰.

*Generaldirektion der k. b. Posten und Telegraphen in München:*

Verzeichniss der in und ausserhalb Bayern erscheinenden Zeitungen pro 1899 und Nachträge zu 1898. fol.

*K. bayer. technische Hochschule in München:*

Bericht über das Studienjahr 1897/98. 1898. 4⁰.
Programm für 1898/99. 1898. 8⁰.

*Metropolitan-Kapitel München-Freising in München:*

Amtsblatt der Erzdiözese München und Freising. 1898, No. 19—31. 8⁰.

*Universität in München:*

Amtliches Verzeichniss des Personals. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.
Verzeichniss der Vorlesungen im Winter-Semester 1898/99. 1898. 4⁰.
Rede beim Antritt des Rektors. Nov. 1898. 4⁰.

*Historischer Verein in München:*

Monatsschrift. 1898, No. 11. 12. 8⁰.
Monatsschrift. 1898, No. 5—8. 8⁰.

*Verlag der Hochschul-Nachrichten in München:*

Hochschul-Nachrichten. 1898, No. 94—97. 4⁰.

*K. bayer. meteorologische Zentralstation in München:*

Uebersicht über die Witterungsverhältnisse. 1898, Juni—Oktober. fol.

*Westphäl. Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst in Münster:*

26. Jahresbericht für 1897/98. 1898. 8⁰.

*Académie de Stanislas in Nancy:*

Mémoires. 5e Série. Tome 15. 1897. 1898. 8⁰.

*Société des sciences in Nancy:*

Bulletin. Série II. Tome XV, fasc. 32. Paris 1897. 8⁰.

*Accademia delle scienze fisiche e matematiche in Neapel:*

Rendiconto. Serie 3. Vol. 4, fasc. 6—11. 1898. 8⁰.

*Zoologische Station in Neapel:*

Mittheilungen. Band XIII, 3. Berlin 1898. 8⁰.

*Historischer Verein in Neuburg a/D.:*

Neuburger Kollektaneen-Blatt. 61. Jahrg. 1897. 8⁰.

*Académie in Neuchatel:*

Programme des cours sem. d'hiver 1898/99. 1898. 8⁰.

*North of England Institute of Engineers in New-Castle (upon-Tyne):*

Transactions. Vol. 47, part 4—7; Vol. 48, part. 1. 1898. 8⁰.
Annual Report for the year 1897/98. 1898. 8⁰.

*The American Journal of Science in New-Haven:*

Journal. Vol. 6, No. 32—36. 1898. 8⁰.

*Observatory of the Yale University in New-Haven:*

Report for the year 1897/98. 1898. 8⁰.

*American Oriental Society in New-Haven:*

Journal. Vol. XIX, 2. 1898. 8⁰.

*Academy of Sciences in New-York:*

Transactions. Vol. 16. 1898. 8⁰.
Annals. Vol. IX (Index). Vol. X, No. 1—12; Vol. XI, part. 2. 1898. 8⁰.

*American Museum of Natural History in New-York:*

Bulletin. Vol. IX, part. 1. 1898. 8⁰.
Annual Report for the year 1897. 1898. 8⁰.

*American Geographical Society in New-York:*

Bulletin. Vol. 30, No. 4. 1898. 8⁰.

*State Museum in New-York:*

Bulletin. Vol. 30, No. 3. 4. 1898. 8⁰.

*Nederlandsche botanische Vereeniging in Nijmegen:*

Prodromus Florae Batavae. Vol. II, pars 2. 1898. 8⁰.
Nederlandsch kruidkundig Archief. IIIe Serie. Deel I, stuk 3. 1898. 8⁰.

*Archaeological Institute of America in Norwood, Mass:*

American Journal of Archaeology. Vol. 1, No. 6. 1897. 8⁰.

*Naturhistorische Gesellschaft in Nürnberg:*

Abhandlungen. Bd. XI. 1898. 8⁰.

*Geological Survey of Canada in Ottawa:*

Annual Report. New Series. Vol. IX. 1896. 1898. 8⁰.

*Royal Society of Canada in Ottawa:*

Proceedings and Transactions. II. Series. Vol. 3. 1898. 8°.

*Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:*

Bullettino. Tom. VI, 3. 1898. 8°.

*Circolo matematico in Palermo:*

Annuario. 1898. 8°.
Rendiconti. Tomo XII, 5. 6. 1898. 8°.

*Collegio degli Ingegneri in Palermo:*

Atti. Anno 1898, Maggio—Agosto. 4°.

*Académie de médecine in Paris:*

Rapports annuels de la Commission permanente de l'hygiène de l'enfance pour l'année 1897. No. 37 et 38. 1897. 8°.
Rapport sur les vaccinations pendant l'année 1896. Melun 1897. 8°.
Bulletin. 1898, No. 28—51. 8°.

*Académie des sciences in Paris:*

Souvenirs de Marine. Par le Vice-Amiral Pâris. 5 vols. fol. 1882—92.
Comptes rendus. Tome 127, No. 2—26. 1898. 4°.
Oeuvres de Laplace. 1895—98. 4°.

*École polytechnique in Paris:*

Journal. II. Série. 3° cahier. 1897. 4°.

*Moniteur Scientifique in Paris:*

Moniteur. Livr. 680—684 (Août-Décembre 1898). 4°.

*Musée Guimet in Paris:*

Annales. Bibliothèque d'études. Tome 6. 7. 1897/98. 8°.
Revue de l'histoire des réligions. Tome 36, No. 3; Tome 37, No. 1. 1897/98. 8°.

*Muséum d'histoire naturelle in Paris:*

Bulletin. Année 1898. No. 1—5. 8°.
Nouvelles Archives. III. Série. Tome 9, fasc. 2. 1897. 4°.

*Société d'anthropologie in Paris:*

Bulletins. IV. Série. Tome VIII, fasc. 5. 6; Tome IX, fasc. 1. 1897/98. 8°.

*Société de géographie in Paris:*

Comptes rendus. 1898. No. 6—8. 8°.
Bulletin. VII. Série. Tome XIX, trim. 2. 1898. 8°.

*Société mathématique de France in Paris:*

Bulletin. Tome 26, No. 4—9. 1898. 8°.

*Société d'encouragement pour l'industrie nationale in Paris:*

Bulletin. 5. Série. Tome 3, No. 8. 1898. 4°.

*Société zoologique de France in Paris:*

Bulletin. Tome 22. 1897. 8°.
Mémoires. Tome X. 1897. 8°.

*Académie Impériale des sciences in St. Petersburg:*

G. A. Esow, Beziehungen Peters des Grossen zu dem armenischen Volke. 1898. 4°.
Byzantina Chronika. Tom. IV, 3 u. 4; Tom. V, 1 u. 2. 1897. 4°.

Mémoires. a) Classe historico-philologique, Vol. I, No. 7; II, No. 1. 2; III, No. 1.
b) Classe physico-mathématique. Vol. 5, No. 6—13; Vol. 6, No. 1—8. 10. 1897—98. 4⁰.
Mémoires. VIIᵉ Série. Tom. 42, No. 13. 1895. 4⁰.
Bulletin. Vᵉ Série. Tome 7, No. 3—5; Tom. 8, No. 1—4.
Annuaire du Musée zoologique. No. 1. 1898. 8⁰.

*Comité géologique in St. Petersburg:*

Bulletins. Vol. XVI Supplément et Vol. XVII, No. 1—5. 1897/98. 8⁰.
Mémoires. Vol. XVI, No. 1. 1898. 4⁰.

*Botanischer Garten in St. Petersburg:*

Acta horti Petropolitani. Tom. XIV, 2. 1898. 8⁰.

*Kaiserl. mineralogische Gesellschaft in St. Petersburg:*

Verhandlungen. II. Serie. Bd. 35, Lfg. 2. 1898. 8⁰.

*Physikalisch-chemische Gesellschaft an der kaiserl. Universität in St. Petersburg:*

Schurnal. Tom. XXX, Heft 4—7. 1898. 8⁰.

*Section géologique du cabinet de Sa Majesté in St. Petersburg:*

Travaux. Vol. II, Livr. 3; Vol. III, Livr. 1. 1898. 8⁰.

*Kaiserliche Universität in St. Petersburg:*

Obosrenije 1898/99. 1898. 8⁰.
Schriften aus d. J. 1897/98 in 8⁰.

*Academy of natural Sciences in Philadelphia:*

Proceedings. 1898, part I. II. 8⁰.

*Historical Society of Pennsylvania in Philadelphia:*

The Pennsylvania Magazine of History. Vol. 21, No. 4; Vol. 22, No. 1—3. 1898. 8⁰.

*Alumni Association of the College of Pharmacy in Philadelphia:*

Alumni Report. Vol. 34, No. 7. 11. 1898. 8⁰.

*American Philosophical Society in Philadelphia:*

Proceedings. Vol. 37, No. 157. 1898. 8⁰.
Transactions. New Series. Vol. XIX, part 2. 3. 1898. 4⁰.

*Società Toscana di scienze naturali in Pisa:*

Atti. Processi verbali. Vol. XII, p. 11—55. 1898. 4⁰.

*Historische Gesellschaft in Posen:*

Zeitschrift. Jahrg. 13. Heft 1. 2. 8⁰.

*K. geodätisches Institut in Potsdam:*

Jahresbericht 1897/98. 1898. 8⁰.

*Böhmische Kaiser Franz-Joseph-Akademie in Prag:*

Rozprawy. Třida I, Ročník VI; Třida II, Ročník VI, 1. 2; Třida III, Ročník VI. 1897. 8⁰.
Historický Archiv. Číslo 10—12. 1897/98. 8⁰.
Věstník. Ročník VI, No. 1—9. 1897. 8⁰.
Bulletin international IV. a) Sciences mathématiques No. 1. 2.
b) Médicine. 1897. 8⁰.
Almanach. Ročnik VIII. 1898. 8⁰.
Spisy Jana Amosa Komenského. Číslo I—III. 1897. 8⁰.
Archiv pro lexikografii. Číslo II. 1897. 8⁰.

Sbírka promenův, ku poznání literárního života. Skupina I. Rada 1. 1897. 8⁰.
Gustav Gruss, Základové theoretické astronomie. 1897. 8⁰.
Žikmund Winter, Děje vysokých škol pražských. 1897. 8⁰.
Adolf Petr Zaturecký, Slovenská přísloví, pořekadla a úsloví. 1897. 8⁰.
V. Flajšhans, Knihy České. 1897. 8⁰.
Emil Ott, Soustavný úvod ve studium nového řízení soudniho. Dil I. 1897. 8⁰.

*Mathematisch-physikalische Gesellschaft in Prag:*

Časopis. Vol 28, No. 1. 1898. 8⁰.

*Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag:*

Das Gründungsjahr der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag. 1898. 4⁰.

*Deutsche Carl-Ferdinands-Universität in Prag:*

Personalstand 1898/99. 1898. 8⁰.
Ordnung der Vorlesungen. Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.

*Verein für Geschichte der Deutschen in Böhmen in Prag:*

Mittheilungen. 36. Jahrg., No. 1—4. 1897/98. 8⁰.

*Zeitschrift „Krok“ in Prag:*

„Krok“. Bd. XII, No. 4. 5. 1898. 8⁰.

*Verein böhmischer Mathematiker in Prag:*

Sbornik. Číslo I. 1898. 8⁰.

*Naturwissenschaftlicher Verein in Regensburg:*

Berichte. VI. Heft, 1896—97. 1898. 8⁰.

*Naturforscher-Verein in Riga:*

Correspondenzblatt. No. XL und XLI. 1898. 8⁰.

*Museu nacional in Rio de Janeiro:*

Revista. Vol. I. 1896. 4⁰.

*Observatorio in Rio de Janeiro:*

Annuario 1898. 1897. 8⁰.

*R. Accademia dei Lincei in Rom:*

Atti. Ser. V. Classe di scienze fisiche. Rendiconti. Vol. VII, semestre 1, fasc. 12; semestre 2, fasc. 1—11. 1898. 4⁰.
Atti. Ser. V. Classe di scienze morali. Vol. V, parte 1. Memorie 1898; Vol. VI, parte 2. Notizie degli scavi 1898. Aprile, Maggio, Giugno, Luglio. 1898. 4⁰.
Rendiconti. Classe di scienze morali. Serie V. Vol. VII, fasc. 5. 6. 1898. 8⁰.
Rendiconti dell' adunanza solenne del 12. Giugno 1897. 1898. 4⁰.

*R. Comitato geologico d'Italia in Rom:*

Bollettino. Anno 1898, No. 1. 2. 1898. 8⁰.

*Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:*

Atti. Anno 51, Sessione 4—7. 1898. 4⁰.

*Kais. deutsches archäologisches Institut (röm. Abth.) in Rom:*

Mittheilungen. Band XIII, 2. 3. 1898. 8⁰.

*R. Ministero della Istruzione pubblica in Rom:*

Le opere di Galileo Galilei. Vol. VIII. Firenze 1898. 4°.
Cataloghi dei Codici orientali di alcune biblioteche d'Italia. Fasc. VI. Firenze 1897. 8°.

*Società Italiana delle scienze in Rom:*

Memorie di matematica e di fisica. Serie III. Tomo XI. 1898. 4°.

*R. Società Romana di storia patria in Rom:*

Archivio. Vol. XXI, 1. 2. 1898. 8°.

*Universität Rostock:*

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4° u. 8°.

*Académie des sciences in Rouen:*

Précis analytique des travaux. Année 1896/97. 1898. 8°.

*R. Accademia di scienze degli Agiati in Rovereto:*

Atti. Serie III. Vol. 4, fasc. 1. 2. 1898. 8°.

*The American Association for the advancement of science in Salem:*

Proceedings for the 46th meeting, held at Detroit, Mich. 1898. 8°.
Lth Anniversary-Preliminary Announcement of the Boston Meeting to be held Aug. 22d to 27th. Boston 1898. 8°.

*Gesellschaft für Salzburger Landeskunde in Salzburg:*

Mittheilungen. 38. Vereinsjahr. 1898. 8°.

*K. K. Staatsgymnasium in Salzburg:*

Programm für das Jahr 1897/98. 1898. 8°.

*Instituto y Observatorio de marina de San Fernando (Cadiz):*

Anales. Seccion 2a año 1896. 1897. fol.
Almanaque naútico para el año 1900. 1898. 4°.

*Commissão geographica e geologica in Sao Paulo:*

Boletin. No. 10—14. 1895—97. 8°.

*China Branch of the R. Asiatic-Society in Shanghai:*

Journal. N. Serie. Vol. 28. 1893/94. 1898. 8°.

*K. K. archäologisches Museum in Spalato:*

Bullettino di Archeologia. Anno XXI, No. 4—11. 1898. 8°.

*Historischer Verein der Pfalz in Speyer:*

Mittheilungen. XXII. 1898. 8°.

*K. Akademie der Wissenschaften in Stockholm:*

Öfversigt (Bulletin). Vol. 54 (1897). 1898. 8°.
Handlingar. N. F. Band 30. 1897/98. 4°.
Bihang (Collection de memoires in 8°) Vol. 23 (1897/98). Section 1—4. 1898. 8°.
Astronomiska Jakttagelser. Bd. VI, No. 3. 1898. 4°.

*Geologiska Förening in Stockholm:*

Förhandlingar. Band 20, Heft 5. 6. 1898. 8°.

*Nordiska Museet in Stockholm:*

Ringlekar på Skansen. 1898. 8°.
Bilder från Skansen door Artur Hazelius. Heft 1—4. 1896—98. fol.

*Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften in Strassburg:*

Monatsbericht. No. 5—8. 1898. 8⁰.

*Kais. Universität Strassburg:*

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

*Württembergische Kommission für Landesgeschichte in Stuttgart:*

Vierteljahreshefte für Landesgeschichte. N. F. Jahrg. VII, Heft 1—4. 1898. 8⁰.

*Royal Society of New-South-Wales in Sydney:*

Abstract of Proceedings. August—October. 1898. 8⁰.
Journal and Proceedings. Vol. 31. 1897. 8⁰.

*Department of Mines and Agriculture of New-South-Wales in Sydney:*

Annual Report for the year 1897. 1898. fol.
Mineral Resources, No. 3. 4. 1898. 8⁰.
Memoirs Palaeontology. No. VI. 1898. fol.

*Observatorio astronómico nacional in Tacubaya:*

Boletín. Tomo 2, No. 4. Mexico 1898. 4⁰.

*Physikalisches Observatorium in Tiflis:*

Beobachtungen im Jahr 1896. 1898. fol.

*Deutsche Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens in Tokyo:*

Die Sprichwörter der japanischen Sprache von P. Ehmann. Th. III, IV. 1898. 8⁰.
Neuerworbene Bücher. 1898. 8⁰.

*Kaiserliche Universität Tokyo (Japan):*

Mittheilungen aus der medicinischen Facultät. Bd. IV, No. 1. 2. 1898. 4⁰.

*Canadian Institute in Toronto:*

Proceedings. Vol. I, parts 6. 1898. 8⁰.
Transactions. Supplement to No. 9. Vol. 5, part 1. 1898. 8⁰.

*University in Toronto:*

Studies. a) Psychological Series No. 1.
b) Biological Series No. 1. 1898. 8⁰.
Studies. History, first Series Vol. 2. 1898. 4⁰.

*Faculté des sciences in Toulouse:*

Annales. Tome 12, fasc. 3. 4. Paris 1898. 4⁰.

*Biblioteca e Museo comunale in Trient:*

Archivio Trentino. Anno XVI, 1. 1898. 8⁰.

*Società adriatica di scienze naturali in Triest:*

Bollettino. Vol. 16—18. 1895—98. 8⁰.

*Universität Tübingen:*

Schriften aus dem Jahre 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

*Tufts College Library in Tufts Coll. Mass.:*

Studies. No. 5. 1898. 4⁰.

*R. Accademia delle scienze in Turin:*

Atti. Vol. 33, disp. 14. 15. 1898. 8⁰.
Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1897. 1898. 8⁰.

*K. Gesellschaft der Wissenschaften in Upsala:*

Nova Acta. Ser. III. Vol. 17, fasc. 2. 1898. 4⁰.

*Institut Royal Météorologique des Pays-Bas in Utrecht:*

Nederlandsch Meteorologisch Jaarboek voor 1896. 1898. 4⁰.

*Physiologisch Laboratorium der Hoogeschool in Utrecht:*

Onderzoekingen. Register zu den Onderzoekingen 1848—1897. 1898. 8⁰.

*Ateneo Veneto in Venedig:*

L'Ateneo Veneto. Anno XX. Vol. I, fasc. 2. 3; Vol. II, fasc. 1—3.
Anno XXI. Vol. I, fasc. 1. 2. 1897/98. 8⁰.

*R. Istituto Veneto di scienze in Venedig:*

Atti. Tomo 55, disp. 3—10, Tomo 56, disp. 1—7. 1896—98. 8⁰.
Memorie. Vol. 26, No. 1. 2. 1897. 4⁰.
Concorsi a premio. 1898. 8⁰.

*Redaction der Prace matematyczno-fizyczne in Warschau:*

Prace matemat.-fizyczne. Tom. IX. 1898. 4⁰.

*American Historical Association in Washington:*

Annual Report 1896. Vol. I. II. 1897. 8⁰.

*Bureau of Education in Washington:*

Annual Report of the Commissioner of Education for 1895/96 Vol. II, 1896/97 Vol. I. 1897/98. 8⁰.

*U. S. Department of Agriculture in Washington:*

Report. 1898. 8⁰.
Bulletin of the Division of biological Survey. No. 9—11. 1898. 8⁰.
Bulletin. Division of Ornithology. No. 50. 1898. 8⁰.

*Smithsonian Institution in Washington:*

Annual Report for the year ending Sune 30, 1895. 1897. 8⁰.
Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1090, Vol. 40; No. 1125. 1126. 1898. 8⁰.

*U. S. National-Museum in Washington:*

Proceedings. Vol. IX. 1897. 8⁰.

*United States Geological Survey in Washington:*

Bulletins. No. 88. 89 u. 149. 1897/98. 8⁰.
Monographs. No. XXX. 1898. 4⁰.

*Harzverein für Geschichte in Wernigerode:*

Zeitschrift. Jahrg. 31. 1898. 8⁰.

*Kaiserliche Akademie der Wissenschaften in Wien:*

Sitzungsberichte. Philos.-hist. Classe. Bd. 136. 137. 1897/98. 8⁰.
Mathem.-naturwissensch. Classe. 1897/98. 8⁰.
Abth. I. Bd. 106, Heft 1—10; Bd. 107, Heft 1—5.
„ IIa. Bd. 106, Heft 1—10; Bd. 107, Heft 1. 2.
„ IIb. Bd. 106, Heft 1—10.
„ III. Bd. 106, Heft 1—10; Bd. 107, Heft 1—3.
Register zu Bd. 101—105.

Denkschriften. Philos.-hist. Classe. Bd. 45. 1897. 4⁰.
„ Mathem.-naturwissenschaftl. Classe. Bd. 64. 1897. 4⁰.
Archiv für österreichische Geschichte. Bd. 84, Hälfte I u. II und Register zu Bd. 51—80. 1897/98. 8⁰.
Almanach. 47. Jahrg. 1897. 8⁰.

*K. K. geologische Reichsanstalt in Wien:*

Jahrbuch. Band 47, Heft 3. 4. Band 48, Heft 1. 1898. 4⁰.
Verhandlungen. No. 9—13. 1898. 4⁰.

*K. K. Centralanstalt für Meteorologie in Wien:*

Jahrbücher. Bd. 39, No. 42. 1898. 4⁰.

*K. K. Gesellschaft der Aerzte in Wien:*

Wiener klinische Wochenschrift. 1898, No. 27—50. 4⁰.

*Anthropologische Gesellschaft in Wien:*

Mittheilungen. Band XXVIII, Heft 4. 1898. 4⁰.

*Zoologisch-botanische Gesellschaft in Wien:*

Verhandlungen. Band 48, Heft 6—9. 1898. 8⁰.

*K. K. militär-geographisches Institut in Wien:*

Astronomisch-geodätische Arbeiten. Band XII. 1898. 4⁰.

*K. K. naturhistorisches Hofmuseum in Wien:*

Annalen. Band XIII, No 1. 1898. 4⁰.

*K. K. Universität in Wien:*

Bericht über die volksthümlichen Universitätsvorträge im Jahre 1897/98. 1898. 8⁰.
Oeffentliche Vorlesungen im Sommer-Semester 1898 und im Winter-Semester 1898/99. 1898. 8⁰.
Uebersicht der akademischen Behörden für das Studienjahr 1898/99. 1898. 8⁰.
Die feierliche Inauguration des Rektors am 24. Oktober 1898. 1898. 8⁰.

*Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien:*

Schriften. 38. Bd. 1897/98. 1898. 8⁰.

*Verein für Nassauische Alterthumskunde etc. in Wiesbaden:*

Annalen. 29. Band, Heft 2. 1898. 4⁰.
Mittheilungen. No. 1—3. 1898/99. 4⁰.
I. Jahresbericht der historischen Kommission für Nassau. 1898. 8⁰.

*Nassauischer Verein für Naturkunde in Wiesbaden:*

Jahrbücher. Jahrg. 51. 1898. 8⁰.

*Oriental Nobility Institute in Woking:*

Vidyodaya. Vol. 27, No. 7—10. 1898. 8⁰.

*Herzogliche Bibliothek in Wolfenbüttel:*

Die Handschriften der herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel. Bd. VI. 1898. 8⁰.

*Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg:*

Verhandlungen. N. F. Bd. XXXI, No. 9—11; Bd. XXXII, No. 1—3. 1898. 8⁰.

Sitzungsberichte. Jahrg. 1898, No. 1—3. 8⁰.

*Schweizerische geodätische Kommission in Zürich:*

Das Schweizerische Dreiecknetz. Bd. VIII. 1898. 4⁰.

*Naturforschende Gesellschaft in Zürich:*

Vierteljahrsschrift. 43. Jahrg. 1898, Heft 2. 3. 1898. 8⁰.

*Universität in Zürich:*

Schriften a. d. J. 1897/98 in 4⁰ u. 8⁰.

---

**Von folgenden Privatpersonen:**

*Prinz Albert I. von Monaco:*

Resultats des campagnes scientifiques. fasc. XII. 1898. 4⁰.

*F. Bashforth in Minting Vicarage, Horncastle:*

Replica di Krupp alla protesta de Signor Basforth. Cambridge 1898. 8⁰.

*Verlagsbuchhandlung Hermann Böhlau's Nachfolger in Weimar:*

Zeitschrift der Savigny-Stiftung. Bd. XIX germanische und romanische Abtheilung. Weimar 1898. 8⁰.

*H. P. Cushing in Cleveland, Ohio:*

Report ou the Geology of Clienton Courty. Washington 1895. 4⁰.

*Martin Ficker in Leipzig:*

Ueber Lebensdauer und Absterben von pathogenen Keimen. Leipzig 1898. 8⁰.

*Johann Friedrich in München:*

Ignaz von Döllinger. Sein Leben. Bd. I. München 1899. 8⁰.

*Albert Gaudry in Paris:*

Notize sur les Travaux scientifiques de Victor Lemoine. Paris 1898. 8⁰.

*Karl Gegenbaur in Heidelberg:*

Vergleichende Anatomie der Wirbelthiere. Bd. I. Leipzig 1898. 8⁰.

*D. Grecescu in Bucarest:*

Conspectul florei Romaniei. Bucarest 1898. 8⁰.

*Albert von Kölliker in Würzburg:*

Ueber die Entwicklung der Graaf'schen Follikal. Würzburg 1898. 8⁰.

*Karl Krumbacher in München:*

Byzantinische Zeitschrift. Bd. VII, 3. 4. Leipzig 1898. 8⁰.
Byzantinisches Archiv. Heft 1. Leipzig 1898. 8⁰.

*J. Marquart in Tübingen:*

Die Chronologie der alttürkischen Inschriften. Leipzig 1898. 8⁰.

*B. A. Mystakides in Constantinopel:*

Notes sur Martin Crusius. Paris 1898. 8⁰.

*Gabriel Monod in Versailles:*

Revue historique. Tom. 68, No. I, Sept., Okt.; No. II, Nov., Dez., 1898. Paris 1898. 8⁰.

*Alois Panzer in München:*

Zur electrischen Trambahnfrage. München 1898. 4⁰.

*Oswald J. Reichel in Lympstone, Exeter:*

The „Domesday" Hundreds of Devon. No. II—VIII. 1896—98. 8⁰.

*Dietrich Reimers Verlagshandlung in Berlin:*

Zeitschrift für afrikanische und oceanische Sprachen. Jahrg. IV, Heft 1 und 2. Berlin 1898. 4⁰.

*Joseph Sandalgian in Rom:*

L'idiome des inscriptions cunéiforma urartiques Rome. 1898. 8⁰.

*Seitz und Schauer in München:*

Deutsche Praxis. Bd. I, No. 1—8, 13—17. München 1898. 8⁰.
Medizinische Neuigkeiten. No. 41—43, 45—50. München 1898. 4⁰.

*Gustav Schmoller in Berlin:*

Umrisse und Untersuchungen zur Verfassungs-, Verwaltungs- und Wirthschaftsgeschichte. Leipzig 1898. 8⁰.

*S. Schwendener in Berlin:*

Gesammelte botanische Mittheilungen. Bd. 1. 2. Berlin 1898. 8⁰.

*B. G. Teubner'sche Verlagsbuchhandlung in Leipzig:*

Mathematische Annalen, Generalregister zu Bd. 1—50. Leipzig 1898. 8⁰.
Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd. I, Heft 1. Leipzig 1898. 8⁰.

*Giacomo Tropea in Messina:*

Giasone, il Tago della Tessalia. Messina 1898. 8⁰.

*Heinrich Ulmann in Greifswald:*

Ueber die Memoiren des Fürsten Adam Czartoryski. Greifswald 1898. 8⁰.
Kaiser Wilhelm der Alte. Festrede. Greifswald 1898. 8⁰.

*M. Vaucher in Grand Lancy, Genève.*

Aux amis de Pierre Vaucher † 9. Juin 1898. Genève 1898. 8⁰.

*Albrecht Weber in Berlin:*

Vedische Beiträge. No. 7. Berlin 1898. 4⁰.

*N. Wecklein in München:*

Euripidis fabulae. Vol. I, part 5—7; Vol. II, part. 1—3. Lips 1898. 8⁰.

*Max Wellner in Neugedein:*

25 Karten von Palästina. Prag 1898. fol.

*Eduard v. Wölfflin in München:*

Archiv für lateinische Lexikographie. X. Jahrgang. Ergänzungsheft. Register zu Bd. 1—10. Leipzig 1898. 8⁰.

---

# Namen-Register.

# Sach-Register.